

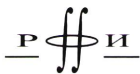
**В. В. КИСЕЛЕВ  
Д. В. ДОЛГИХ**

**НЕЛИНЕЙНО-УПРУГИЕ УЗОРЫ  
ИЗ ВМЯТИН НА ПОВЕРХНОСТЯХ  
НАГРУЖЕННЫХ ПЛАСТИН  
И ОБОЛОЧЕК**



МОСКВА  
ФИЗМАТЛИТ®  
2012

УДК 539.3  
ББК 22.251  
К 44



Издание осуществлено при поддержке  
Российского фонда фундаментальных  
исследований по проекту 12-02-07001

Киселев В.В., Долгих Д.В. **Нелинейно-упругие узоры из вмятин на поверхностях нагруженных пластин и оболочек.** — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2012. — 164 с. — ISBN 978-5-9221-1437-0.

В монографии развиваются специальные варианты редуktивной теории возмущений, которые позволяют привести трехмерные динамические уравнения нелинейной теории упругости для пластин, слоистой среды и оболочек к более простым: двумерным и одномерным моделям. Первые порядки такой теории сводятся к традиционным уравнениям для пластин и оболочек. Получены новые существенно нелинейные модели, которые корректно учитывают граничные условия на поверхностях образцов, взаимодействие продольных и поперечных мод деформации материала, геометрическую и физическую нелинейности среды, изменения инерционных свойств деформируемых поверхностей из-за локальных изменений их кривизны. На этой основе аналитически описаны узоры из вмятин и новые типы солитонов, которые образуются на поверхностях перечисленных систем на начальной (нелинейно-упругой) стадии изменения их формы.

Монография адресована научным сотрудникам, аспирантам и студентам вузов соответствующих специальностей.

---

Научное издание

*КИСЕЛЕВ Владимир Валерьевич*  
*ДОЛГИХ Денис Витальевич*

**НЕЛИНЕЙНО-УПРУГИЕ УЗОРЫ ИЗ ВМЯТИН  
НА ПОВЕРХНОСТЯХ НАГРУЖЕННЫХ ПЛАСТИН И ОБОЛОЧЕК**

Редактор *Е.И. Ворошилова*  
Оригинал-макет: *Е.В. Сабаяева*  
Оформление переплета: *В.Ф. Киселев*

Подписано в печать 29.11.2012. Формат 60×90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.  
Усл. печ. л. 10,25. Уч.-изд. л. 11,3. Тираж 300 экз. Заказ № 122

Издательская фирма «Физико-математическая литература»  
МАИК «Наука/Интерпериодика»  
117997, Москва, ул. Профсоюзная, 90  
E-mail: fizmat@maik.ru, fmlsale@maik.ru;  
<http://www.fml.ru>

Отпечатано в ООО «Чебоксарская типография № 1»  
428019, г. Чебоксары, пр. И. Яковлева, 15  
Тел.: (8352) 28-77-98, 57-01-87  
Сайт: [www.volga-print.ru](http://www.volga-print.ru)

---

ISBN 978-5-9221-1437-0

© ФИЗМАТЛИТ, 2012

© В. В. Киселев, Д. В. Долгих, 2012

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение . . . . .	5
<b>Глава 1. Эффективные модели двумерной динамики нелинейно-упругой тонкой пластины . . . . .</b>	<b>15</b>
1.1. Основные соотношения нелинейной теории упругости . . . . .	16
1.2. Построение упрощенных (2+1)-мерных уравнений для нелинейно-упругой пластины . . . . .	20
1.3. Эффективные граничные условия . . . . .	32
1.4. Авторезонансные колебания пластины . . . . .	34
1.5. Нелинейная динамика продольных деформаций пластины . . . . .	37
<b>Глава 2. Нелинейно-упругая динамика трехслойной среды: солитоны поперечной гофрировки . . . . .</b>	<b>45</b>
2.1. Постановка задачи . . . . .	47
2.2. Условие проскальзывания среднего слоя . . . . .	50
2.3. Редуктивная теория возмущений . . . . .	52
2.3.1. Теория возмущений для пластины (53). 2.3.2. Теория возмущений для подложек (65).	
2.4. Солитоны гофрировки среднего слоя . . . . .	72
<b>Глава 3. Узоры из вмятин на поверхности продольно сжатой нелинейно-упругой цилиндрической оболочки . . . . .</b>	<b>78</b>
3.1. Основные уравнения . . . . .	82
3.2. Построение модели осесимметричных изгибов оболочки . . . . .	85
3.2.1. Солитоноподобные возбуждения и структуры (96).	
3.3. Построение модели двумерных изгибов оболочки . . . . .	101
3.3.1. Узоры из вмятин и уединенные волны на поверхности оболочки (109).	
<b>Глава 4. Модели изгибов гидростатически сжатой оболочки вблизи порога ее устойчивости . . . . .</b>	<b>114</b>
4.1. Редуктивная теория возмущений . . . . .	115
4.2. Амплитудное уравнение . . . . .	120
4.3. Узоры из вмятин и компактоны . . . . .	123
4.4. Гофрирование гибкого кольца в условиях внешнего гидростатического сжатия . . . . .	127

---

4.4.1. Формулировка модели (130). 4.4.2. Изменение формы кольца в условиях внешнего гидростатического сжатия (137). 4.4.3. Изменение формы кольца на жестком стержне (141).	
Заключение . . . . .	146
Приложение А. <b>Эффективная энергия тонкой пластины</b> . . . . .	148
Приложение Б. <b>Решения краевых задач линейной теории упругости для полубезграничной среды при наличии массовых сил</b> . . .	152
Приложение В. <b>Расчет постоянной косвенного взаимодействия поперечных мод</b> . . . . .	158
Список литературы . . . . .	160

## Введение

Если не грешить против разума,  
нельзя вообще ни к чему прийти.

*А. Эйнштейн*

В настоящее время в рамках линейной теории упругости достаточно полно исследованы всевозможные волновые процессы и равновесные деформации как безграничной среды, так и типичных элементов конструкций — стержней, пластин и оболочек (см. [1–4] и цитированную там литературу). При достаточно больших нагрузках упругие системы могут терять устойчивость формы. Как почти все экспериментальные, так и теоретические исследования, проведенные к настоящему времени, были нацелены на выяснение условий, при которых каждая конструкция, например оболочка, сохранит неизменной свою форму при заданном уровне внешних воздействий. Это чрезвычайно важно для расчетов и проектирования многих ответственных конструкций, таких, например, как корпуса подводных лодок, трубы для бурения морских скважин, вагоны скоростного транспорта и т. д. Но линейная теория позволяет лишь грубо оценить критические нагрузки, при которых теряются устойчивые формы оболочек, и предсказать возможное число волн, образующихся при этом на их поверхностях [1, 5]. Критические нагрузки линейной теории не соответствуют экспериментальным данным и часто оказываются завышенными. На практике после потери устойчивости формы при верхней критической нагрузке, которая дается линейной теорией, оболочка совершает «хлопок» и переходит в устойчивое закритическое состояние. При этом, как заметил Погорелов [6], изменение формы оболочки характеризуется геометрическими (изометрическими) изгибами ее поверхности, при которых деформации остаются сравнительно малыми и могут быть описаны в рамках нелинейной теории упругости.

По существующим ныне представлениям, расхождения между теоретическими и экспериментальными значениями критических нагрузок для оболочек можно избежать, решая задачи, связанные с потерей устойчивости формы оболочек, на основе нелинейных уравнений. Однако аналитическое решение таких задач осложнено из-за серьезных математических трудностей, обусловленных неинтегрируемостью основных уравнений традиционной теории оболочек. В работах [2, 7] дан сравнительный анализ соответствующих нелинейных моделей, предложены новые неклассические модели, удобные для применения численных методов. В этих моделях учтена геометрическая нелинейность тензора деформации, но соотношения упругости принимаются линейными. В рамках квадратичных вариантов моделей тонких упругих оболочек

проанализировано влияние типа нагружения и вида граничных условий на вид зависимости нагрузка–прогиб для пологих арок, сферических и эллипсоидальных оболочек. Численные результаты по исследованию волновых процессов и процессов деформации в упругих системах обсуждаются в ряде обзоров и монографий (см., например, [2, 7–9] и цитированную там литературу).

Использование численных методов позволило отчасти избежать затруднений, связанных с неинтегрируемостью уравнений, и описать процессы достаточно общего вида. В частности, для пологих сферических куполов, цилиндрических и сферических панелей, нагруженных внешним давлением, построен основанный на методе дополнительной вязкости алгоритм нахождения устойчивых до- и закритических состояний, верхних и нижних критических нагрузок, исследовано влияние на критическую нагрузку начальных несовершенств образцов и нелинейных свойств материала [10].

Однако численное решение нелинейных уравнений для таких систем требует большого количества арифметических операций на ЭВМ. Усложнение геометрии задачи и пространственных размеров образцов требует применения густых сеток, что приводит к большой нагрузке на виртуальную память используемых ЭВМ и, следовательно, существенно увеличивает время расчетов [10]. Кроме того, численный подход к решению задачи не вскрывает в полной мере закономерностей наблюдаемых явлений. Более эффективным представляется использование совместно с численными расчетами дополняющих и верифицирующих их аналитических методов.

Полученные к настоящему времени основные аналитические результаты по исследованию нелинейных волн деформации отражены в монографиях [11–15], где также можно найти ссылки на основные оригинальные статьи. Наиболее полно описаны нелинейные волны продольной деформации, которые распространяются в безграничной среде, вдоль стержней, пластин или оболочек и претерпевают лишь слабые поперечные изменения. Поперечные волны изучать труднее, потому что они при своем распространении взаимодействуют с другими типами волн [13]. В безграничной среде квазипоперечные волны деформации, соответствующие двум семействам характеристик с близкими характеристическими скоростями, описаны в [16]. Сдвиговые самолокализованные волны деформации в пластине исследовались в [17, 18]. В [15] классические уравнения теории оболочек редуцированы к упрощенным нелинейным моделям, с помощью которых проанализированы продольные, сдвиговые, изгибные слабонелинейные волны и солитоны в оболочках.

В ходе анализа были выявлены эффекты, которые невозможно объяснить при помощи линейной теории упругости, в частности, локализация волн деформации, часто сопровождающаяся увеличением амплитуды волны, а также распространение частицеподобных волн — солитонов. Благодаря существованию солитонов открывается возмож-

ность переноса энергии деформации в виде локализованных сгустков без потерь даже в материалах, где распространение линейных упругих волн связано со значительным затуханием. Усиление и фокусирование деформаций из-за нелинейных эффектов ведет к появлению локализованных зон пластичности или образованию микротрещин и разрушению образцов, что имеет важное значение для оценок прочностных свойств материалов. Эти оценки невозможно получить в рамках линейной теории. Локализация деформаций приводит также к движению точечных дефектов и температурным эффектам [11, 14].

Настоящая монография служит естественным продолжением работ по аналитическому исследованию нелинейно-упругих систем. В ней рассматривается ряд вопросов, представляющих фундаментальный и прикладной интерес, которые, однако, до сих пор недостаточно изучены: как по причине сложности основных уравнений нелинейной теории упругости, так и из-за отсутствия разработанных методов их анализа. Перечислим некоторые из проблем.

Для диагностики нагруженных систем вблизи порогов устойчивости их формы может быть полезна высокая чувствительность акустической нелинейности к напряженно-деформированному состоянию этих систем (см. например, [19, 20]). Сильно выраженные нелинейные эффекты проявляются и хорошо наблюдаются при умеренных значениях интенсивности звука уже на самой первой (нелинейно-упругой) стадии формоизменения образцов, когда эффективные модули упругости материала остаются близкими к модулям линейной теории.

На этой стадии традиционные методы диагностики, основанные, например, на наблюдении изменений скоростей упругих волн (или эквивалентных им изменений собственных частот исследуемого образца) не дают определенных результатов. Линейные акустические методы позволяют исследовать объекты, варьируя лишь частоту, фазу, поляризацию и направление распространения волны. Зависимость отклика среды от амплитуды (интенсивности) сигнала оказывается специфическим проявлением нелинейности. Зондирующая нелинейная волна в результате обмена энергией с нагруженным образцом приобретает характерные амплитудные и фазовые модуляции, которые, в частности, могут доставить к приемнику излучения информацию о зарождении «опасных» узоров из локализованных деформаций, предшествующих разрушению образца. Изучение нераскрытых возможностей нелинейной акустической диагностики представляется актуальным и важным.

В настоящее время появились первые экспериментальные работы [21, 22], в которых в условиях внешнего гидростатического сжатия удается управлять развитием локальных неустойчивостей первоначально круговых оболочек и получать из них изделия с заданной формой поперечного сечения (с круговым сечением, но переменным вдоль образующей оболочки; с квадратным, шестигранным и любым зубчатым сечением). Теоретическое описание динамики оболочек вблизи порогов устойчивости их формы даже на начальной стадии деформации мате-

риала, когда на поверхностях оболочек образуются нелинейно-упругие «узоры» из пространственно локализованных вмятин, является одной из наиболее сложных задач механики и физики конденсированного состояния. Ее решение обещает пролить новый свет: на роль долгоживущих пространственно-локализованных возбуждений и структур, которые формируются вблизи порогов неустойчивости системы и предшествуют пластической деформации материала; на связь этих сильно нелинейных состояний с наблюдаемыми свойствами материалов и нагруженных конструкций. Выяснение особенностей развития локальных неустойчивостей, изучение процессов локализации изгибов в виде нелинейно-упругих узоров из вмятин на поверхностях пластин и оболочек являются предпосылками создания теории управления изменением формы нагруженных образцов.

Нелинейная теория оболочек существенно отличается от линейной как по постановке задач, так и по методам их решения. Модели классической нелинейной теории пластин и оболочек получены достаточно давно. Их построение основывалось на наглядных геометрических гипотезах, справедливость которых трудно оценить количественно [1, 23–27]. Так, предполагается, что нормали к исходной срединной поверхности пластины или оболочки переходят в нормали к изогнутой срединной поверхности. Это означает, что деформации сдвига по толщине принимаются пренебрежимо малыми. Каждый слой материала, параллельный срединной поверхности, находится в условиях плосконапряженного состояния (гипотеза Кирхгофа). Гипотеза обобщенного плосконапряженного состояния лежит в основе почти всех классических теорий, хотя она не учитывает в полной мере связи продольных и поперечных мод деформации.

Тимошенко [23], чтобы устранить этот недостаток, предложил другую гипотезу: нормаль к исходной поверхности пластины или оболочки до деформации остается прямолинейной после деформации, не изменяя своей длины, но поворачивается относительно поверхности на некоторый угол. Однако в рамках любой из гипотез при выводе нелинейных уравнений теории пластин и оболочек закон изменения перемещений и напряжений по толщине пластины или оболочки жестко задан. Такое приближение не может быть развито в верную теорию, так как приводит к нарушению граничных условий на поверхностях образцов при значительном изменении их формы.

Впервые указанный недостаток был отмечен В.В.Новожиловым с соавторами [25, 28]. Установлено, что даже в линейной теории оболочек погрешность гипотез Кирхгофа более существенна, чем в теории пластин. В рамках геометрических гипотез невозможен последовательный учет изменения инерционных свойств поверхности пластины или оболочки при образовании на них вмятин.



Макроскопические свойства образца формально определяются разложением его упругой энергии в степенной ряд по инвариантам тензора деформаций, совместимых со свойствами симметрии материала. Коэффициенты при квадратичных членах разложения называются линейными модулями упругости, а коэффициенты при более высоких членах разложения — нелинейными модулями. Такую нелинейность принято называть «физической», поскольку она связана с нелинейностью сил межмолекулярного взаимодействия в среде и различна для разных материалов.

Источником второго типа нелинейности оказывается само определение тензора деформации, которое содержит произведения производных от компонент поля смещений по координатам. Эта связь, которая не зависит от физических свойств деформируемого тела, называется «геометрической нелинейностью». Традиционные модели пластин и оболочек учитывают только геометрическую нелинейность тензора деформаций [2]. Включение физической нелинейности материала в принятую схему построения нелинейных моделей для пластин и оболочек сталкивается с серьезными трудностями. В работе [13] отмечалось, что для последовательного описания распространения даже продольных волн деформации необходим одновременный учет геометрической и физической нелинейностей, так как они порождают в модельных уравнениях члены одного типа с коэффициентами, которые в большинстве случаев являются величинами одного порядка.

Основная трудность получения нелинейных уравнений для пластин и оболочек состоит в оценке порядка малости сохраняемых при такой процедуре величин. Наибольшее применение на практике получили достаточно простые, построенные на почти наглядных физических гипотезах варианты нелинейной теории оболочек. В рамках этих уравнений решено большое число инженерных задач, связанных с исследованием процессов деформирования, устойчивости и критического поведения оболочек. Точных оценок применимости этих уравнений практически не существует.

В то же время известно, что решения нелинейных уравнений очень чувствительны к выбору начальных условий, к виду нелинейных слагаемых в модельных уравнениях и даже к значениям коэффициентов при них. Порождаемые таким образом малые ошибки не влияют на решение линеаризованной задачи. Однако они приводят к существенным искажениям решений нелинейной задачи [14]. Анализ аналитических и численных решений показывает, что наибольшие трудности возникают при исследовании тонкостенных оболочек; эти трудности значительно увеличиваются в случае действия на оболочку локальных нагрузок [7]. Таким образом, решение задач об изменении формы нагруженных образцов и вычислении критических нагрузок требует новых методов вывода модельных уравнений.

В этой связи важно, что в рамках нелинейной теории упругости прочно установлены динамические уравнения для нагруженных образцов вместе с граничными условиями на их деформируемых поверхностях [29–32]. Более того, в рамках нелинейной теории упругости последовательно учитываются как геометрическая, так и физическая нелинейность каждой конкретной задачи. Представляется естественным исходить из этой последовательной и общей теории при построении упрощенных моделей для нагруженных стержней, пластин и оболочек. Тем более оказалось, что в настоящее время, благодаря развитию физики нелинейных явлений, появились методы построения упрощенных моделей [33], которые, в принципе, позволяют корректно аппроксимировать нелинейно-упругую динамику нагруженных элементов конструкций вблизи порогов устойчивости их формы без привлечения априорных гипотез, с контролируемой точностью по малым параметрам задачи. Такие упрощенные уравнения оказываются универсальными и близкими к интегрируемым нелинейным моделям, что открывает возможность детального анализа их решений методами современной теории солитонов. Они замечательны тем, что выявляют скрытую алгебраическую симметрию каждой задачи.

Нелинейно-упругая динамика пластин и оболочек в областях их сильных поперечных изгибов, связанная с образованием локализованных узоров из вмятин на поверхностях образцов, а также возможности аппроксимации этих явлений и процессов упрощенными интегрируемыми моделями практически не изучены.

Исходя из вышеизложенного монография преследует следующие цели:

- развитие в рамках нелинейной теории упругости методов редуцированной теории возмущений для построения упрощенных моделей динамики сильных изгибов пластин, нагруженных слоев среды и оболочек, которые учитывали бы геометрическую и физическую нелинейность материала, граничные условия на деформируемых поверхностях, а также разные способы внешнего нагружения;
- аналитическое описание узоров из вмятин и новых типов солитонов, которые образуются на поверхностях перечисленных систем на начальной (нелинейно-упругой) стадии изменения их формы.

Книга содержит четыре главы.

В главе 1 на примере пластины приведено обоснование и объяснение процедуры, позволяющей с помощью нелинейной теории возмущений редуцировать исходную трехмерную постановку задачи к модельному уравнению. Построение модельных уравнений для тонкой пластины осуществлено в рамках нелинейной теории упругости, причем выражение для упругой энергии тела содержит все совместимые с симметрией среды инварианты тензора деформаций. Предлагаемая процедура [34, 35] с контролируемой точностью по малым параметрам, характеризующим пространственно-временные масштабы деформаций, геометрический размеры пластины и характер внешнего нагружения,

последовательно отбирает необходимые инварианты тензора деформаций и вклады от них в упрощенные уравнения.

Важная особенность уравнений нелинейной теории упругости заключается в том, что они не содержат дисперсионных слагаемых. При построении упрощенных моделей такие слагаемые появляются в результате исключения переменной, описывающей неоднородности деформаций вдоль нормали к поверхности пластины. В результате конкуренции дисперсионных эффектов и нелинейно-упругих взаимодействий происходит ограничение роста амплитуды деформаций и образование локализованных волн деформации или узоров из вмятин на поверхности пластины. Поэтому для построения нелинейных моделей предлагается вариант редуцированной теории возмущений, в котором краевые задачи вдоль нормали к развитой поверхности пластины решаются аккуратно, не прибегая к традиционно используемым разложениям полей смещений в ряды Тейлора. Это позволяет правильно выявить зависимость полей смещений от «быстрой» координаты вдоль нормали и, следовательно, эффекты дисперсии. Описание динамики более плавных двумерных деформаций, ответственных за образование на пластине локализованных волн деформаций или узоров из вмятин, сводится к системе нелинейных дифференциальных уравнений.

Показано, что для пластины первые порядки такой теории возмущений приводят к традиционной геометрически нелинейной модели Фёппля–Кармана. Учет высших приближений дает обобщенную двумерную динамическую модель, которая учитывает геометрическую и физическую нелинейность задачи, включает дополнительные эффективные силы, которые обуславливают неоднородные деформации материала и изменения инерционных свойств пластины из-за локальных изменений ее кривизны. Для пояснения необходимости альтернативной модели рассмотрена задача об авторезонансных колебаниях продольно сжатой пластины, подверженной с внешней поверхности периодическим толчкам малой поперечной силой. Когда смещения пластины с двух из ее краев стеснены связями, нелинейные уравнения Фёппля–Кармана превращаются в линейные и потому не дают описания специфики нелинейных резонансных колебаний пластины.

В этой же главе построена модель динамики продольных деформаций пластины. Показано, что приближения и подстановки, использованные ранее для получения аналогичной модели [36], нарушают краевые условия на поверхности пластины и потому не дают верного закона дисперсии для линейных мод. Замечательно, что новое модельное уравнение допускает широкий класс двумерных мультисолитонов. Они получены в явном виде методом Хироты.

В главе 2 рассмотрена задача [37, 38] о динамике поперечных изгибов нагруженного слоя среды в форме пластины, заключенной между двумя полубезграничными подложками с меньшими модулями упругости. Используются граничные условия, допускающие возможность проскальзывания среднего слоя вдоль подложек. Данная задача

помогает выявить особенности механизма гофрировки отдельных слоев материала, наблюдаемой экспериментально [39, 40]. Помимо уже перечисленных трудностей построение упрощенной модели для такой системы осложняется тем, что деформации подложек, вызванные изгибами среднего слоя среды, оказывают на этот слой нелокальное обратное воздействие. Поэтому упрощенные уравнения динамики среднего слоя должны быть интегро-дифференциальными. В качестве близкого примера можно сослаться на работы [11, 41], где теоретически описаны солитоны продольной деформации в тонкой пленке на поверхности упругого полупространства.

Существенное упрощение задачи было достигнуто вблизи порога устойчивости формы нагруженного слоя. В этом случае деформирование слоистой среды обусловлено взаимодействиями тех неустойчивых мод деформации, которые близки к нейтрально устойчивой линейной моде, ответственной за гофрирование материала. В контексте предлагаемой теории возмущений выделение основных взаимодействий достигается введением иерархии «медленных» переменных для описания разных масштабных уровней деформации. В терминах «медленных» переменных развиты варианты нелинейной теории возмущений для описания двумерной динамики слоев. В результате их «сшивки» получена эффективная модель квазиодномерной динамики нелинейно-упругих изгибов среднего слоя. Модель определяет эволюцию огибающей волнообразных поперечных изгибов среднего слоя. Замкнутое уравнение для огибающей следует из условий разрешимости краевых задач теории возмущений. Поскольку «замыкание» процедуры происходит в высших порядках теории возмущений и заранее не очевидно, в этой и последующих главах все этапы построения моделей сопровождаются подробными вычислениями.

Полученная модель динамики среднего слоя допускает точные решения, которые описывают локализованные структуры из волнообразных поперечных изгибов среднего слоя. Такие структуры могут быть как движущимися, так и неподвижными. Поскольку они образуются только в некотором интервале внешних напряжений вблизи порога устойчивости системы, можно считать, что они играют решающую роль на начальной нелинейно-упругой стадии деформирования материала и обуславливают характер его последующего пластического течения.

Кроме того, предсказаны и аналитически описаны «темные» солитоны, движущиеся подобно частицам, на фоне бегущих по среднему слою акустических волн. Поскольку «темные» солитоны образуются только вблизи порога устойчивости формы нагруженного слоя, их можно использовать для диагностики предкритического напряженного состояния слоистой среды.

В главах 3 и 4 предлагаемые приемы модифицируются и используются для построения более сложных моделей. Они описывают сценарии начальной стадии изменения формы продольно и гидростатически сжатых оболочек [42, 43]. В главе 4 показано [43], что обобщение подхода, развитого в главе 1, приводит к традиционной нелинейной модели оболочек [1, 27, 44], которая учитывает только геометрическую нелинейность задачи и не всегда достаточна для изучения их динамики. В частности, в условиях внешнего гидростатического сжатия изгибы поверхности сравнительно длинной первоначально круговой оболочки слабо зависят от координаты вдоль образующей оболочки. В этом случае можно пренебречь зависимостью смещений от указанной координаты и свести традиционные нелинейные модели оболочек к линейным уравнениям. Теперь нелинейная динамика оболочек проявится лишь в следующих порядках теории.

Как и в главе 2, технику построения эффективных моделей для оболочек и сами модели можно значительно упростить, предположив, что вблизи порогов устойчивости оболочек образование узоров из вмятин на их поверхностях осуществляется через преимущественные (нейтрально-устойчивые) линейные моды деформации. При таком подходе уравнения нелинейной теории упругости редуцируются к амплитудным уравнениям для огибающих вмятин на поверхностях оболочек. Выбор медленных переменных и амплитудные уравнения специфичны для каждой конкретной задачи. Однако общая схема построения моделей оказывается универсальной.

В главе 3 она позволяет аналитически описать кольцевые складки и спиралевидные полосы из ромбовидных вмятин на поверхностях продольно сжатых оболочек [42], а в главе 4 — вытянутые вдоль образующей узоры из вмятин на поверхности гидростатически сжатой оболочки [43].

Найдены новые типы солитонов («темные», «серые», «компактоны»), которые могут быть использованы для диагностики напряженного состояния продольно и гидростатически сжатых оболочек.

В главе 4, в рамках подхода Коссера, решена нелинейная краевая задача о формоизменении тонкого гибкого кольца под действием внешнего гидростатического давления [45]. Эта задача дает представление о характере гофрирования поперечного сечения оболочки в условиях гидростатического сжатия, когда сечение остается неизменным на протяженных участках вдоль образующей. Модель позволяет получить зависимость кривизны деформированного кольца от внешнего давления. Форма кольца восстанавливается по его кривизне методами дифференциальной геометрии.

Найдены возможные при заданных нагрузках равновесные конфигурации кольца. Форма кольца выражена через эллиптические функции и интегралы, параметры которых находились численно из уравнений-связей, обеспечивающих замкнутость контура кольца и периодичность кривизны при обходе вдоль его средней линии. Аналитическими и численными методами исследовано изменение формы кольца в условиях внешнего сжатия при наличии жесткого стержня, помещенного внутрь кольца. Полученные результаты на качественном уровне подтверждаются экспериментами [21, 22], в которых путем гидростатического сжатия трубных заготовок были получены цилиндрические изделия с переменным по длине поперечным сечением.

Авторы признательны за внимание к работе и полезные замечания А.Б. Борису, В.В. Губернаторову, Б.И. Каменецкому, Е.А. Кузнецову, И.Э. Келлеру, В.Б. Наймарку, А.А. Расковалову, А.М. Самсонову, Б.К. Соколову, А.П. Танкееву.

## Глава 1

# ЭФФЕКТИВНЫЕ МОДЕЛИ ДВУМЕРНОЙ ДИНАМИКИ НЕЛИНЕЙНО-УПРУГОЙ ТОНКОЙ ПЛАСТИНЫ

Всякая точная наука основывается  
на приближительности.

*Бертран Рассел*

В этой главе предлагается вариант теории возмущений для построения упрощенной нелинейной  $(2+1)$ -мерной модели для тонких пластин, амплитуда изгиба которых сравнима с их толщиной [34, 35]. Такой изгиб пластин считается сильным, поэтому описывается в рамках нелинейной теории упругости [29–31, 46]. Неоднородные по толщине пластины деформации сильно зависят от граничных условий на изменяющихся при деформировании поверхностях пластины. Эти деформации наиболее значительны и, в первую очередь, определяют динамику локальных изгибов пластины. В настоящей главе продольные и поперечные деформации пластины выделяются, а их взаимодействие последовательно учитывается путем введения «быстрых» и «медленных» переменных. В рамках метода многомасштабных разложений [33] решается последовательность краевых задач в направлении нормали к плоскости пластины с контролируемой точностью по параметрам, характеризующим пространственно-временную деформацию пластины, геометрическую и физическую нелинейность среды, внешнее нагружение. Предлагаемая процедура построения модели не использует разложения полей смещений в ряды по координате вдоль нормали к поверхности пластины.

План главы следующий.

В разделе 1.1 приведены основные уравнения нелинейной теории упругости. Важно, что полная нелинейно-упругая энергия системы записывается в виде ряда по всем совместимым с симметрией среды инвариантам лагранжева тензора деформаций, без каких-либо гипотез о роли тех или иных инвариантов.

В разделе 1.2 изложена идеология редуктивной теории возмущений в применении к динамике нелинейно-упругой пластины с граничными условиями. Первые порядки теории возмущений в квазистатическом пределе приводят к известным уравнениям статики гибких пластин [1, 46]. Однако такое «геометрическое» приближение не описывает в полной мере нелинейной динамики сильных изгибов пластины, поскольку для квазиодномерных деформаций нелинейные двумерные уравнения редуцируются к линейным. Для корректного учета эффектов геометрической и физической нелинейности среды рассматриваются следующие порядки теории возмущений. В результате получена эффективная (2+1)-мерная модель, которая адекватно описывает взаимодействие продольных деформаций, поперечных кручений и изгибов пластины, а также локальные изменения инерционных свойств пластины вследствие ее искривлений. В упрощенных уравнениях поперечное нагружение пластины моделируется источниками.

В разделе 1.3 изложена схема вывода краевых условий для эффективной модели.

В разделе 1.4 рассмотрена модельная задача об устойчивости и авторезонансных колебаниях пластины, которая иллюстрирует недостаточность нелинейно-геометрического приближения Фёппля–Кармана [1, 46].

Формирование чисто продольных деформаций пластины соответствует более быстрым процессам во времени и требует специального рассмотрения. В разделе 1.5 выведены (2+1)-мерные нелинейные уравнения для продольных деформаций в пластине. Задача редуцирована к двумерной динамической модели, которая является «промежуточной» между интегрируемыми моделями Кадомцева–Петвиашвили и Буссинеска. Методом Хироты найдены двумерные мультисолитоны продольной деформации в пластине.

### 1.1. Основные соотношения нелинейной теории упругости

В нелинейной теории конечных деформаций упругая энергия среды записывается в форме разложения по инвариантам лагранжева тензора деформаций,

$$\eta_{ik} = \frac{1}{2} [\partial_i u_k + \partial_k u_i + \partial_k u_l \partial_i u_l] = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial X_n}{\partial x_i} \frac{\partial X_n}{\partial x_k} - \delta_{ik} \right]. \quad (1.1)$$

Здесь  $x_k$  — координаты материальной точки среды до деформации,  $X_k = x_k + u_k(\mathbf{x}, t)$  — координаты той же точки после деформации ( $i, k = 1, 2, 3$ ),  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  — вектор смещений. По дважды встречающимся индексам подразумевается суммирование. Для изотропной среды



в качестве независимых инвариантов тензора  $\eta_{ik}$ , через которые могут быть выражены остальные инварианты, выберем [46]:

$$I_1 = \eta_{ii}, \quad I_2 = \eta_{ik}^2, \quad I_3 = \eta_{ik}\eta_{kl}\eta_{li}. \quad (1.2)$$

Заметим, что чаще используют другой выбор базисных инвариантов [29]:

$$J_1 = \eta_{ii}, \quad J_2 = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ksp}\eta_{is}\eta_{jp}, \quad J_3 = \det\|\eta_{ik}\|, \quad (1.3)$$

который, на наш взгляд, менее удобен при алгебраических вычислениях. Переход от (1.2) к (1.3) осуществляется с помощью формул

$$I_1 = J_1, \quad I_2 = J_1^2 - 2J_2, \quad I_3 = J_1^3 + 3(J_3 - J_1J_2).$$

С учетом этих замечаний выражение для упругой энергии изотропного нелинейного тела представим в следующей форме [47]:

$$\begin{aligned} W &= \int_{V_0} \varphi d^3\mathbf{x}', \quad \varphi = \varphi_{2,3} + \varphi_{n \geq 4}; \\ \varphi_{2,3} &= \frac{\lambda}{2}I_1^2 + \mu I_2 + \frac{A}{3}I_3 + BI_1I_2 + \frac{C}{3}I_1^3, \\ \varphi_{n \geq 4} &= \sum_{n=4}^{\infty} \sum_{\langle k,p,q \rangle = n} A_{k,p,q} I_1^k I_2^p I_3^q. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Здесь  $\varphi$  — энергия, отнесенная к единице объема тела до деформации,  $\sum_{\langle k,p,q \rangle = n}$  означает сумму слагаемых, для которых  $k + 2p + 3q = n$  ( $n \geq 4$ ), интегрирование производится по объему  $V_0$  тела до деформации.

Заметим, что физическая нелинейность сред с микроструктурой легко учитывается в рамках данной теории (см. работу [14] и цитированную там литературу). Влияние микроструктуры моделируется посредством дополнительных градиентных слагаемых в выражении для плотности энергии образца. Последние приводят к появлению линейных дисперсионных членов в исходных (3+1)-мерных уравнениях нелинейной теории упругости.

Нелинейные упругие модули не известны для большинства материалов, а известные значения не надежны [11]. Далее для определенности предполагается, что упругие модули среды ( $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $A_{k,p,q}$ ) сравнимы по порядку величины. Это приближенно справедливо для многих материалов [31, 48]. Учет различия упругих модулей усложнит анализ, но не изменит общую схему построения упрощенных моделей. Для дальнейшего анализа важно, что слагаемые в (1.4), содержащие инварианты более высокого порядка, вносят меньший вклад в нелинейную динамику среды, поскольку  $\max|\eta_{ik}| \ll 1$ . Далее для пластины

выделена область пространственно-временных масштабов и внешних нагрузок, где можно пренебречь слагаемыми  $\varphi_{n \geq 4}$  в энергии (1.4).

Когда процессы деформации адиабатичны, динамические уравнения для нелинейно-упругого тела могут быть получены из принципа Гамильтона:

$$\delta S + \int_{t_0}^t \delta A dt' = 0, \quad S = \int_{t_0}^t [K - U] dt'. \quad (1.5)$$

Кинетическая энергия системы  $K$  имеет вид

$$K = \int_{V_0} \frac{\rho_0}{2} (\partial_t u_i)^2 d^3 \mathbf{x}', \quad (1.6)$$

где  $\rho_0$  — плотность материала в недеформированном состоянии (далее считаем  $\rho_0 = \text{const}$ ), интегрирование производится по объему  $V_0$  недеформированного тела.

Потенциальная энергия  $U$  включает упругую энергию  $W$  тела и энергию его взаимодействия  $W_1$  с внешними массовыми силами:

$$U = W + W_1, \quad W_1 = - \int_{V_0} \rho_0 P_i u_i d^3 \mathbf{x}'. \quad (1.7)$$

Здесь  $P_i$  — внешняя массовая сила,  $\rho_0 P_i$  — сила, действующая на единицу объема тела до деформации.

Работа внешних поверхностных сил имеет вид [29]

$$\delta A = \int_S \delta u_i T_{ij}^{\text{ext}} dS_j. \quad (1.8)$$

Подчеркнем, что внешние напряжения  $T_{ij}^{\text{ext}}$  прилагаются к поверхности  $S$  деформированного тела. На элемент поверхности  $dS_j$  деформированного тела действует сила  $T_{ij}^{\text{ext}} dS_j$ . В (1.8) интегрирование по поверхности  $S$  следует заменить на интегрирование по поверхности  $\sigma$  недеформированного тела, чтобы воспользоваться принципом Гамильтона. Необходимое преобразование

$$\int_S \delta u_i T_{ij}^{\text{ext}} dS_j = \int_\sigma \delta u_i T_{ij}^{\text{ext}} \det \left\| \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}} \right\| \frac{\partial x_s}{\partial X_j} d\sigma_s \quad (1.9)$$

достигается с помощью тождества

$$\begin{aligned} dS_j &= \frac{1}{2} \varepsilon_{j k p} dX_k \wedge dX_p = \\ &= \frac{1}{2} \left[ \varepsilon_{i k p} \frac{\partial X_i}{\partial x_s} \frac{\partial X_k}{\partial x_m} \frac{\partial X_p}{\partial x_n} \right] \frac{\partial x_s}{\partial X_j} dx_m \wedge dx_n = \\ &= \det \left\| \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}} \right\| \frac{\partial x_s}{\partial X_j} d\sigma_s, \end{aligned}$$

где  $d\sigma_s = (1/2)\varepsilon_{smn} dx_m \wedge dx_n$  — элемент поверхности недеформированного тела,  $\Lambda$  — символ внешнего произведения.

Принцип Гамильтона (1.5) дает необходимые уравнения динамики и краевые условия. Уравнения динамики имеют вид [29]

$$-\rho_0 \partial_i^2 u_i + \partial_s P_{is} + \rho_0 P_i = 0, \quad (1.10)$$

где

$$\partial_s = \frac{\partial}{\partial x_s}, \quad P_{is} = \frac{\partial \varphi}{\partial [\partial_s u_i]}.$$

При варьировании функционала  $S$  по полям  $u_i$  возникают интегралы по поверхности  $\sigma$ , которые приводят к двум типам краевых условий. На части поверхности тела  $\sigma'$ , где заданы внешние силы, имеем

$$P_{is} n_s \Big|_{\sigma'} = T_{ij}^{\text{ext}} \det \left\| \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}} \right\| \frac{\partial x_s}{\partial X_j} n_s \Big|_{\sigma'}. \quad (1.11)$$

Здесь  $\mathbf{n}$  — вектор единичной нормали к поверхности  $\sigma'$ . На другой части поверхности тела  $\sigma$ , где задан вектор перемещения, при варьировании следует считать  $\delta u_s = 0$ . Кроме того,  $\delta u_s = 0$  на концах промежутка времени  $[t_0, t_1]$ .

Отметим, что тензор  $P_{ij}$  несимметричен по своим индексам  $i, j$ . В то же время простым соотношением он связан с симметричным тензором напряжений  $T_{ij}$  деформированной среды [29], а именно:

$$T_{ij} = \det^{-1} \left\| \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}} \right\| P_{ik} \frac{\partial X_j}{\partial x_k} = \det^{-1} \left\| \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}} \right\| P_{jk} \frac{\partial X_i}{\partial x_k}. \quad (1.12)$$

Эта связь проявилась при формулировке условия (1.11).

При отсутствии нагружения на внешней поверхности тела граничные условия (1.11) принимает простой вид

$$P_{is} n_s \Big|_{\sigma'} = 0. \quad (1.13)$$

Симметричный тензор  $\partial \varphi / \partial \eta_{ik}$  построен из небольшого числа стандартных блоков. Он представляет линейную комбинацию трех тензоров  $\delta_{ik}, \eta_{ik}, \eta_{is} \eta_{sk}$  с коэффициентами, зависящими от базисных инвариантов [47],

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \eta_{ik}} = f_1(I_1, I_2, I_3) \delta_{ik} + f_2(I_1, I_2, I_3) \eta_{ik} + f_3(I_1, I_2, I_3) \eta_{is} \eta_{sk}.$$

Поэтому дальнейшие алгебраические вычисления значительно упрощаются, если тензор  $P_{ij}$  переписать в форме

$$P_{ij} = \frac{\partial \varphi}{\partial [\partial_j u_i]} = \frac{\partial \varphi}{\partial \eta_{kj}} \frac{\partial X_i}{\partial x_k} = \frac{\partial \varphi}{\partial \eta_{ij}} + \partial_k u_i \frac{\partial \varphi}{\partial \eta_{kj}}. \quad (1.14)$$

## 1.2. Построение упрощенных (2+1)-мерных уравнений для нелинейно-упругой пластины

Рассмотрим нелинейно-упругую пластину (рис. 1.1), параллельную плоскости  $x_1Ox_2$ . Пусть  $d$  — толщина пластины вдоль оси  $x_3$ ,  $l$  — характерный пространственный масштаб ее деформаций в плоскости  $x_1Ox_2$ ,  $a$  и  $t_{\text{ch}} = l/\sqrt{\mu/\rho_0}$  — характерные амплитуда смещений и время деформаций. Для дальнейшего анализа важно, что  $l$  много меньше характерного размера пластины  $L$ .

Введем два малых параметра:  $\varepsilon_1 = a/l$  и  $\varepsilon_2 = d/l$ , которые отражают порядок малости амплитуд смещений и толщины пластины. В исходных динамических уравнениях (1.10) перейдем к безразмерным переменным

$$\xi_\alpha = \frac{x_\alpha}{l}, \quad \eta = \frac{x_3}{d}, \quad \tau = \frac{t}{t_{\text{ch}}}, \quad u_i = a\bar{u}_i. \quad (1.15)$$

Тогда они примут вид

$$\mu\varepsilon_1\varepsilon_2\partial_\tau^2\bar{u}_\alpha = \rho_0dP_\alpha + \varepsilon_2\partial_\beta P_{\alpha\beta} + \partial_\eta P_{\alpha 3}, \quad (1.16)$$

$$\mu\varepsilon_1\varepsilon_2\partial_\tau^2\bar{u}_3 = \rho_0dP_3 + \varepsilon_2\partial_\beta P_{3\beta} + \partial_\eta P_{33}. \quad (1.17)$$

Здесь и далее греческие индексы  $\alpha, \beta = 1, 2$ ;  $\partial_\alpha = \partial/\partial\xi_\alpha$ . Рассмотрим область сильных изгибов пластины, где справедлива приближенная оценка  $\varepsilon_1 \sim \varepsilon_2$  (или  $a \sim d$ ).

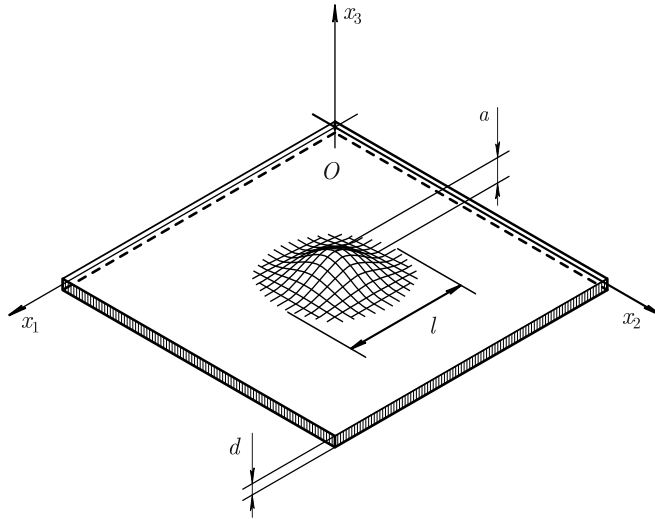


Рис. 1.1. Деформация тонкой пластины

Считаем, что по порядку величины массовая сила и внешнее напряжение на развитых плоскостях ( $\eta = \pm 1/2$ ) пластины характеризуются соотношениями:

$$\begin{aligned} d\rho_0 P_3 / \mu &= O(\varepsilon_1^4), & d\rho_0 P_\alpha / \mu &= O(\varepsilon_1^5), \\ T_{33}^{\text{ext}} / \mu &= O(\varepsilon_1^4), & T_{\alpha 3}^{\text{ext}} / \mu &= O(\varepsilon_1^5). \end{aligned} \quad (1.18)$$

Внешнее нагружение на боковых гранях пластины значительно больше:

$$T_{\alpha\beta}^{\text{ext}} / \mu = O(\varepsilon_1^2). \quad (1.19)$$

Поля  $\bar{u}_\alpha$  описывают не только локальные деформации материала с характерным масштабом  $l$ , но и квазиоднородное плоское напряженное состояние пластины, при котором  $\partial_\beta \bar{u}_\alpha = O(\varepsilon_1^2)$ .

Этими условиями выделена область физических параметров задачи, в которой нелинейная динамика пластины будет описана в рамках более простой нелинейной (2+1)-модели. Для построения эффективных уравнений решения исходных (3+1)-мерных уравнений (1.16), (1.17) ищутся в виде

$$\bar{u}_\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{u}_\alpha^{(n)}, \quad \bar{u}_3 = \bar{u}_3^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{u}_3^{(n)}, \quad (1.20)$$

где верхние индексы указывают общий порядок соответствующих слагаемых по параметрам  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  ( $\varepsilon_1 \sim \varepsilon_2$ ).

Ограничимся рассмотрением сравнительно медленных во времени процессов, т. е.

$$\frac{\partial_\tau^2 \bar{u}_3}{\bar{u}_3} \sim O(\varepsilon_1^2). \quad (1.21)$$

Отметим первый порядок производной по времени, формально заменив  $\partial_\tau$  на  $\partial_{\tau_1}$ .

Выделенная область характерных пространственно-временных масштабов и амплитуд деформаций представляет наибольший интерес для дальнейшего анализа, так как в ней выполняется необходимое условие существования локализованных нелинейных состояний и структур — баланс эффектов нелинейности и дисперсии среды.

Разложению (1.20) соответствует следующее представление для  $P_{ij}$ :

$$P_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} P_{ij}^{(n)}. \quad (1.22)$$

Подставляя (1.22) в (1.16), (1.17) и приравнявая нулю выражения одного порядка по параметрам  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$ , получаем цепочку уравнений. Необходимые граничные условия находятся в результате разложения (1.11) по параметрам  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$ . В частности, для  $P_{33}^{(i)}$  при  $i = 0, 1$  имеем

$$\partial_\eta P_{33}^{(i)} = 0.$$

Отсюда, с учетом граничного условия

$$P_{33}^{(i)}(\eta = \pm 1/2) = 0,$$

закключаем, что

$$P_{33}^{(i)} \equiv 0.$$

Согласно (1.14) величина  $P_{33}^{(0)}$  выражается через  $\partial_\eta \bar{u}_3^{(0)}$ ,

$$P_{33}^{(0)} = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \eta_{33}} \right)^{(0)} = (\lambda + 2\mu) \left[ \frac{a}{d} \partial_\eta \bar{u}_3^{(0)} + \frac{1}{2} \left( \frac{a}{b} \partial_\eta \bar{u}_3^{(0)} \right)^2 \right] \equiv 0.$$

Следовательно,  $\bar{u}_3^{(0)}$  не зависит от  $\eta$ . Далее функции, не зависящие от  $\eta$ , будут отмечаться знаком « $\sim$ »:  $\bar{u}_3^{(0)} = \tilde{u}_3^{(0)}$ . Аналогичным образом нетрудно убедиться, что функция  $\bar{u}_3^{(1)}$  тоже не зависит от  $\eta$ :  $\bar{u}_3^{(1)} = \tilde{u}_3^{(1)}$ . Это упрощает дальнейшие расчеты.

Разложения для  $P_{3\alpha}$  и  $P_{\alpha 3}$  начинаются с членов первого порядка по параметрам  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$ . Уравнения теории возмущений для  $P_{\alpha 3}^{(k)}$  при  $k = 1, 2$  суть  $\partial_\eta P_{\alpha 3}^{(k)} = 0$ . С учетом граничных условий  $P_{\alpha 3}^{(k)}(\eta = \pm 1/2) = 0$  получаем  $P_{\alpha 3}^{(k)} \equiv 0$ . Выразим  $P_{\alpha 3}^{(k)}$  и  $P_{3\alpha}^{(k)}$  ( $k = 1, 2$ ) через поля смещений:

$$P_{\alpha 3}^{(k)} = P_{3\alpha}^{(k)} = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \eta_{\alpha 3}} \right)^{(k)} = \mu \eta_{\alpha 3}^{(k)} = \mu \left[ \varepsilon_1 \partial_\alpha \tilde{u}_3^{(k-1)} + \frac{a}{d} \partial_\eta \bar{u}_\alpha^{(k)} \right] \equiv 0. \quad (1.23)$$

Из (1.23) следует, что  $\eta_{\alpha 3}^{(k)} \equiv 0$ . Кроме того, интегрируя (1.23) по переменной  $\eta$ , находим компоненты продольных смещений,

$$\bar{u}_\alpha^{(k)} = -\varepsilon_2 \partial_\alpha \tilde{u}_3^{(k-1)} \eta + \tilde{u}_\alpha^{(k)}. \quad (1.24)$$

Уравнение (1.24) описывает плоские смещения пластины

$$\tilde{u}_\alpha^{(k)} = \tilde{u}_\alpha^{(k)}(\xi_1, \xi_2, \tau), \quad k = 1, 2,$$

вызванные нагрузкой на ее боковых гранях, а также продольные деформации пластины, индуцированные ее поворотами на углы  $\partial_1 \tilde{u}_3^{(k)}$  и  $\partial_2 \tilde{u}_3^{(k)}$  ( $k = 1, 2$ ) вокруг осей  $x_2$  и  $x_1$  соответственно. Функции  $\tilde{u}_\alpha^{(k)}$  возникли при интегрировании и пока произвольны. Они будут определены следующими порядками теории возмущений.

Через функции  $\tilde{u}_\alpha^{(m-1)}$  и  $\tilde{u}_3^{(m-2)}$  ( $m = 2, 3$ ) можно выразить двумерный тензор деформаций  $\eta_{\alpha\beta}^{(m)}$ :

$$\eta_{\alpha\beta}^{(m)} = \varepsilon_{\alpha\beta}^{(m)} - \varepsilon_1 \varepsilon_2 \eta \partial_\alpha \partial_\beta \tilde{u}_3^{(m-2)}, \quad m = 2, 3. \quad (1.25)$$

Тензор

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^{(m)} = (\varepsilon_1/2) \left[ \partial_\alpha \tilde{u}_\beta^{(m-1)} + \partial_\beta \tilde{u}_\alpha^{(m-1)} + \varepsilon_1 \left( \partial_\alpha \tilde{u}_3^{(\cdot)} \partial_\beta \tilde{u}_3^{(\cdot)} \right)^{(m-2)} \right]$$

описывает однородную по толщине пластины «плоскую» деформацию. Здесь и далее запись типа  $\left(\partial_\alpha \tilde{u}_3^{(\cdot)} \partial_\beta \tilde{u}_3^{(\cdot)}\right)^{(m-2)}$  подразумевает сумму всех произведений из величин  $\partial_\alpha \tilde{u}_3^{(i)}$  и  $\partial_\beta \tilde{u}_3^{(k)}$ , удовлетворяющих ограничению  $i + k = m - 2$ . В данном случае, при  $m = 2$  имеем одно слагаемое  $\partial_\alpha \tilde{u}_3^{(0)} \partial_\beta \tilde{u}_3^{(0)}$ , а при  $m = 3$  — два слагаемых:

$$\left(\partial_\alpha \tilde{u}_3^{(\cdot)} \partial_\beta \tilde{u}_3^{(\cdot)}\right)^{(1)} = \partial_\alpha \tilde{u}_3^{(1)} \partial_\beta \tilde{u}_3^{(0)} + \partial_\alpha \tilde{u}_3^{(0)} \partial_\beta \tilde{u}_3^{(1)}.$$

Уравнения для  $P_{33}^{(n)}$  при  $n = 2, 3$  также просты:  $\partial_\eta P_{33}^{(n)} = 0$ . С учетом граничных условий они приводят к утверждению, что  $P_{33}^{(n)} \equiv 0$ . Используя (1.14), выразим  $P_{33}^{(n)}$  через тензор деформаций:

$$P_{33}^{(n)} = (\partial\varphi/\partial\eta_{33})^{(n)} = (\lambda + 2\mu)\eta_{33}^{(n)} + \lambda\eta_{\alpha\alpha}^{(n)} \equiv 0.$$

В результате находим полезную для дальнейших вычислений связь между  $\eta_{33}^{(n)}$  и  $\eta_{\alpha\alpha}^{(n)}$ ,

$$\eta_{33}^{(n)} = -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}\eta_{\alpha\alpha}^{(n)}, \quad n = 2, 3. \quad (1.26)$$

Если уравнение (1.26) переписать через поля смещений, получим представление новой функции  $\partial_\eta \tilde{u}_3^{(n)}$  через предыдущие. Интегрируя это уравнение по  $\eta$ , вычислим поперечные смещения  $\bar{u}_3^{(n)}$  ( $n = 2, 3$ ):

$$\begin{aligned} \bar{u}_3^{(n)} = & -\frac{1}{\lambda + 2\mu} \left( -\frac{\lambda}{2}(\varepsilon_2\eta)^2 \Delta \tilde{u}_3^{(n-2)} + \left[ \lambda\varepsilon_2 \partial_\alpha \tilde{u}_\alpha^{(n-1)} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \varepsilon_1\varepsilon_2(\lambda + \mu) \left(\partial_\alpha \tilde{u}_3^{(\cdot)} \partial_\alpha \tilde{u}_3^{(\cdot)}\right)^{(n-2)} \right] \eta \right) + \tilde{u}_3^{(n)}. \quad (1.27) \end{aligned}$$

Здесь  $\Delta = \partial_1^2 + \partial_2^2$ ,  $\tilde{u}_3^{(n)} = \tilde{u}_3^{(n)}(\xi_1, \xi_2, \tau)$  — произвольная функция, возникшая при интегрировании. Величина  $\bar{u}_3^{(n)}$  дает коррекцию поперечного смещения пластины, обусловленную изменением кривизны ее поверхности  $\Delta \tilde{u}_3^{(0)}$ , растяжением вдоль оси  $x_3$  и изменением формы прогиба пластины  $\tilde{u}_3^{(n)}$ .

Перейдем к рассмотрению следующих уравнений теории возмущений:

$$\partial_\eta P_{\alpha\beta}^{(m)} + \varepsilon_2 \partial_\beta P_{\alpha\beta}^{(m-1)} = 0, \quad m = 3, 4. \quad (1.28)$$

В уравнениях (1.28) тензор  $P_{\alpha\beta}^{(k)}$ , ( $k = 2, 3$ ) симметричен и выражается через уже введенные функции,

$$\begin{aligned} P_{\alpha\beta}^{(k)} = & (\partial\varphi/\partial\eta_{\alpha\beta})^{(k)} = \lambda(\eta_{\gamma\gamma}^{(k)} + \eta_{33}^{(k)})\delta_{\alpha\beta} + 2\mu\eta_{\alpha\beta}^{(k)} = \\ = & -\varepsilon_1\varepsilon_2\eta \widehat{L}_{\alpha\beta} \tilde{u}_3^{(k-2)} + \sigma_{\alpha\beta}^{(k)}. \quad (1.29) \end{aligned}$$

Здесь  $\widehat{L}_{\alpha\beta} = \lambda' \Delta \delta_{\alpha\beta} + 2\mu \partial_\alpha \partial_\beta$  — дифференциальный оператор,  $\sigma_{\alpha\beta}^{(k)}$  — симметричный тензор, характеризующий плоское напряженное состояние пластины:

$$\sigma_{\alpha\beta}^{(k)} = \lambda' \varepsilon_{\gamma\gamma}^{(k)} \delta_{\alpha\beta} + 2\mu \varepsilon_{\alpha\beta}^{(k)}, \quad (1.30)$$

$\lambda' = 2\lambda\mu/(\lambda + 2\mu)$  — эффективный упругий модуль плоской деформации. Напряжения  $\sigma_{\alpha\beta}^{(k)}$  вызваны нагрузкой на боковых гранях пластины. В частности, когда на боковых гранях пластины нет нагрузок порядка  $O(\varepsilon_1^3)$ , можно положить  $\widetilde{u}_3^{(1)} = \widetilde{u}_\alpha^{(2)} = \sigma_{\alpha\beta}^{(3)} = 0$  и теория возмущений значительно упрощается.

Проинтегрируем уравнения (1.28) по  $\eta$  в пределах от  $\eta = 0$  до некоторого значения  $\eta$  ( $|\eta| \leq 1/2$ ):

$$P_{\alpha 3}^{(m)}(\eta) - P_{\alpha 3}^{(m)}(\eta = 0) - \frac{\lambda' + 2\mu}{2} \varepsilon_1 (\varepsilon_2 \eta)^2 \Delta \partial_\alpha \widetilde{u}_3^{(m-3)} + \\ + \varepsilon_2 \eta \partial_\beta \sigma_{\alpha\beta}^{(m-1)} = 0, \quad m = 3, 4. \quad (1.31)$$

В соотношениях (1.31) указана явно лишь зависимость от переменной  $\eta$ . Полагая в (1.31)  $\eta = \pm 1/2$  и учитывая граничные условия  $P_{\alpha 3}^{(m)}(\eta = \pm 1/2) = 0$ , получаем систему, из которой находим  $P_{\alpha 3}^{(m)}(\eta = 0)$  и дифференциальные уравнения, связывающие функции  $\widetilde{u}_\alpha^{(m-2)}$  и  $\widetilde{u}_3^{(m-3)}$ :

$$P_{\alpha 3}^{(m)}(\eta = 0) = \frac{\lambda' + 2\mu}{8} \varepsilon_1 \varepsilon_2^2 \Delta \partial_\alpha \widetilde{u}_3^{(m-3)}, \quad (1.32)$$

$$\partial_\beta \sigma_{\alpha\beta}^{(m-1)} = 0, \quad m = 3, 4. \quad (1.33)$$

Возвращаясь от (1.32), (1.33) к (1.31), находим также явное выражение для  $P_{\alpha 3}^{(m)}(\eta)$ :

$$P_{\alpha 3}^{(m)}(\eta) = \frac{\lambda' + 2\mu}{2} \varepsilon_1 \varepsilon_2^2 \left( \eta^2 - \frac{1}{4} \right) \Delta \partial_\alpha \widetilde{u}_3^{(m-3)}; \quad m = 3, 4. \quad (1.34)$$

С другой стороны, при  $m = 3, 4$  для  $P_{\alpha 3}^{(m)}$  по определению (1.14) имеем

$$P_{\alpha 3}^{(m)} = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \eta_{\alpha 3}} \right)^{(m)} = 2\mu \eta_{\alpha 3}^{(m)} = \mu \left\{ \varepsilon_1 \partial_\alpha \bar{u}_3^{(m-1)} + \frac{a}{d} \partial_\eta \bar{u}_\alpha^{(m)} + \right. \\ \left. + \frac{a}{d} \varepsilon_1 \left[ \left( \partial_\alpha \bar{u}_\gamma^{(\cdot)} \partial_\eta \bar{u}_\gamma^{(\cdot)} \right)^{(m-1)} + \left( \partial_\alpha \bar{u}_3^{(\cdot)} \partial_\eta \bar{u}_3^{(\cdot)} \right)^{(m-1)} \right] \right\}. \quad (1.35)$$

Заметим, что в правой части (1.35) нам уже известны все слагаемые, кроме  $(a/d) \partial_\eta \bar{u}_\alpha^{(m)}$ . Поэтому, объединяя (1.34), (1.35), можно не только найти тензор деформации  $\eta_{\alpha 3}^{(m)}$ , но и вычислить продольные смещения:



$$\begin{aligned}
\frac{a}{d}\tilde{u}_\alpha^{(m)} &= \varepsilon_2^2 \varepsilon_1 \left[ \left(1 + \frac{\lambda'}{4\mu}\right) \frac{\eta^3}{3} - \frac{\lambda' + 2\mu}{8\mu} \eta \right] \Delta \partial_\alpha \tilde{u}_3^{(m-3)} + \\
&\quad + \frac{\varepsilon_2 \lambda' \eta^2}{4\mu} \left[ \partial_\alpha \varepsilon_{\gamma\gamma}^{(m-1)} - \varepsilon_1^2 \partial_\alpha \tilde{u}_3^{(m-3)} \Delta \tilde{u}_3^{(0)} \right] + \\
&\quad + \varepsilon_1 \eta \left[ -\partial_\alpha \tilde{u}_3^{(m-1)} + \varepsilon_1 \left( \partial_\alpha \tilde{u}_\gamma^{(\cdot)} \partial_\gamma \tilde{u}_3^{(\cdot)} \right)^{(m-2)} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\lambda'}{2\mu} \partial_\alpha \tilde{u}_3^{(m-3)} \varepsilon_{\gamma\gamma}^{(2)} + \frac{\varepsilon_1^2}{2} \partial_\alpha \tilde{u}_3^{(m-3)} \left( \partial_\gamma \tilde{u}_3^{(0)} \right)^2 \right] + \frac{a}{d} \tilde{u}_\alpha^{(m)}, \quad m = 3, 4.
\end{aligned} \tag{1.36}$$

Здесь  $\tilde{u}_\alpha^{(m)} = \tilde{u}_\alpha^{(m)}(\xi_1, \xi_2, \tau)$  — функции, возникшие при интегрировании уравнений (1.34), (1.35).

Прежде чем перейти к анализу уравнений теории возмущений следующего порядка, обратим внимание на то обстоятельство, что при  $s = 3, 4$  компоненты  $P_{3\beta}^{(s)}$  и  $P_{\beta 3}^{(s)}$  уже не равны друг другу. Однако, согласно (1.14), они связаны между собой соотношением

$$\begin{aligned}
P_{3\beta}^{(s)} &= (\partial\varphi/\partial\eta_{3\beta})^{(s)} + \varepsilon_1 \left[ \partial_\gamma \tilde{u}_3^{(\cdot)} (\partial\varphi/\partial\eta_{\gamma\beta})^{(\cdot)} \right]^{(s-1)} = \\
&= P_{\beta 3}^{(s)} + \varepsilon_1 \left( \partial_\gamma \tilde{u}_3^{(\cdot)} P_{\gamma\beta}^{(\cdot)} \right)^{(s-1)}. \tag{1.37}
\end{aligned}$$

Поскольку величины  $P_{\beta 3}^{(s)}$  и  $P_{\gamma\beta}^{(s-1)}$  при  $s = 3, 4$  вычислены, функция  $P_{3\beta}^{(s)}$  также известна. Поэтому из уравнений теории возмущений

$$d\rho_0 P_3^{(s+1)} + \varepsilon_2 \partial_\beta P_{3\beta}^{(s)} + \partial_\eta P_{33}^{(s+1)} = \mu \varepsilon_1 \varepsilon_2 \partial_\tau^2 \tilde{u}_3^{(s-3)} \tag{1.38}$$

можно найти  $P_{33}^{(s+1)}$  при  $s = 3, 4$ . При интегрировании по  $\eta$  уравнений (1.38) следует учесть ненулевые граничные условия на поверхности пластины (см. (1.11), (1.18)),

$$P_{33}^{(s+1)} \Big|_{\eta=\pm 1/2} = [T_{33}^{\text{ext}}]^{(s+1)}, \tag{1.39}$$

и массовые силы, если они имеются. Схема интегрирования уравнения (1.38) не отличается от рассмотренной на примере уравнения (1.28).

В результате простых вычислений находим  $P_{33}^{(n)}(\eta)$  и уравнение эволюции для поперечных смещений пластины  $\tilde{u}_3^{(n-4)}$  ( $n = 4, 5$ ):

$$\begin{aligned}
P_{33}^{(n)} &= \frac{d}{2} \rho_0 \int_{-1/2}^{1/2} \text{sign}(\eta' - \eta) P_3^{(n)}(\eta') d\eta' + \left( \eta P_{33}^{(n)} \right) \Big| + \\
&\quad + \frac{(\varepsilon_1 \varepsilon_2)^2}{2} \left( \eta^2 - \frac{1}{4} \right) \partial_\alpha \left\{ \lambda' \left[ \partial_\alpha \tilde{u}_3^{(\cdot)} \Delta \tilde{u}_3^{(\cdot)} \right]^{(n-4)} + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \mu \partial_\alpha \left[ \partial_\gamma \tilde{u}_3^{(\cdot)} \partial_\gamma \tilde{u}_3^{(\cdot)} \right]^{(n-4)} \Big\} + \\
& + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \eta \left[ \mu \partial_{\tau_1}^2 \tilde{u}_3^{(n-4)} - \partial_\alpha \left\{ \partial_\gamma \tilde{u}_3^{(\cdot)} \sigma_{\gamma\alpha}^{(\cdot)} \right\}^{(n-2)} \right] - \\
& - \frac{\lambda' + 2\mu}{2} \varepsilon_1 \varepsilon_2^3 \left( \frac{\eta^3}{3} - \frac{\eta}{4} \right) \Delta^2 \tilde{u}_3^{(n-4)}; \quad (1.40)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu \varepsilon_1 \varepsilon_2 \partial_{\tau_1}^2 \tilde{u}_3^{(n-4)} &= \rho_0 d \left\langle P_3^{(n)} \right\rangle + P_{33}^{(n)} \Big| - \\
& - \frac{\lambda' + 2\mu}{12} \varepsilon_1 \varepsilon_2^3 \Delta^2 \tilde{u}_3^{(n-4)} + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \partial_\beta \left[ \partial_\gamma \tilde{u}_3^{(\cdot)} \sigma_{\gamma\beta}^{(\cdot)} \right]^{(n-2)}. \quad (1.41)
\end{aligned}$$

Здесь и далее для сокращения записи введены обозначения

$$\langle f \rangle = \int_{-1/2}^{1/2} f(\eta) d\eta, \quad f \Big| = f(\eta = 1/2) - f(\eta = -1/2). \quad (1.42)$$

В статическом случае ( $\partial_{\tau_1}^2 \tilde{u}_3^{(0)} = 0$ ) при отсутствии на боковых гранях пластины нагрузок порядка  $O(\varepsilon_1^3)$  уравнения (1.33) ( $m = 3$ ) и (1.41) ( $n = 4$ ) образуют замкнутую систему, совпадающую с уравнениями Фёппля–Кармана [1, 46], которые обычно выводятся из условий равновесия при использовании геометрических гипотез. Такое приближение учитывает только геометрическую нелинейность среды и недостаточно для изучения нелинейной динамики пластин. Действительно, вследствие (1.33) ( $m = 3$ ), последний член в уравнении (1.41) ( $n = 4$ ) может быть записан в форме

$$\varepsilon_1 \varepsilon_2 \partial_\beta \left[ \partial_\alpha \tilde{u}_3^{(0)} \sigma_{\alpha\beta}^{(2)} \right] = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \partial_\alpha \partial_\beta \tilde{u}_3^{(0)} \sigma_{\alpha\beta}^{(2)} + o(\varepsilon_1^4).$$

В результате нелинейное уравнение (1.41) становится близким к линейному, а в случае одномерных деформаций, с учетом (1.33), редуцируется к линейному уравнению. Предполагается, что нелинейная динамика тонких пластин полностью проявится только в следующих порядках теории возмущений. Подчеркнем, что эта динамика будет обусловлена не только геометрической, но и физической нелинейностью среды. Физическая нелинейность среды характеризуется инвариантами третьего и более высоких порядков в разложении упругой энергии (1.4). Перейдем к рассмотрению уравнений теории возмущений 5-го и 6-го порядков по параметрам  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$ , чтобы выйти за рамки «квазилинейного» приближения (1.33), (1.41). Эти вычисления более утомительны, но осуществляются по прежней схеме. Перечислим ключевые моменты.

Прежде всего, отметим важное следствие алгебраической структуры решения (1.20). Нелинейные члены в уравнениях теории возмущений 5-го и 6-го порядков не зависят от инвариантов  $\varphi_{n \geq 4}$  в разложении упругой энергии (1.4).

Согласно определению (1.14) величина  $P_{33}^{(4)}$  может быть выражена через компоненты тензоров  $\eta_{ij}^{(4)}$  и  $\eta_{ij}^{(2)}$  и функцию  $P_{\alpha 3}^{(3)}$ :

$$\begin{aligned} P_{33}^{(4)} &= \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial \eta_{33}} \right]^{(4)} + \varepsilon_1 \partial_\alpha \tilde{u}_3^{(0)} \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial \eta_{\alpha 3}} \right]^{(3)} = \\ &= \lambda \eta_{\gamma\gamma}^{(4)} + (\lambda + 2\mu) \eta_{33}^{(4)} + B(\eta_{\alpha\gamma}^{(2)})^2 + \left( \frac{\eta_{\alpha\alpha}^{(2)}}{\lambda + 2\mu} \right)^2 \times \\ &\quad \times [\lambda(\lambda - 4\mu)B + 4\mu^2 C + \lambda^2 A] + \varepsilon_1 \partial_\alpha \tilde{u}_3^{(0)} P_{\alpha 3}^{(3)}. \end{aligned} \quad (1.43)$$

В (1.43) использовалась связь (1.26). Можно заметить, что из компонент тензора  $\eta_{ij}^{(4)}$  нам пока известны только  $\eta_{\alpha\beta}^{(4)}$ :

$$\eta_{\alpha\beta}^{(4)} = \frac{\varepsilon_1}{2} \left[ \partial_\beta \bar{u}_\alpha^{(3)} + \partial_\alpha \bar{u}_\beta^{(3)} + \varepsilon_1 \partial_\alpha \bar{u}_\gamma^{(1)} \partial_\beta \bar{u}_\gamma^{(1)} + \varepsilon_1 \left( \partial_\alpha \bar{u}_3^{(\cdot)} \partial_\beta \bar{u}_3^{(\cdot)} \right)^{(2)} \right].$$

Или в более подробной форме записи:

$$\begin{aligned} \eta_{\alpha\beta}^{(4)} &= \varepsilon_{\alpha\beta}^{(4)} + (\varepsilon_2 \eta)^2 \left[ \frac{\lambda'}{4\mu} \partial_\alpha \partial_\beta \varepsilon_{\gamma\gamma}^{(2)} + \frac{\varepsilon_1^2}{2} \left( 1 - \frac{\lambda'}{2\mu} \right) \partial_\alpha \partial_\beta \tilde{u}_3^{(0)} \Delta \tilde{u}_3^{(0)} + \right. \\ &\quad \left. + \delta_{\alpha\beta} \frac{\varepsilon_1^2}{4} \left\{ \left( \partial_\sigma \partial_\gamma \tilde{u}_3^{(0)} \right)^2 - \left( \Delta \tilde{u}_3^{(0)} \right)^2 \right\} \right] + \\ &\quad + \varepsilon_1 \varepsilon_2^3 \left[ \left( 1 + \frac{\lambda'}{4\mu} \right) \frac{\eta^3}{3} - \frac{\lambda' + 2\mu}{8\mu} \eta \right] \Delta \partial_\beta \partial_\alpha \tilde{u}_3^{(0)} + \\ &\quad + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \eta \left[ - \partial_\alpha \partial_\beta \tilde{u}_3^{(2)} + \varepsilon_1 \partial_\alpha \partial_\beta \tilde{u}_\gamma^{(1)} \partial_\gamma \tilde{u}_3^{(0)} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\lambda'}{2\mu} \partial_\alpha \partial_\beta \tilde{u}_3^{(0)} \varepsilon_{\gamma\gamma}^{(2)} + \frac{\varepsilon_1^2}{2} \partial_\alpha \partial_\beta \tilde{u}_3^{(0)} \left( \partial_\gamma \tilde{u}_3^{(0)} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (1.44)$$

В соотношении (1.44)

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^{(4)} = \frac{\varepsilon_1}{2} \left\{ \partial_\alpha \tilde{u}_\beta^{(3)} + \partial_\beta \tilde{u}_\alpha^{(3)} + \varepsilon_1 \partial_\alpha \tilde{u}_\gamma^{(1)} \partial_\beta \tilde{u}_\gamma^{(1)} + \varepsilon_1 \left( \partial_\alpha \tilde{u}_3^{(\cdot)} \partial_\beta \tilde{u}_3^{(\cdot)} \right)^{(2)} \right\} \quad (1.45)$$

есть однородная по толщине пластины часть тензора плоской деформации. Здесь и далее произведения симметричных  $(2 \times 2)$ -матриц  $c_{\alpha\beta}$  и  $b_{\alpha\beta}$  преобразуются в сумму независимых произведений с помощью тождества

$$c_{\alpha\gamma} b_{\gamma\beta} + b_{\alpha\gamma} c_{\gamma\beta} = (b_{\sigma\gamma} c_{\sigma\gamma} - b_{\gamma\gamma} c_{\sigma\sigma}) \delta_{\alpha\beta} + c_{\gamma\gamma} b_{\alpha\beta} + b_{\gamma\gamma} c_{\alpha\beta}.$$

Функция  $P_{33}^{(4)}$  нами была вычислена (1.40). Поэтому из соотношения (1.43) можно выразить  $(\partial\varphi/\partial\eta_{33})^{(4)}$  и компоненту  $\eta_{33}^{(4)}$  через известные величины.

Важно, что в необходимые нам далее уравнения 5-го и 6-го порядков теории возмущений входят лишь компонента  $\eta_{33}^{(4)}$  и другие уже найденные функции. Поэтому можно избежать вычисления поля  $\bar{u}_3^{(4)}$ . В частности, для вычисления тензоров  $P_{\alpha\beta}^{(4)}$  и  $(\partial\varphi/\partial\eta_{\alpha\beta})^{(4)}$  можно вывести следующую формулу:

$$\begin{aligned} P_{\alpha\beta}^{(4)} &= \left[ \frac{\partial\varphi}{\partial\eta_{\alpha\beta}} \right]^{(4)} - \varepsilon_1 \partial_\alpha \tilde{u}_3^{(0)} P_{\beta 3}^{(3)} + \varepsilon_1 \partial_\gamma \bar{u}_\alpha^{(1)} P_{\gamma\beta}^{(2)} = \\ &= \left\{ \lambda' \eta_{\gamma\gamma}^{(4)} + \frac{\lambda'}{2\mu} \left[ P_{33}^{(4)} - \varepsilon_1 \partial_\gamma \tilde{u}_3^{(0)} P_{\gamma 3}^{(3)} \right] + a_1 \left( \eta_{\mu\nu}^{(2)} \right)^2 + \right. \\ &\left. + a_2 \left( \eta_{\gamma\gamma}^{(2)} \right)^2 \right\} \delta_{\alpha\beta} + 2\mu \eta_{\alpha\beta}^{(4)} + 2a_1 \eta_{\gamma\gamma}^{(2)} \eta_{\alpha\beta}^{(2)} - \varepsilon_1 \partial_\alpha \tilde{u}_3^{(0)} P_{\beta 3}^{(3)} + \varepsilon_1 \partial_\gamma \bar{u}_\alpha^{(1)} P_{\gamma\beta}^{(2)}, \end{aligned} \quad (1.46)$$

где

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{A}{2} + \frac{2\mu B}{\lambda + 2\mu}, \\ a_2 &= \frac{1}{(\lambda + 2\mu)^3} [-\lambda^3 A + 6\mu\lambda^2 B + 8\mu^3 C] - \frac{A}{2}. \end{aligned} \quad (1.47)$$

Рассмотрим уравнения теории возмущений, содержащие  $P_{\alpha 3}^{(5)}$ :

$$\mu \varepsilon_1 \varepsilon_2 \partial_{\tau_1}^2 \bar{u}_\alpha^{(1)} = \rho_0 d P_\alpha^{(5)} + \varepsilon_2 \partial_\beta P_{\alpha\beta}^{(4)} + \partial_\eta P_{\alpha 3}^{(5)}. \quad (1.48)$$

Здесь  $P_\alpha^{(5)}$  — массовые силы. При интегрировании по  $\eta$  уравнений (1.48) учитываем следующие граничные условия на поверхности пластины при  $\eta = \pm 1/2$  (см. (1.11), (1.18)):

$$P_{\alpha 3}^{(5)} \Big|_{\eta=\pm 1/2} = [T_{\alpha 3}^{\text{ext}}]^{(5)}. \quad (1.49)$$

В результате вычислений, аналогичных уже проделанным, из (1.48) найдем динамические уравнения для продольных деформаций пластины и явные выражения для  $P_{\alpha 3}^{(5)}$ . Динамические уравнения имеют вид

$$\mu \varepsilon_1 \varepsilon_2 \partial_{\tau_1}^2 \tilde{u}_\alpha^{(1)} = F_\alpha^{(5)} + \varepsilon_2 \partial_\beta \sigma_{\alpha\beta}^{(4)} + \frac{\varepsilon_2^3 \lambda' (\lambda' + 2\mu)}{48\mu} \Delta \partial_\alpha \varepsilon_{\gamma\gamma}^{(2)} + \varepsilon_2 \partial_\beta \Pi_{\alpha\beta}^{(4)}. \quad (1.50)$$

Здесь

$$\sigma_{\alpha\beta}^{(n)} = \delta_{\alpha\beta} \lambda' \varepsilon_{\gamma\gamma}^{(n)} + 2\mu \varepsilon_{\alpha\beta}^{(n)}, \quad n = 2, 4.$$

С внешним нагружением пластины связаны эффективные продольные силы

$$F_\alpha^{(5)} = \frac{\varepsilon_2 \lambda'}{2\mu} \partial_\alpha \left[ d\rho_0 \langle P_3^{(4)} \eta \rangle + \left( \eta P_{33}^{(4)} \right) \right] + P_{\alpha 3}^{(5)} \Big| + d\rho_0 \langle P_\alpha^{(5)} \rangle. \quad (1.51)$$

Интересно, что неоднородное поперечное нагружение пластины поверхностными и массовыми силами порождают эффективную продольную силу (первое слагаемое в (1.51)). Тензор  $\Pi_{\alpha\beta}^{(4)}$  имеет вид

$$\begin{aligned} \Pi_{\alpha\beta}^{(4)} = & \left[ a_1 \left( \varepsilon_{\alpha\beta}^{(2)} \right)^2 + a_2 \left( \varepsilon_{\gamma\gamma}^{(2)} \right)^2 + b_1 \left( \varepsilon_1 \varepsilon_2 \partial_\nu \partial_\mu \tilde{u}_3^{(0)} \right)^2 + \right. \\ & \left. + b_2 \left( \varepsilon_1 \varepsilon_2 \Delta \tilde{u}_3^{(0)} \right)^2 \right] \delta_{\alpha\beta} + 2a_1 \varepsilon_{\gamma\gamma}^{(2)} \varepsilon_{\alpha\beta}^{(2)} + c (\varepsilon_1 \varepsilon_2)^2 \Delta \tilde{u}_3^{(0)} \times \\ & \times \partial_\alpha \partial_\beta \tilde{u}_3^{(0)} + \frac{\lambda' + 2\mu}{12} (\varepsilon_1 \varepsilon_2)^2 \partial_\alpha \tilde{u}_3^{(0)} \Delta \partial_\beta \tilde{u}_3^{(0)} + \varepsilon_1 \partial_\gamma \tilde{u}_\alpha^{(1)} \sigma_{\gamma\beta}^{(2)}, \quad (1.52) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} b_1 = \frac{1}{24} [2a_1 + 3\mu - \lambda'], \quad b_2 = \frac{a_2}{12} - \frac{1}{8} \left[ \mu + \frac{(\lambda')^2}{2\mu} \right], \\ c = \frac{1}{6} \left[ a_1 + \frac{\lambda' + 6\mu}{8} \right]. \end{aligned}$$

В соотношении (1.52) нелинейные члены, зависящие от  $\varepsilon_{\alpha\beta}^{(2)}$ , отражают взаимодействие продольных деформаций пластины. В то же самое время слагаемые, зависящие от  $\tilde{u}_3^{(0)}$ , индуцированы поперечными изгибами пластины, ее кручениями и кривизной.

Для компоненты  $P_{\alpha 3}^{(5)}$  получаем следующее выражение:

$$\begin{aligned} P_{\alpha 3}^{(5)} = & \eta P_{\alpha 3}^{(5)} \Big| + \frac{\mu \varepsilon_1 \varepsilon_2^2}{2} \left( \frac{1}{4} - \eta^2 \right) \partial_{\tau_1}^2 \partial_\alpha \tilde{u}_3^{(0)} + \\ & + \varepsilon_2 \partial_\beta \int_\eta^{1/2} \left[ P_{\alpha\beta}^{(4)} \right]^{\text{odd}} d\eta' + d\rho_0 \int_\eta^{1/2} \left[ P_\alpha^{(5)} \right]^{\text{odd}} d\eta' + \\ & + \mu \varepsilon_1 \varepsilon_2 \eta \partial_{\tau_1}^2 \tilde{u}_\alpha^{(1)} - \varepsilon_2 \partial_\beta \int_0^\eta \left[ P_{\alpha\beta}^{(4)} \right]^{\text{even}} d\eta' - d\rho_0 \int_0^\eta \left[ P_\alpha^{(5)} \right]^{\text{even}} d\eta', \quad (1.53) \end{aligned}$$

где

$$f^{\text{odd}}(\eta) = 1/2[f(\eta) - f(-\eta)], \quad f^{\text{even}}(\eta) = 1/2[f(\eta) + f(-\eta)].$$

Как и прежде, функция  $P_{3\alpha}^{(5)}$  выражается через уже найденные комбинации (1.29), (1.34), (1.43), (1.46), (1.53) :

$$P_{3\alpha}^{(5)} = P_{\alpha 3}^{(5)} + \varepsilon_1 \left[ \partial_\beta \tilde{u}_3^{(\cdot)} (\partial\varphi/\partial\eta_{\alpha\beta})^{(\cdot)} \right]^{(4)} + \\ + \varepsilon_1 \partial_\alpha \tilde{u}_3^{(0)} (\partial\varphi/\partial\eta_{33})^{(4)} - \varepsilon_1 \partial_\beta \bar{u}_\alpha^{(1)} P_{\beta 3}^{(3)} + (a/d) \partial_\eta \bar{u}_3^{(2)} P_{\alpha 3}^{(3)}. \quad (1.54)$$

Рассмотрим уравнение 6-го порядка теории возмущений

$$\mu \varepsilon_1 \varepsilon_2 \partial_{\tau_1}^2 \bar{u}_3^{(2)} = \partial_\eta P_{33}^{(6)} + \varepsilon_2 \partial_\alpha P_{3\alpha}^{(5)} + d\rho_0 P_3^{(6)}. \quad (1.55)$$

Граничные условия на поверхности пластины при  $\eta = \pm 1/2$ ,

$$P_{33}^{(6)} \Big|_{\eta=\pm 1/2} = \left\{ [T_{33}^{\text{ext}}]^{(6)} + [T_{33}^{\text{ext}}]^{(4)} \varepsilon_1 \partial_\alpha \bar{u}_\alpha^{(1)} - \right. \\ \left. - [T_{3\alpha}^{\text{ext}}]^{(5)} \varepsilon_1 \partial_\alpha \tilde{u}_3^{(0)} \right\} \Big|_{\eta=\pm 1/2}, \quad (1.56)$$

следуют из разложения (1.11) с точностью до 6-го порядка по параметрам  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ . При получении (1.56) использовалась формула

$$[\mathbf{E} + \mathbf{A}]^{-1} = \mathbf{E} - \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 - \dots,$$

где  $\mathbf{E}$  — единичная матрица,  $A_{ij} = \partial u_i / \partial x_j$ ,  $\max |A_{ij}| \ll 1$ . Для дальнейшего рассмотрения из (1.55) необходимо вывести только динамическое уравнение для  $\tilde{u}_3^{(2)}$ . Поэтому упростим прежнюю схему вычислений.

Проинтегрируем (1.55) по  $\eta$  в пределах  $|\eta| \leq 1/2$ . Зависимость от  $\eta$  величины  $\bar{u}_3^{(2)}$  была найдена (1.27). Функция  $P_{3\alpha}^{(5)}$  определяется через известные величины с помощью соотношения (1.54). Заметим, что выражение для  $P_{3\alpha}^{(5)}$  содержит слагаемые четные и нечетные по переменной  $\eta$ . Можно ограничиться вычислением четной по  $\eta$  части функции  $P_{3\alpha}^{(5)}$ , поскольку нечетная часть  $P_{3\alpha}^{(5)}$  обращается в нуль после интегрирования по  $\eta$ . Можно также избежать вычисления функции  $P_{33}^{(6)}$ , поскольку потребуются только ее граничные значения (1.56). В результате простых, но утомительных вычислений получаем следующее динамическое уравнение для поправки  $\tilde{u}_3^{(2)}$ :

$$\mu \varepsilon_1 \varepsilon_2 \left[ \partial_{\tau_1}^2 \tilde{u}_3^{(2)} - \frac{\varepsilon_2^2}{12} \left( 1 - \frac{\lambda'}{2\mu} \right) \partial_{\tau_1}^2 \Delta \tilde{u}_3^{(0)} \right] = \\ = q^{(6)} - \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2^3}{12} (\lambda' + 2\mu) \varepsilon_1 \varepsilon_2^3 \Delta^2 \tilde{u}_3^{(2)} + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \partial_\alpha \left[ \partial_\beta \tilde{u}_3^{(\cdot)} \sigma_{\alpha\beta}^{(\cdot)} \right]^{(4)} - \\ - \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2^5}{12} (\lambda' + 2\mu) \left[ \frac{1}{5} + \frac{\lambda'}{8\mu} \right] \Delta^3 \tilde{u}_3^{(0)} + \varepsilon_2 \partial_\alpha \Pi_\alpha^{(5)}. \quad (1.57)$$

Здесь  $q^{(6)}$  — эффективное двумерное поле внешних сил, приводящих к поперечным изгибам пластины:

$$\begin{aligned}
q^{(6)} = \varepsilon_2 \partial_\alpha \left\{ \left( \eta P_{\alpha 3}^{(5)} \right) \Big| + d\rho_0 \left\langle \eta P_\alpha^{(5)} \right\rangle + \left( 1 + \frac{\lambda'}{2\mu} \right) \times \right. \\
\left. \times \varepsilon_1 \partial_\alpha \tilde{u}_3^{(0)} \left[ \left( \eta P_{33}^{(4)} \right) \Big| + d\rho_0 \left\langle \eta P_3^{(4)} \right\rangle \right] \right\} + \\
+ \frac{\varepsilon_2^2 \lambda'}{4\mu} \Delta \left\{ \left( \eta^2 P_{33}^{(4)} \right) \Big| + d\rho_0 \left\langle \eta^2 P_3^{(4)} \right\rangle \right\} + P_{33}^{(6)} \Big| + d\rho_0 \left\langle P_3^{(6)} \right\rangle. \quad (1.58)
\end{aligned}$$

Величина  $\Pi_\alpha^{(5)}$  учитывает эффекты нелинейной дисперсии, а также взаимодействие неоднородных кручений, искривлений и изгибов пластины друг с другом и с ее продольными деформациями:

$$\begin{aligned}
\Pi_\alpha^{(5)} = \varepsilon_1 \varepsilon_2^2 \partial_\beta \left\{ \frac{\varepsilon_1}{12} \left[ \partial_\gamma \tilde{u}_3^{(0)} \widehat{L}_{\alpha\beta} \tilde{u}_\gamma^{(1)} + \varepsilon_1 \left( \partial_\gamma \tilde{u}_3^{(0)} \right)^2 \widehat{L}_{\alpha\beta} \tilde{u}_3^{(0)} \right] - \right. \\
- 2\tilde{b}_1 \varepsilon_{\gamma\gamma}^{(2)} \partial_\beta \partial_\alpha \tilde{u}_3^{(0)} - \tilde{c} \varepsilon_{\alpha\beta}^{(2)} \Delta \tilde{u}_3^{(0)} \left. \right\} - \varepsilon_1 \varepsilon_2^2 \partial_\alpha \left\{ 2\tilde{b}_2 \varepsilon_{\gamma\gamma}^{(2)} \Delta \tilde{u}_3^{(0)} + \right. \\
+ \tilde{c} \varepsilon_{\gamma\sigma}^{(2)} \partial_\gamma \partial_\sigma \tilde{u}_3^{(0)} \left. \right\} + \varepsilon_1 \partial_\alpha \tilde{u}_3^{(0)} \left\{ \left[ \tilde{b}_1 \left( \partial_\gamma \partial_\sigma \tilde{u}_3^{(0)} \right)^2 + \tilde{b}_2 \left( \Delta \tilde{u}_3^{(0)} \right)^2 - \right. \right. \\
- \left. \frac{1}{12} \left( \partial_\sigma \partial_\gamma \tilde{u}_3^{(0)} \right) \widehat{L}_{\sigma\gamma} \tilde{u}_3^{(0)} \right] \left( \varepsilon_1 \varepsilon_2 \right)^2 + a_1 \left( \varepsilon_{\gamma\sigma}^{(2)} \right)^2 + a_2 \left( \varepsilon_{\gamma\gamma}^{(2)} \right)^2 \left. \right\} + \\
+ \varepsilon_1 \partial_\beta \tilde{u}_3^{(0)} \left\{ \frac{\varepsilon_2^2 \lambda'}{48\mu} \widehat{L}_{\alpha\beta} \varepsilon_{\gamma\gamma}^{(2)} + 2a_1 \varepsilon_{\gamma\gamma}^{(2)} \varepsilon_{\alpha\beta}^{(2)} + \right. \\
\left. + \left( \varepsilon_1 \varepsilon_2 \right)^2 \tilde{c} \partial_\beta \partial_\alpha \tilde{u}_3^{(0)} \Delta \tilde{u}_3^{(0)} \right\} - \frac{\left( \varepsilon_1 \varepsilon_2 \right)^2}{12} \partial_\beta \partial_\gamma \tilde{u}_3^{(0)} \widehat{L}_{\gamma\beta} \tilde{u}_\alpha^{(1)}, \quad (1.59)
\end{aligned}$$

где

$$\tilde{b}_1 = b_1 - \frac{\mu}{12}, \quad \tilde{b}_2 = b_2 + \frac{\mu}{12}, \quad \tilde{c} = c - \frac{\lambda' + 2\mu}{12}.$$

Отметим, что второе слагаемое в левой части уравнения (1.57) учитывает изменение инерционных свойств пластины, обусловленное локальными изменениями ее кривизны.

Полученные результаты можно объединить и построить результирующую систему (2+1)-мерных уравнений для тонких пластинок, изгиб которых сравним с их толщиной. Эти уравнения определяют полные продольные и поперечные смещения пластины  $v_\alpha = \tilde{u}_\alpha^{(1)} + \tilde{u}_\alpha^{(2)} + \tilde{u}_\alpha^{(3)}$  и  $v_3 = \tilde{u}_3^{(0)} + \tilde{u}_3^{(1)} + \tilde{u}_3^{(2)}$ . Комбинируя приближения (1.33) и (1.50), (1.41) и (1.57), нетрудно убедиться, что (с точностью до слагаемых 6-го порядка по параметрам  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  включительно) уравнения эволюции полей  $v_\alpha$  и  $v_3$  суть

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 \varepsilon_2 \mu \partial_{\pi_1}^2 v_\alpha = F_\alpha^{(5)} + \varepsilon_2 \partial_\beta \sigma_{\alpha\beta} + \frac{\varepsilon_2^3 \lambda' (\lambda' + 2\mu)}{48\mu} \Delta \partial_\alpha \varepsilon_{\gamma\gamma}^{(2)} + \Pi_{\alpha\beta}^{(4)}, \quad (1.60) \\
\varepsilon_1 \varepsilon_2 \mu \left[ \partial_{\pi_1}^2 v_3 - \frac{\varepsilon_2^2}{12} \left( 1 - \frac{\lambda'}{2\mu} \right) \partial_{\pi_1}^2 \Delta v_3 \right] =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= q^{\text{eff}} - \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2^3}{12} (\lambda' + 2\mu) \Delta^2 v_3 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \partial_\beta [\partial_\alpha v_3 \sigma_{\alpha\beta}] - \\
&\quad - \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2^5}{12} (\lambda' + 2\mu) \left[ \frac{1}{5} + \frac{\lambda'}{8\mu} \right] \Delta^3 v_3 + \varepsilon_2 \partial_\alpha \Pi_\alpha^{(5)}. \quad (1.61)
\end{aligned}$$

Здесь введены двумерные деформации и напряжения

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{\alpha\beta} &= \frac{\varepsilon_1}{2} [\partial_\alpha v_\beta + \partial_\beta v_\alpha + \varepsilon_1 \partial_\alpha v_\gamma \partial_\beta v_\gamma + \varepsilon_1 \partial_\alpha v_3 \partial_\beta v_3], \\
\sigma_{\alpha\beta} &= \lambda' \varepsilon_{\gamma\gamma} \delta_{\alpha\beta} + 2\mu \varepsilon_{\alpha\beta}.
\end{aligned}$$

Эффективные двумерные силы  $q^{\text{eff}}$  имеют вид

$$q^{\text{eff}} = \left( P_{33}^{(4)} + P_{33}^{(5)} \right) \Big| + d\rho_0 \left\langle P_3^{(4)} + P_3^{(5)} \right\rangle + q^{(6)}. \quad (1.62)$$

Выражения для  $\varepsilon_{\alpha\beta}^{(2)}$ ,  $\Pi_\alpha^{(5)}$  и  $\Pi_{\alpha\beta}^{(4)}$  получены из введенных ранее формальной заменой  $\tilde{u}_\alpha^{(1)} \rightarrow v_\alpha$ ,  $\tilde{u}_3^{(0)} \rightarrow v_3$ . Замкнутая система (1.60), (1.61) является приближением, не нарушающим краевых условий на развитой поверхности пластины с точностью до членов порядка  $O(\varepsilon_1^6)$ . Полученные эффективные уравнения учитывают основные нелинейные взаимодействия в пластине. Они не редуцируются к линейным уравнениям в случае одномерных деформаций.

Заметим, что при учете соотношений (1.33) и (1.41) форма записи системы (1.60)–(1.61) может быть видоизменена. В частности, используя (1.41), можно понизить общий порядок уравнения (1.61), выразив производные  $\Delta^3 v_3$  через производные второго и четвертого порядков.

### 1.3. Эффективные граничные условия

При построении теории возмущений мы удовлетворили граничным условиям на поверхностях  $\eta = \pm 1/2$  пластины, выявили явную зависимость полей  $\bar{u}_k$  от пространственной координаты  $\eta$ . В конечном счете, от исходных (3+1)-мерных уравнений нелинейной теории упругости перешли к более простой (2+1)-мерной модели. Для полученной модели следует сформулировать эффективные краевые условия вдоль боковых сторон пластины. Предложенный вариант нелинейной теории возмущений дает приемлемый алгоритм решения и этой задачи.

Необходимые граничные условия получаются следующим образом. Подставим в вариационный принцип (1.5) выражения для полей  $\bar{u}_k^{(n)}$ , (1.24), (1.27), (1.36), найденные по теории возмущений. Выполним интегрирование в (1.5) по переменной  $\eta$ . В результате (3+1)-мерная проблема сведется к (2+1)-мерной задаче, содержащей вариации полей  $\bar{u}_k^{(n)}(\xi_1, \xi_2, \tau)$  и их производных. После выделения в (1.5) слагаемых



одного порядка малости по параметрам  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  получим уравнения

$$\delta S^{(n)} + \int_{t_0}^{t_1} \delta A^{(n)} dt' = 0, \quad n = 4, 5, 6, \dots \quad (1.63)$$

Уравнения (1.63) содержат интегрирование по контуру  $\gamma$  и плоскости  $D$  пластины. Слагаемые в (1.63) следует преобразовать так, чтобы под знаками интегралов остались независимые вариации полей  $\tilde{u}_k^{(n)}$  и их производных. Заметим, что производные вдоль контура  $\gamma$  от вариаций полей  $\tilde{u}_k$  устраняются в результате интегрирований по частям. В результате в уравнениях (1.63) появятся три группы слагаемых.

Первая группа содержит интегралы по контуру  $\gamma$  пластины от независимых вариаций полей  $\tilde{u}_k$  и их производных. Для конкретной задачи вариации на контуре  $\gamma$  могут быть либо заданы, либо произвольными. В последнем случае коэффициенты при вариациях должны обращаться в нуль. Это условие приводит к эффективным краевым условиям вдоль боковых сторон пластины.

В уравнениях (1.63) в результате интегрирований по частям вдоль  $\gamma$  появятся внеинтегральные члены. Они соответствуют значениям пространственных координат в углах пластины и должны обращаться в нуль. Этот тип граничных условий учитывает сосредоточенные нагрузки в углах пластины.

Наконец, в (1.63) останутся слагаемые, содержащие интегралы по плоскости  $D$  пластины от вариаций полей  $\tilde{u}_k$ . Коэффициенты при этих вариациях совпадают с эффективными (2+1)-мерными уравнениями упрощенной модели и, следовательно, обращаются в нуль.

Выражения для  $\delta S^{(n)}$  и работы  $\delta A^{(n)}$  внешних сил на поверхностях  $\eta = \pm 1/2$  и вдоль контура  $\gamma$  приведены в приложении А. Процедура получения граничных условий проста, но дает сложные выражения. В качестве иллюстрации общей схемы приведем выражение, определяющее граничное условие в четвертом порядке теории возмущения для прямоугольной пластины со сторонами  $2l_1, 2l_2$ :

$$\int_{t_0}^{t_1} \left( \delta \tilde{A}^{(4)} + \delta S^{(4)} \right) dt' = [\tau_{\text{ch}} l^2 d] \int_{\tau_0}^{\tau_1} d\tau' \left\{ - \oint_L R_\gamma^{(4)} e_{\beta\gamma} d\xi_\beta - \right. \\ \left. - 2\varepsilon_1 \varepsilon_2 \delta \tilde{u}_3^{(0)} \left[ \left\langle \eta [T_{12}^{\text{ext}}]^{(2)} \right\rangle + \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{12} \hat{L}_{12} \tilde{u}_3^{(0)} \right] \Big|_{\xi_1=-l_1}^{\xi_1=l_1} \Big|_{\xi_2=-l_2}^{\xi_2=l_2} \right\} = 0, \quad (1.64)$$

где

$$R_2^{(4)} = \left\{ -\varepsilon_1^2 \partial_\alpha \tilde{u}_3^{(0)} \sigma_{\alpha 2}^{(2)} + \frac{(\varepsilon_1 \varepsilon_2)^2}{12} [\partial_\alpha \widehat{L}_{\alpha 2} + \partial_1 \widehat{L}_{12}] \tilde{u}_3^{(0)} + \right. \\ \left. + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \partial_1 \left\langle \eta [T_{12}^{\text{ext}}]^{(2)} \right\rangle \right\} \delta \tilde{u}_3^{(0)} + \left\{ \left\langle [T_{\alpha 2}^{\text{ext}}]^{(2)} \right\rangle - \sigma_{\alpha 2}^{(2)} \right\} \varepsilon_1 \delta \tilde{u}_\alpha^{(1)} - \\ - \left\{ \left\langle \eta [T_{22}^{\text{ext}}]^{(2)} \right\rangle + \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{12} \widehat{L}_{22} \tilde{u}_3^{(0)} \right\} \varepsilon_1 \varepsilon_2 \delta \left( \partial_2 \tilde{u}_3^{(0)} \right),$$

а выражение для  $R_1^{(4)}$  получается из выражения для  $R_2^{(4)}$  формальной заменой свободных индексов:  $1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 1$ . Обход контура  $\gamma$  осуществляется против часовой стрелки,  $e_{\alpha\beta}$  — антисимметричный единичный тензор ( $e_{12} = 1$ ). Нетрудно проверить, что в частных случаях соотношение (1.64) приводит к краевым условиям, которые совпадают с известными в «квазилинейной» теории пластин [1, 44, 46].

При выводе граничных условий для уравнений высших порядков теории возмущений необходимо учитывать уравнения и граничные условия, полученные в предыдущих порядках теории возмущений. Это дает связи между неизвестными полями и их вариациями и позволяет найти самосогласованные граничные условия для эффективной (2+1)-модели. В следующем разделе эту процедура проиллюстрирована на простом примере.

Заметим также, что уравнения теории возмущений содержат малые параметры при старших производных по координатам  $\xi_\alpha$  от полей смещений. Это означает, что теорию возмущения следует модифицировать при рассмотрении нелинейно-упругой динамики в узком слое материала вблизи краев пластины. В то же время для теоретического описания динамических деформаций в центральной части пластины, как известно [26], достаточно знать интегральные характеристики точных краевых условий. Предполагается, что изложенный подход дает эффективные граничные условия, пригодные для изучения динамики сильных продольных и поперечных деформаций в центральной части пластины.

#### 1.4. Авторезонансные колебания пластины

Рассмотрим пластину конечных размеров, нагруженную внешними силами вдоль оси  $x_1$ ,

$$T_{11}^{\text{ext}} \Big|_{\xi_1 = \pm l_1} = O(\varepsilon_1^2) + O(\varepsilon_1^4).$$

Для простоты считаем, что на боковых гранях пластины отсутствуют напряжения  $T_{11}^{\text{ext}}$  порядка  $O(\varepsilon_1^3)$ . При  $\xi_1 = \pm l_1$  примем условия шарнирного опирания сторон пластины. Предположим, что при  $\xi_2 = \pm l_2$  смещения пластины ограничены связями в направлении  $x_2$ , которые допускают смещения пластин только в направлениях  $x_1$  и  $x_3$ . В этом случае  $v_1 = v_1(\xi_1)$ ,  $v_3 = v_3(\xi_1)$ ,  $v_2 = 0$  и задача упрощается. Хотя экспериментальная реализация такой ситуации, по-видимому,

затруднительна, тем не менее, ее рассмотрение полезно. Этот пример иллюстрирует недостаточность приближения Фёппля–Кармана [1, 46] и содержит особенности, которые могут встретиться в более сложных случаях. Пусть постоянное напряжение  $T_{11}^{\text{ext}}$  близко к значению  $T_{11}^{\text{lin}}$ , при котором, согласно линейной теории, происходит потеря устойчивости пластины:

$$\frac{T_{11}^{\text{lin}}}{\mu} \sim \frac{T_{11}^{\text{ext}}}{T_{11}^{\text{lin}}} - 1 \sim O(\varepsilon_1^2).$$

Вблизи нейтральной устойчивости пластины динамика полей  $v_i$  будет медленной:

$$\begin{aligned} \frac{\partial_\tau^2 v_i}{v_i} &\sim \frac{T_{11}^{\text{ext}} - T_{11}^{\text{lin}}}{\mu} \sim O(\varepsilon_1^4), \\ -\frac{\varepsilon_2^2}{12}(\lambda' + 2\mu)\partial_1^4 v_3 + \sigma_{11}^{(2)}\partial_1^2 v_3 &= o(\varepsilon_1^2). \end{aligned} \quad (1.65)$$

Отметим второй порядок производной по времени, формально заменив  $\tau$  на  $\tau_2$ .

Эффективные граничные условия для пластин найдем по схеме, изложенной в предыдущем разделе. Считаем, что на сторонах  $\xi_1 = \pm l_1$  пластины значения вариаций  $\delta\tilde{u}_3^{(k)}$ ,  $\delta\partial_1^2\tilde{u}_3^{(k)}$  фиксированы, а вариации  $\delta\partial_1\tilde{u}_3^{(k)}$ ,  $\delta\tilde{u}_1^{(k+1)}$  произвольны ( $k = 0, 2$ ). При условиях (1.65) с уравнениями теории возмущений согласованы следующие краевые условия:

$$\begin{aligned} v_3 \Big|_{\xi_1=\pm l_1} = \partial_1^2 v_3 \Big|_{\xi_1=\pm l_1} = 0, \quad \sigma_{11}^{(2)} \Big|_{\xi_1=\pm l_1} &= [T_{11}^{\text{ext}}]^{(2)}, \\ \sigma_{11}^{(4)} \Big|_{\xi_1=\pm l_1} &= [T_{11}^{\text{ext}}]^{(4)} - \left\{ [T_{11}^{\text{ext}}]^{(2)} \right\}^2 \left\{ \frac{1}{2\mu} + \frac{3a_1 + a_2}{(\lambda' + 2\mu)^2} \right\}. \end{aligned} \quad (1.66)$$

Учитывая (1.65) и (1.66), из (1.33) и (1.50) находим  $\sigma_{11}^{(k)}$  ( $k = 2, 4$ ):

$$\sigma_{11}^{(2)} = [T_{11}^{\text{ext}}]^{(2)} + o(\varepsilon_1^2),$$

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^{(4)} = -(\varepsilon_1\varepsilon_2)^2 \left[ b_1 + b_2 + c + \frac{\lambda' + 2\mu}{24} \right] (\partial_1^2 v_3)^2 + \\ + \sigma_{11}^{(4)} \Big|_{\xi_1=\pm l_1} + o(\varepsilon_1^4). \end{aligned} \quad (1.67)$$

А из (1.61) получаем замкнутое уравнение для  $v_3$ ,

$$\partial_{\tau_2}^2 v_3 + a_2\partial_1^2 v_3 + a_4\partial_1^4 v_3 + g\partial_1 \left[ \partial_1 v_3 (\partial_1^2 v_3)^2 \right] = 0, \quad (1.68)$$

где

$$\begin{aligned} a_2 &= -\frac{1}{2\mu^2} \left\{ 2\mu [T_{11}^{\text{ext}}]^{(2)} + 2\mu [T_{11}^{\text{ext}}]^{(4)} - \left( [T_{11}^{\text{ext}}]^{(2)} \right)^2 \right\}, \\ a_4 &= \frac{\varepsilon_2^2}{12\mu} \left\{ \lambda' + 2\mu + 2 [T_{11}^{\text{ext}}]^{(2)} \left( \frac{17}{10} + \frac{3a_1 + a_2}{\lambda' + 2\mu} \right) \right\}, \end{aligned}$$

$$g = \frac{1}{8\mu} (\varepsilon_1 \varepsilon_2)^2 (\lambda' + 2\mu).$$

Заметим, что вследствие оценок (1.65) при вычислении  $\sigma_{11}^{(4)}$  пренебрегли инерционными членами, а при выводе (1.68) опустили слагаемые  $\sim \partial_{\tau_2}^2 \partial_1^2 v_3$ .

Для рассматриваемой задачи нелинейно-геометрические уравнения Фёппля–Кармана [1, 46] редуцируются к линейным и приводят к пороговому напряжению

$$T_{11}^{\text{lin}} = -(\pi \varepsilon_2)^2 \frac{\lambda' + 2\mu}{12},$$

при котором появляется нейтрально-устойчивое решение вида  $v_3 \sim \sim \sin \pi(\xi_1 + l_1)$ . В этом случае размерная  $2L_1$  (безразмерная  $2l_1$ ) длина пластины и характерный масштаб  $l$  связаны соотношением  $2L_1/l = 2l_1 = n$ , где  $n$  — натуральное число (значения  $n > 1$  реализуются только при взрывной нагрузке [49]).

Будем искать решение нелинейной задачи (1.68) в форме

$$v_3 = A(\tau_2) \sin \pi(\xi_1 + l_1). \quad (1.69)$$

Секулярные члены в (1.68) будут устранены, если

$$\partial_{\tau_2}^2 A + \omega_0^2 A - \gamma A^3 = 0. \quad (1.70)$$

Здесь  $\omega_0^2 = a_4 \pi^4 - a_2 \pi^2$ ,  $\gamma = g \pi^6 / 4$ . Пусть  $A = 1$ ,  $\partial_{\tau_2} A = 0$  при  $\tau_2 = 0$  (амплитуда  $a$  смещений пластины введена в определение  $\varepsilon_1$ ). Задача (1.70) допускает первый интеграл

$$(\partial_{\tau_2} A)^2 = \frac{\gamma}{2} (A^2 - 1) (A^2 - \beta), \quad \beta = \frac{2\omega_0^2}{\gamma} - 1. \quad (1.71)$$

Уравнение (1.71) имеет ограниченное решение только при  $\beta \geq 1$  [50]. Нейтральная устойчивость пластины соответствует равенству. Отсюда получаем пороговое значение внешнего нагружения  $T_{11}^{\text{nl}}$ :

$$|T_{11}^{\text{nl}}| = |T_{11}^{\text{lin}}| \left\{ 1 - \frac{(\pi \varepsilon_2)^2}{6} \left[ \frac{17}{10} + \frac{3a_1 + a_2}{\lambda' + 2\mu} \right] \right\} - \frac{(T_{11}^{\text{lin}})^2}{2\mu} - \frac{\lambda' + 2\mu}{32} (\pi^2 \varepsilon_1 \varepsilon_2)^2.$$

Таким образом, при  $a_1, a_2 > 0$  потеря устойчивости нелинейно-упругой пластины произойдет при нагрузке, которая меньше той, что найдена из «квазилинейной» теории [1, 46].

Пусть продольная нагрузка на пластину меньше критической:

$$\gamma < \omega_0^2.$$

Обсудим вынужденные колебания пластины под действием малой резонансной нагрузки с развитой поверхности

$$q^{\text{eff}} = T_{33}^{\text{ext}} \Big| = \alpha q(x, \tau_2) \cos \varphi(\tau_2).$$

Здесь введен новый безразмерный параметр  $\alpha$ , характеризующий малость внешнего воздействия ( $0 < \alpha \leq 1$ ). Пусть амплитуда внешней силы меняется медленно по сравнению с ее частотой  $\partial_{\tau_2} q / \partial_{\tau_2} \varphi = o(1)$ .

В этом случае для амплитуды колебаний пластины вместо (1.70) имеем уравнение

$$\partial_{\tau_2}^2 A + \omega_0^2 A - \gamma A^3 = \alpha f(\tau_2) \cos \varphi(\tau_2), \quad (1.72)$$

где

$$f(\tau) = \frac{1}{l_1 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \mu} \int_{-l_1}^{l_1} q(\tau, \xi_1) \sin \pi(\xi_1 + l_1) d\xi_1.$$

Свойства решений нелинейного уравнения (1.72) с нулевыми начальными данными,  $(A, \partial_{\tau_2} A) = (0, 0)$ , исследованы в работе [51], где найдены условия, при которых энергия системы растет, хотя внешняя сила остается малой.

В отличие от резонанса в линейной задаче для возникновения нелинейного авторезонанса необходимо, чтобы амплитуда внешней силы превышала некоторое пороговое значение. Кроме того, в нелинейной задаче (1.72) частота собственных колебаний пластины уменьшается с ростом амплитуды. Поэтому для достижения авторезонанса на первом этапе (пока амплитуда колебаний пластины еще мала), следует медленно варьировать фазу вынуждающей силы:

$$\varphi(\tau_2) = \omega_0 \tau_2 + \alpha^{-2\lambda/3} \Phi \left( \alpha^{2(1+\lambda)/3} \tau_2 \right), \quad \lambda \geq 0.$$

В работе [51] найдены условия на функции  $f$  и  $\Phi$ , при которых задача имеет растущие при  $\tau_2 \rightarrow \infty$  решения. Условия зависят от скорости монотонного изменения частоты  $\partial_{\tau_2} \varphi$  вынуждающей силы и отвечают жесткому ( $\lambda = 0$ ) и мягкому ( $\lambda > 0$ ) режимам авторезонанса.

### 1.5. Нелинейная динамика продольных деформаций пластины

Особым видом деформаций тонкой пластины являются продольные деформации, происходящие в плоскости пластины и не сопровождающиеся ее изгибом. В отличие от изгибов пластины это сравнительно быстрые процессы. Поэтому приведенные выше уравнения теории возмущений следует изменить.

Пусть для изменения полей  $u_\alpha$  в пространстве и величины внешнего нагружения справедливы прежние оценки, а оценка (1.21), характеризующая изменение смещений во времени, заменяется на  $\partial_\tau \bar{u}_\alpha / \bar{u}_\alpha = O(1)$ . В этом случае эффективные уравнения динамики продольных деформаций пластины получатся в результате незначительной модификации прежней схемы вычислений. С одной стороны, в уравнениях теории возмущений появятся дополнительные

инерционные члены. С другой, — все слагаемые, не содержащие производных по времени, получатся из прежних уравнений при условии  $\tilde{u}_3^{(k)} = 0$  ( $k = 0, 1, 2$ ). Отметим ключевые моменты.

Существенно, что для рассматриваемых быстрых процессов инерционные свойства пластины и двумерные напряжения  $\sigma_{\alpha\beta}^{(k+1)}$  ( $k = 1, 2$ ) оказываются связанными соотношением

$$\mu\varepsilon_1\partial_\tau^2\tilde{u}_\alpha^{(k)} = \partial_\beta\sigma_{\alpha\beta}^{(k+1)} + o(\varepsilon_1^{k+1}). \quad (1.73)$$

Связь напряжений  $\sigma_{\alpha\beta}^{(k+1)}$  со смещениями такая же, как в (1.30) при  $\tilde{u}_3^{(k)} = 0$  ( $k = 0, 1, 2$ ). В выражении для  $P_{33}^{(4)}$  (см. (1.40) при  $\tilde{u}_3^{(0)} = 0$ ) появится дополнительное слагаемое  $\varepsilon_2^2(1 - 4\eta^2)\lambda'\partial_\tau^2\varepsilon_{\gamma\gamma}^{(2)}/16$ , индуцированное продольной динамикой. Это приведет к изменению инерционных свойств полей  $\tilde{u}_\alpha^{(3)}$ . Из уравнений эволюции для полей  $\tilde{u}_\alpha^{(3)}$  при учете связи

$$\mu\partial_\tau^2\varepsilon_{\gamma\gamma}^{(2)} = (\lambda' + 2\mu)\Delta\varepsilon_{\gamma\gamma}^{(2)} + o(\varepsilon_1^2),$$

которая следует из (1.73), после интегрирования по  $\eta$  находим, что

$$\mu\varepsilon_1\varepsilon_2\partial_\tau^2\tilde{u}_\alpha^{(3)} = \varepsilon_2^3\frac{(\lambda')^2}{48\mu}\partial_\tau^2\partial_\alpha\varepsilon_{\gamma\gamma}^{(2)} + F_\alpha^{(5)} + \varepsilon_2\partial_\beta\sigma_{\alpha\beta}^{(4)} + \varepsilon_2\partial_\beta\Pi_{\alpha\beta}^{(4)}. \quad (1.74)$$

Выражения для  $\varepsilon_{\alpha\beta}^{(2)}$ ,  $\sigma_{\alpha\beta}^{(4)}$ ,  $\Pi_{\alpha\beta}^{(4)}$  получаются из прежних при  $\tilde{u}_3^{(k)} = 0$  ( $k = 0, 1, 2$ ).

Эффективные нелинейные уравнения для результирующих смещений

$$v_\alpha = \tilde{u}_\alpha^{(1)} + \tilde{u}_\alpha^{(2)} + \tilde{u}_\alpha^{(3)}$$

получим в результате объединений (1.73) и (1.74):

$$\mu\varepsilon_1\varepsilon_2\partial_\tau^2v_\alpha = F_\alpha^{(5)} + \varepsilon_2\partial_\beta\sigma_{\alpha\beta} + \varepsilon_1^3\frac{(\lambda')^2}{48\mu}\partial_\tau^2\partial_\alpha\varepsilon_{\gamma\gamma}^{(2)} + \varepsilon_2\partial_\beta\Pi_{\alpha\beta}^{(4)}, \quad (1.75)$$

где

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\beta} &= \lambda'\delta_{\alpha\beta}\varepsilon_{\gamma\gamma} + 2\mu\varepsilon_{\alpha\beta}, \\ \varepsilon_{\alpha\beta} &= \frac{\varepsilon_1}{2}[\partial_\alpha v_\beta + \partial_\beta v_\alpha + \varepsilon_1\partial_\alpha v_\gamma\partial_\beta v_\gamma], \\ \varepsilon_{\alpha\beta}^{(2)} &= \frac{\varepsilon_1}{2}[\partial_\alpha v_\beta + \partial_\beta v_\alpha]. \end{aligned}$$

В выражении для  $\Pi_{\alpha\beta}^{(4)}$  следует произвести формальную замену  $\tilde{u}_\alpha^{(1)} \rightarrow v_\alpha$ .

В работе [36] уравнения, аналогичные (1.75), были выведены из вариационного принципа с привлечением гипотезы обобщенного плоского напряженного состояния. Эта гипотеза в точности соответствует соотношению (1.27) при  $n = 2$ ,  $\tilde{u}_3^{(k)} = 0$  ( $k = 0, 2$ ). Однако само по себе

приближение (1.27), если пренебречь поправкой  $\bar{u}_\alpha^{(3)}$ , нарушает краевое условие

$$P_{\alpha 3}^{(3)}(\eta = \pm 1/2) = 0$$

на поверхности пластины. В то же время учет  $\bar{u}_\alpha^{(3)}$  приведет к исчезновению слагаемого линейной дисперсии  $\sim \partial_\alpha \Delta \varepsilon_{\gamma\gamma}^{(2)}$  в уравнениях работы [36]. В остальном уравнения работы [36] совпадают с (1.75). Параметры  $\beta_1, \beta_2$  из [36] связаны с модулями упругости  $a_1, a_2$  данной работы соотношениями

$$\beta_1 = \frac{a_1}{\lambda' + 2\mu}, \quad \beta_2 = \frac{2(3a_1 + a_2)}{3(\lambda' + 2\mu)}.$$

В работе [36] теоретически описаны солитоны продольной деформации в пластине. Поскольку члены линейной дисперсии ответственны за образование солитонов, обсудим возможность формирования солитонов продольной деформации в пластине в рамках предлагаемого подхода. Рассмотрим частный случай, когда продольные смещения пластины слабо зависят от пространственной координаты  $\xi_2$ , причем смещения вдоль оси  $x_2$  малы по величине по сравнению со смещениями вдоль оси  $x_1$ :

$$\frac{v_2}{v_1} \sim \frac{\partial_2 v_\alpha}{\partial_1 v_\alpha} \sim O(\varepsilon_1).$$

Кроме того, пренебрежем поверхностными и массовыми силами.

Заметим, что при описании процессов, более медленно изменяющихся в пространстве, чем рассмотренные, нет необходимости заново обращаться к исходным (3+1)-мерным уравнениям и перестраивать теорию возмущений. Необходимую редукцию проще выполнить в рамках эффективных уравнений (1.75).

В данном случае в главном приближении отсутствуют локальные вращения среды вокруг оси  $x_3$ , поэтому сдвиговые деформации удовлетворяют условию  $\partial_1 v_2 \simeq \partial_2 v_1$ . С учетом этого замечания система (1.75) редуцируется к (2+1)-мерному уравнению для поля  $\varphi = \partial_1 v_1$ :

$$\partial_\tau^2 \varphi = \left[ \frac{\lambda' + 2\mu}{\mu} \Delta + \frac{\varepsilon_2^2}{12} \left( \frac{\lambda'}{2\mu} \right)^2 \partial_\tau^2 \partial_1^2 \right] \varphi + g \partial_1^2 \varphi^2. \quad (1.76)$$

В длинноволновом пределе для возмущений, распространяющихся со скоростями, близкими к скорости звука  $s = \sqrt{(\lambda' + 2\mu)/\mu}$  (в безразмерных переменных), уравнение (1.76) может быть упрощено при использовании приближения

$$\partial_\tau^2 \varphi \approx s^2 \partial_1^2 \varphi + o(\varepsilon_1).$$

Хотя это приближение справедливо только для длинноволновых возмущений, в области своей применимости оно позволяет значительно

продвинуться в аналитическом описании двумерных солитонов в пластине. В результате имеем

$$\partial_\tau^2 \varphi = \left[ \alpha^{(2,0)} \Delta - \alpha^{(4,0)} \partial_1^4 \right] \varphi + g \partial_1^2 \varphi^2, \quad (1.77)$$

где

$$\alpha^{(2,0)} = \frac{\lambda' + 2\mu}{\mu}, \quad \alpha^{(4,0)} = -\frac{\varepsilon_2^2}{12} \left( \frac{\lambda' s}{2\mu} \right)^2, \\ g = \frac{\varepsilon_1}{\mu} \left[ 3a_1 + a_2 + \frac{3}{2}(\lambda' + 2\mu) \right].$$

Если в (1.77) пренебречь зависимостью поля  $\varphi$  от пространственной координаты  $\xi_2$ , уравнение (1.77) сводится к полностью интегрируемой модели Буссинеска. Если ограничиться рассмотрением волн, движущихся в одну сторону вдоль оси  $x_1$ , со скоростями, близкими к скорости звука, модель (1.77) может быть редуцирована к (2+1)-мерной интегрируемой модели Кадомцева–Петвиашвили.

В общем случае, как показано в [52, 53], уравнение (1.77) допускает преобразование Бэклунда. Пусть  $\varphi_0$  — некоторое решение (1.77) и функция  $f$  удовлетворяет уравнению

$$\left[ D_\tau^2 - \alpha^{(2,0)} (D_1^2 + D_2^2) + \alpha^{(4,0)} D_1^4 - 2g\varphi_0 D_1^2 \right] f \cdot f = 0, \quad (1.78)$$

тогда

$$\varphi_1 = \varphi_0 - 6\alpha^{(4,0)} g^{-1} \partial_1^2 \ln f$$

также будет решением (1.77). Здесь

$$D_\tau^2 f \cdot f = (\partial_\tau - \partial_{\tau'}) f(\tau) f(\tau') \Big|_{\tau=\tau'}$$

и т. д. — операторы Хироты. Билинейная форма позволяет применить метод Хироты для получения (2+1)-мерных солитоноподобных решений. В частности, найдено  $N$ -солитонное экспоненциальное решение:

$$\varphi = -6\alpha^{(4,0)} g^{-1} \partial_1^2 \ln f, \\ f = \sum_{\mu=0,1} \exp \left[ \sum_{i>j}^N A_{ij} \mu_i \mu_j + \sum_{i=1}^N \mu_i \eta_i \right], \\ k^2(p, q) = \alpha^{(2,0)} [p^2 + q^2] - \alpha^{(4,0)} p^4, \quad \Omega_i = k(p_i, q_i), \\ \exp \eta_i = \exp [\Omega_i \tau + p_i \xi_1 + q_i \xi_2 + \eta_{0i}], \\ \exp A_{ij} = - \left[ (\Omega_i - \Omega_j)^2 - k^2(p_i - p_j, q_i - q_j) \right] \times \\ \times \left[ (\Omega_i + \Omega_j)^2 - k^2(p_i + p_j, q_i + q_j) \right]^{-1}. \quad (1.79)$$

Здесь  $\sum_{\mu=0,1}$  означает суммирование по всем возможным комбинациям  $\mu = 0, 1$  и  $\sum_{i>j}$  — суммирование по всем возможным парам из  $N$



элементов. Параметры  $\Omega_i, p_i, q_i, \eta_{0i}$  должны удовлетворять редукциям, гарантирующим вещественность  $\varphi$ .

Когда  $N = 2M$  и параметры связаны попарно так, что  $\Omega_s = \Omega_{s+M}^*$ ,  $p_s = p_{s+M}^*$  и т.д. ( $s = 1, 2, \dots, M$ ), выражение (1.79) описывает ансамбль из  $M$  двумерных «пульсирующих» солитонов. Такие солитоны становятся сингулярными в некоторых пространственно-временных точках, поэтому их физическая интерпретация затруднена.

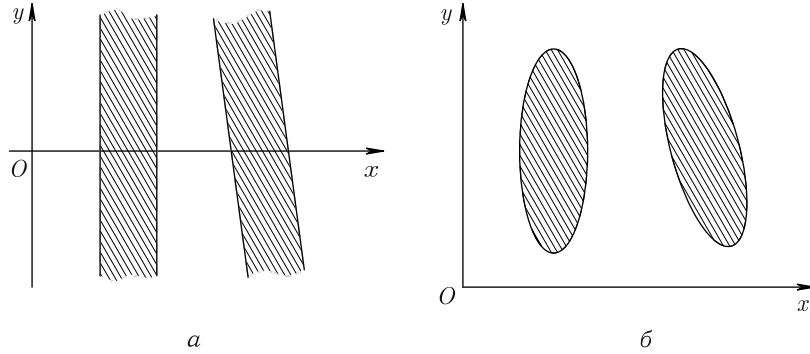


Рис. 1.2. Области локализации деформаций для «плоских» (а) и «сигарообразных» (б) солитонов

При вещественных  $p_i, q_i, \Omega_i, \eta_{0i}$  решение описывает упругие парные столкновения  $N$  квазиодномерных «плоских» солитонов типа:

$$\varphi = -\frac{6\alpha^{(4,0)}d^2}{gch^2\Theta}, \quad \Theta = d(\xi_1 + ut), \quad d^2 = \frac{\alpha^{(2,0)} - u^2}{4\alpha^{(4,0)}} > 0,$$

где  $u$  — скорость солитона (рис. 1.2, а). «Плоские» солитоны не сингулярны. Их устойчивость или неустойчивость относительно двумерных возмущений зависит от знака величины  $\alpha^{(2,0)}\alpha^{(4,0)}$ . В данном случае  $\alpha^{(2,0)}\alpha^{(4,0)} < 0$  и «плоские» солитоны, движущиеся со сверхзвуковыми скоростями ( $u^2 > s^2$ ), устойчивы относительно двумерных возмущений [52, 53]. Как показано в работах [52, 53], модель (1.77) допускает также «сигарообразные» полиномиальные солитоны (рис. 1.2, б). В данном случае такие солитоны неустойчивы относительно двумерных возмущений.

Проведенный анализ согласуется с результатами экспериментов по наблюдению «плоских» солитонов продольной деформации в пластине. Интерес к таким солитонам обусловлен простейшими подходами при их возбуждении и детектировании. На фотографии 1.3, взятой из работ [11, 54], приведено изображение интерференционной картины, соответствующей распространению плоского солитона в тонкой полистироловой пластине. Суть эксперимента заключалась в следующем. Торец пластины соприкасался с жидкостью, в которую была погружена протяженная металлизированная мишень, параллельная левому торцу

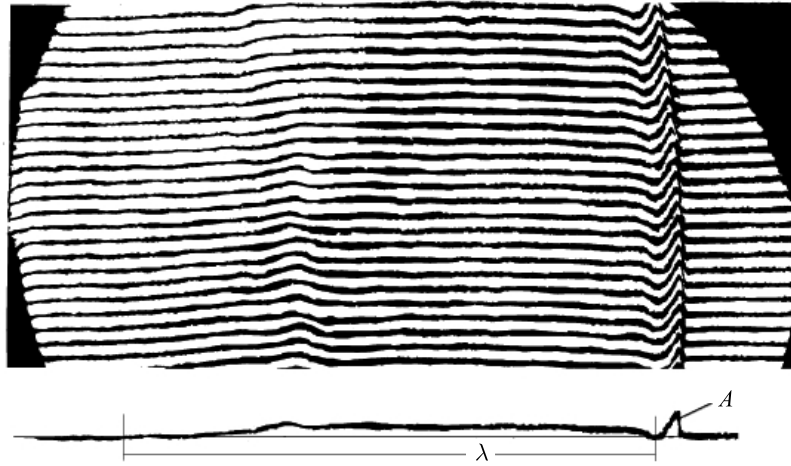


Рис. 1.3. Интерферограмма «плоского» солитона продольной деформации в тонкой пластине

пластины. Мгновенное испарение мишени лазером порождало в жидкости первичную ударную волну с плоским фронтом, которая далее распространялась в пластине. Голографическая регистрация деформаций пластины производилась в перпендикулярном распространению волны направлении, с использованием импульсного лазера.

Первая экспозиция осуществлялась для получения голограммы невозмущенной пластины; вторая экспозиция — лазерным импульсом синхронизированным с определенной стадией распространения волны деформаций. Параметры локализованной волны вычислялись на основе полученной интерферограммы. Продольные деформации фиксировались на разных расстояниях от торца пластины. На фотографии солитону соответствует протяженная область сглаженного искривления интерференционных линий. Для наглядности область локализации солитона  $\lambda$  показана на вставке под фотографией. Солитон движется слева направо. На интерференционных линиях заметнее не сам солитон, а два колоколообразных пика. Правый из них (*A*) движется быстрее солитона и соответствует ударной волне, породившей солитон. Левый пик — конечный результат следующей последовательности событий: отражения части первоначальной волны в жидкости от левого торца пластины, повторного отражения этой части волны от мишени, последующего ее распространения в жидкости и вхождения в пластину. Перечисленные волновые импульсы быстро затухают. Кроме того, их скорость всегда больше скорости звука и скорости солитона. Поэтому они отделяются от солитона. При этом амплитуда, скорость и ширина солитона остаются неизменными. Размер области локализации солитона может быть напрямую измерен по интерферограмме как расстояние

между двумя неискривленными зонами интерференционной полосы. В эксперименте фронт уединенной волны сохранял параллельность торцу пластины на протяжении одной трети ее длины.

В работе [14] аналитическими и численными методами исследовано влияние внешней среды на локализацию и усиление упругих волн в пластине. Волны в основном приближении являлись продольными и претерпевали лишь слабые поперечные изменения. Для теоретического описания «плоских» и двумерных локализованных солитонов продольной деформации использовались модели, близкие к модели Кадомцева–Петвиашвили.

В работах [55–58] выполнены аналогичные по постановке задачи экспериментальные и теоретические исследования солитонов в стержнях. В [11] отмечено, что лучшее по сравнению с предыдущими работами удовлетворение граничным условиям на свободных поверхностях стержней ведет к изменению коэффициентов в дисперсионных членах модельных уравнений. Это важно для экспериментальной проверки предсказаний теории, так как проявляется, в частности, в изменении ширины солитонов в стержнях на 20–25 процентов.

В заключение главы подведем ее итоги, чтобы необходимая, но достаточно утомительная, расчетная сторона работы не заслонила полученных результатов.

В этой главе развит вариант редуктивной теории возмущений, пригодный для решения нелинейных краевых задач, в которых конечная форма поверхности деформируемого тела заранее не известна, а находится в процессе решения задачи. Исходная нелинейно-упругая энергия среды содержит все совместимые с симметрией среды инварианты тензора деформаций; предлагаемый метод с контролируемой точностью выделяет вклады от них, необходимые для решения конкретной задачи.

С помощью предложенной теории возмущений построена двумерная динамическая модель для описания сильных поперечных и продольных деформаций тонких нелинейно-упругих пластин. В отличие от ранее известной модели Фёппля–Кармана новая модель корректно учитывает не только геометрическую нелинейность тензора деформаций, но и физическую нелинейность материала пластины, краевые условия на ее поверхности. Она включает дополнительные эффективные силы, которые обусловлены неоднородными деформациями материала, изменениями инерционных свойств пластины из-за локальных изменений ее кривизны.

Необходимость обобщения классической модели проиллюстрирована на примере задачи об авторезонансных колебаниях продольно сжатой пластины под действием малой внешней нагрузки с развитой поверхностью пластины. Когда смещения пластины по двум из ее краев стеснены связями, уравнения Фёппля–Кармана редуцируются к линей-

ным и потому являются недостаточными для обсуждения такой задачи. Установлено, что условия нелинейного резонанса пластины принципиально отличаются от условий ее линейного резонанса. Во-первых, потому, что амплитуда периодической поперечной накачки должна превышать некоторое пороговое значение. Во-вторых, для достижения авторезонанса следует медленно варьировать частоту вынуждающей силы.

Кроме того, в данной главе построена модель двумерной нелинейной динамики продольных деформаций пластины, не сопровождающихся ее изгибом. В отличие от поперечных изгибов пластины это сравнительно быстрые процессы, которые теоретически описываются дополнительными инерционными членами. На примере задачи о динамике продольных деформаций пластины показано, что гипотезы и подстановки, типичные для вариационного подхода, нарушают краевые условия на поверхности пластины, не дают правильного закона дисперсии линейных мод и потому не могут привести к верной теории.

На основе полученной модели аналитически описаны двумерные мультисолитоны продольной деформации тонкой пластины. Показано, что устойчивыми относительно двумерных возмущений оказываются только «плоские» солитоны, движущиеся со сверхзвуковыми скоростями. Приведенный анализ согласуется с результатами экспериментов по наблюдению параллельных солитонов продольной деформации в пластинах. Полученные формулы описывают не только столкновения параллельных солитонов, но и возможность их двумерного пересечения с последующим восстановлением формы.

## Глава 2

# НЕЛИНЕЙНО-УПРУГАЯ ДИНАМИКА ТРЕХСЛОЙНОЙ СРЕДЫ: СОЛИТОНЫ ПОПЕРЕЧНОЙ ГОФРИРОВКИ

Метод решения хорош, если с самого начала мы можем предвидеть — и далее подтвердить это, — что, следуя методу, мы достигнем цели.

*Г. Лейбниц*

Волнообразные искривления отдельных слоев материала экспериментально наблюдаются при разных способах деформирования образцов [39, 40]. Один из возможных механизмов такого явления состоит в следующем. Наиболее сильно нагруженный слой среды при определенной величине продольной нагрузки теряет устойчивость формы, начинает изгибаться в поперечном направлении. В окружающих его слабонагруженных слоях материала возникают деформации и напряжения, которые препятствуют появлению изгибов большой амплитуды. Происходит «дробление» протяженных изгибов на короткие с меньшей амплитудой. На начальных стадиях деформирования слоистая среда переходит в метастабильное закритическое состояние, которое может быть описано в рамках нелинейной теории упругости. В данной главе рассмотрена задача [37, 38] о динамике нелинейно-упругого слоя материала в форме пластины, стесненного двумя полупространствами с меньшими модулями упругости, которая дает представление об особенностях такого механизма. Как и в главе 1, локальные изгибы пластины предполагаются сравнимыми с ее толщиной.

Исходные  $(3 + 1)$ -мерные уравнения нелинейной теории упругости чрезвычайно сложны для анализа. Конструктивное решение задачи возможно посредством построения упрощенных моделей, которые корректно учитывают главные особенности задачи и в то же время допускают точные решения. Поперечные изгибы нагруженного слоя среды индуцируют деформации в крайних слоях. Эффекты нелокального обратного влияния подложек на средний слой существенно

осложняют теоретическое описание его динамики. Трудности, связанные с нелокальностью взаимодействий, удается преодолеть вблизи порога устойчивости слоистой среды по линейной теории. В этой области можно ограничиться рассмотрением медленной пространственно-временной эволюции той линейной моды, которая ответственна за гофрировку нагруженного слоя. Из-за неустойчивости линейной моды проявляются и начинают играть определяющую роль нелинейные свойства среды. В данной главе найдены условия, при которых в слоистой среде происходит формирование долгоживущих нелинейных возбуждений и структур.

В разделе 2.1 приведены постановка задачи и основные уравнения, выделена область характерных пространственно-временных масштабов и внешних нагрузок, в которой возможно исследование гофрировки сильно нагруженного слоя среды на основе упрощенной модели.

В разделе 2.2 сформулированы краевые условия для трехслойной среды, соответствующие проскальзыванию среднего слоя вдоль подложек.

В разделе 2.3 упрощенная модель квазиодномерной динамики изгибов сильно нагруженного слоя материала выводится из полной системы уравнений нелинейной теории упругости, включающей: все совместимые с симметрией среды взаимодействия, с контролируемой точностью по малым параметрам, которые отражают величину внешнего напряжения; пространственно-временные отклики среды на внешние воздействия в рассматриваемой области характерных масштабов, а также геометрическую и физическую нелинейность материала. Предлагаемая процедура приводит к уменьшению числа феноменологических постоянных в исходном разложении нелинейно-упругой энергии системы, так как эти постоянные условиями самосогласования теории возмущений объединяются в небольшое число параметров, которые и будут экспериментально наблюдаемыми эффективными упругими модулями слоистой среды.

При построении модели решается нетривиальная нелинейная краевая задача, в которой форма поверхности сильно нагруженного слоя среды заранее не известна, а находится в процессе решения задачи. Изучение неоднородной динамики слоистой среды предлагаемый подход сводит к анализу решений эффективных одномерных уравнений. Особенности самокализованной гофрировки слоя среды определяются в результате баланса размерных эффектов, ответственных за пространственную дисперсию среды (зависимость от толщины слоя и краевых условий на его поверхности), эффектов нелинейного взаимодействия близких неустойчивых мод деформации, а также эффектов нелокального взаимодействия между слоями среды.

Насколько известно, динамика таких деформаций материала не исследована, хотя самокализованные нелинейно-упругие изгибы отдельных слоев среды являются концентраторами напряжений и, следовательно, обуславливают последующее пластическое течение

материала. В то же время решались близкие задачи, в которых поперечно нагруженные пластинки покоились на упругих состояниях, как это имеет место, например, в покрытиях автомобильных дорог или взлетно-посадочных полос аэродромов. При этом заранее предполагалось, что интенсивность реакции основания пропорциональна прогибу пластинки [23]

В разделе 2.4 иллюстрируется принципиальная возможность аналитического описания долгоживущих пространственно-локализованных нелинейно-упругих возбуждений и структур вблизи порогов неустойчивости многослойных сред. На основе построенной модели предсказываются и исследуются солитоны поперечной гофрировки слоистой среды, которые предшествуют неупругому формоизменению материала.

## 2.1. Постановка задачи

Рассмотрим пластину толщиной  $d$ , стесненную двумя нелинейно-упругими полупространствами, одно из которых находится выше ( $x_3 \geq d/2$ ), а другое ниже ( $x_3 \leq -d/2$ ) пластины (рис. 2.1). Пусть  $x_k$  ( $\check{x}_k$ ) — координаты материальной точки пластины (одной из подложек) до деформации,  $X_k = x_k + u_k(\mathbf{x}, t)$  ( $\check{X}_k = \check{x}_k + v_k(\check{\mathbf{x}}, t)$ ) — координаты той же точки после деформации (нижние индексы, обозначенные латинскими буквами, принимают значения 1, 2, 3),  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  и  $\mathbf{v}(\check{\mathbf{x}}, t)$  — векторы смещений.

Компоненты лагранжева тензора деформации для пластинки и подложек имеют вид

$$\begin{aligned}\eta_{ik} &= \frac{1}{2} [\partial_i u_k + \partial_k u_i + \partial_i u_m \partial_k u_m], \\ \check{\eta}_{ik} &= \frac{1}{2} [\partial_i v_k + \partial_k v_i + \partial_i v_m \partial_k v_m],\end{aligned}\tag{2.1}$$

и соответствующие инварианты тензоров деформации суть

$$\begin{aligned}I_1 &= \eta_{ii}, & I_2 &= \eta_{nm}^2, & I_3 &= \eta_{nm} \eta_{mk} \eta_{kn}; \\ \check{I}_1 &= \check{\eta}_{ii}, & \check{I}_2 &= \check{\eta}_{nm}^2, & \check{I}_3 &= \check{\eta}_{nm} \check{\eta}_{mk} \check{\eta}_{kn}.\end{aligned}$$

Сходственные физические величины для пластины и подложек будем обозначать одинаковыми буквами. Когда это не вызывает недоразумений, будем говорить только о пластине.

В уравнениях (1.10) исключим из рассмотрения внешние массовые силы, действующие на пластину:

$$-\rho_0 \partial_t^2 u_i + \partial_s P_{is} = 0.\tag{2.2}$$

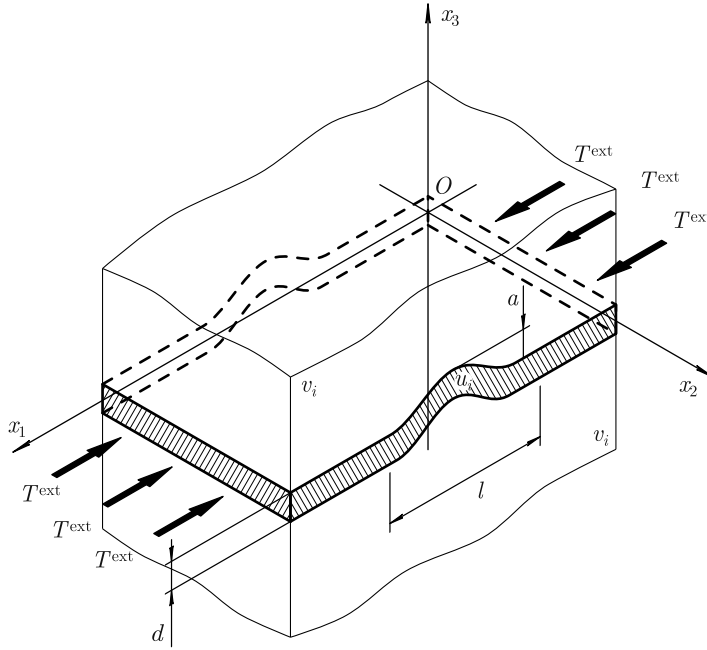


Рис. 2.1. Характер нагружения трехслойной среды

Введем безразмерные переменные (1.15). В этих переменных уравнения динамики пластины (2.2) примут вид

$$\begin{aligned} \mu \varepsilon_1 \varepsilon_2 \partial_\tau^2 \bar{u}_\alpha &= \varepsilon_2 \partial_\beta P_{\alpha\beta} + \partial_\eta P_{\alpha 3}, \\ \mu \varepsilon_1 \varepsilon_2 \partial_\tau^2 \bar{u}_3 &= \varepsilon_2 \partial_\beta P_{3\beta} + \partial_\eta P_{33}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Однородное на бесконечности внешнее напряжение  $T_{11}^{\text{ext}}$  приложено только к пластине, причем

$$\frac{T_{11}^{\text{ext}}}{\mu} = O(\varepsilon_1^2) + O(\varepsilon_1^4).$$

Задача упрощается, когда нет внешних нагрузок порядка  $O(\varepsilon_1^3)$ .

Пусть материал подложек имеет меньшие модули упругости:

$$\frac{\check{A}_{kpq}}{A_{kpq}} = O(\varepsilon_1^3). \quad (2.4)$$

Деформации подложек описываются другими безразмерными переменными:

$$\xi_k = \frac{\check{x}_k}{l}, \quad \tau = \frac{t}{\tau_{\text{ch}}}, \quad v_i = a \bar{v}_i, \quad i, k = 1, 2, 3.$$



В безразмерных переменных уравнения нелинейной теории упругости для подложек имеют вид

$$\check{\mu}\gamma_0\varepsilon_1\partial_\tau^2\bar{v}_i = \partial_k\check{P}_{ik}, \quad (2.5)$$

где

$$\gamma_0 = \frac{\mu\check{\rho}_0}{\check{\mu}\rho_0} = O(1), \quad \partial_i = \frac{\partial}{\partial\xi_i}.$$

Перечисленными условиями выделена область физических параметров задачи, в которой нелинейная динамика пластины может быть изучена в рамках упрощенной модели главе 1. Далее рассматривается случай, когда поля смещений трехслойной среды не зависят от координаты  $x_2$  ( $\check{x}_2$ ), а компоненты смещений  $u_2$  и  $v_2$  равны нулю.

С целью построения модели будем искать решение динамических уравнений трехслойной среды в следующем виде:

$$\begin{aligned} \bar{u}_3 &= \bar{u}_3^{(0)}(\xi_1, \tau) + \sum_{n=2}^{\infty} \bar{u}_3^{(n)}(\xi_1, \eta, \tau), \\ \bar{u}_1 &= \bar{u}_1^{(0)}(\xi_1, \tau) + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{u}_1^{(n)}(\xi_1, \eta, \tau), \\ \bar{v}_i &= \sum_{n=0}^{\infty} \bar{v}_i^{(n)}(\xi_1, \xi_3, \tau), \quad i = 1, 3. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Верхние индексы указывают общий порядок слагаемых по параметрам  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  ( $\varepsilon_1 \sim \varepsilon_2$ ). Отметим, что поля  $\bar{u}_3^{(0)}$  и  $\bar{v}_i^{(0)}$  описывают локальные деформации среды с характерным масштабом  $l$ :

$$\frac{\partial\bar{v}_i^{(0)}}{\partial\xi_k} = O(1), \quad \frac{\partial\bar{u}_3^{(0)}}{\partial\xi_1} = O(1),$$

а также их медленные пространственно-временные модуляции, в то время как смещение  $\bar{u}_1^{(0)}$  описывает только однородное плоское напряженное состояние пластины и его медленные модуляции, при которых  $\partial\bar{u}_1^{(0)}/\partial\xi_1 = O(\varepsilon_1)$ . В разделе 2.3 посредством введения медленных переменных будут уточнены эти утверждения и, в частности, конкретизировано выделение слагаемого  $\bar{u}_1^{(0)}$ .

Решению (2.6) соответствуют разложения тензоров  $P_{ij}$  и  $\check{P}_{ij}$ :

$$P_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} P_{ij}^{(n)}, \quad \check{P}_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} \check{P}_{ij}^{(n)}, \quad i, j = 1, 3, \quad (2.7)$$

после подстановки которых в (2.3) и (2.5) получается цепочка уравнений теории возмущений.

Анализ показывает, что при сформулированных условиях можно ограничиться конечным числом слагаемых в представлении (1.4) для

нелинейно-упругой энергии среды. В плотности энергии пластины (1.4) достаточно сохранить члены

$$\varphi = \frac{\lambda}{2} I_1^2 + \mu I_2 + \frac{A}{3} I_3 + B I_1 I_2 + \frac{C}{3} I_1^3, \quad (2.8)$$

где  $\lambda, \mu, A, B, C$  — упругие модули пластины [46].

Поскольку подложки имеют меньшие модули упругости, для «сшивки» напряжений вдоль границ раздела сред в энергии подложек необходимо удерживать больше слагаемых:

$$\varphi = \frac{\check{\lambda}}{2} \check{I}_1^2 + \check{\mu} \check{I}_2 + \frac{\check{A}}{3} \check{I}_3 + \check{B} \check{I}_1 \check{I}_2 + \frac{\check{C}}{3} \check{I}_1^3 + \frac{\check{H}}{4} \check{I}_2^2 + \frac{\check{F}}{6} \check{I}_1 \check{I}_3 + \frac{\check{M}}{2} \check{I}_1^2 \check{I}_2 + \frac{\check{N}}{12} \check{I}_1^4. \quad (2.9)$$

Упругие модули  $\check{H}, \check{F}, \check{M}, \check{N}$  введены так, чтобы в окончательных формулах получились сравнительно простые коэффициенты.

## 2.2. Условие проскальзывания среднего слоя

Сформулируем граничные условия, соответствующие проскальзыванию пластины вдоль подложек.

На соприкасающихся поверхностях пластины и подложек нормальные составляющие смещений среды должны быть непрерывны. В первых порядках теории возмущений этому требованию соответствуют краевые условия

$$\bar{u}_3^{(k)} \Big|_{\eta=\pm 1/2} = \bar{v}_3^{(k)} \Big|_{\xi_3^{\geq 0}}, \quad k = 0, 2; \quad \bar{v}_3^{(1)} \Big|_{\xi_3^{\geq 0}} = 0, \quad (2.10)$$

где

$$\xi_3^{\geq} = \xi_3 - \frac{d}{2l}, \quad \xi_3^{\leq} = \xi_3 + \frac{d}{2l}.$$

Нормаль к деформированной поверхности пластины определяется соотношением [29]

$$N_i = \frac{m_i}{|\mathbf{m}|}, \quad m_j = \frac{\partial x_s}{\partial X_j} n_s, \quad i, j = 1, 3, \quad (2.11)$$

где  $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$  — вектор нормали к недеформированной поверхности пластины. Далее потребуется выражение для нормали через поля смещений с точностью до слагаемых порядка  $O(\varepsilon_1^2)$ :

$$N_1 = -\varepsilon_1 \partial_1 \bar{u}_3^{(0)} + o(\varepsilon_1^2), \quad N_3 = 1 - \frac{\varepsilon_1^2}{2} \left( \partial_1 \bar{u}_3^{(0)} \right)^2 + o(\varepsilon_1^2). \quad (2.12)$$

При переходе от (2.11) к (2.12) использовано представление

$$[\mathbf{E} + \mathbf{A}]^{-1} = \mathbf{E} - \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \dots,$$

где  $\mathbf{E}$  — единичная матрица,  $A_{ij} = \partial u_i / \partial x_j$ ,  $\max |A_{ij}| \ll 1$ .

Вследствие проскальзывания пластины сдвиговые напряжения на деформированных поверхностях пластины и подложек должны обращаться в нуль:

$$N_i e_{is} T_{sk} N_k = 0, \quad N_i e_{is} \check{T}_{sk} N_k = 0,$$

где  $e_{ij}$  — антисимметричный единичный тензор ( $e_{13} = 1$ ). Разложение этих соотношений по параметрам  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  (см. (1.12), (2.7), (2.12)) дает краевые условия для уравнений теории возмущений:

$$\begin{aligned} P_{13}^{(4)} \Big|_{\eta=\pm 1/2} &= 0, \\ \left[ P_{13}^{(k)} + \varepsilon_1 \partial_1 \bar{u}_3^{(0)} P_{33}^{(k-1)} \right] \Big|_{\eta=\pm 1/2} &= 0, \quad k = 5, 6; \\ \check{P}_{13}^{(1)} \Big|_{\xi_3^{\geq 0}} &= 0, \\ \left[ \check{P}_{13}^{(n)} + \varepsilon_1 \partial_1 \bar{u}_3^{(0)} \check{P}_{33}^{(n-1)} \right] \Big|_{\xi_3^{\geq 0}} &= 0, \quad n = 2, 3. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Заметим, что, хотя сдвиговые напряжения на соприкасающихся поверхностях пластины и подложек обращаются в нуль, касательные компоненты тензоров Пиолы–Кирхгофа  $P_{13}$  и  $\check{P}_{13}$  не равны нулю.

Требование непрерывности нормальных напряжений на соприкасающихся поверхностях пластины и подложек,  $N_i T_{ij} N_j = N_i \check{T}_{ij} N_j$ , дает следующие краевые условия для уравнений теории возмущений:

$$\begin{aligned} P_{33}^{(4)} \Big|_{\eta=\pm 1/2} &= \check{P}_{33}^{(1)} \Big|_{\xi_3^{\geq 0}}, \\ P_{33}^{(5)} \Big|_{\eta=\pm 1/2} &= \left[ \check{P}_{33}^{(2)} - \varepsilon_1 \partial_1 \bar{v}_1^{(0)} \check{P}_{33}^{(1)} \right] \Big|_{\xi_3^{\geq 0}}, \\ P_{33}^{(6)} \Big|_{\eta=\pm 1/2} &= \left\{ \check{P}_{33}^{(3)} - \varepsilon_1 \partial_1 \bar{v}_1^{(0)} \check{P}_{33}^{(2)} + \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon_1 \check{P}_{33}^{(1)} \left[ \partial_1 \bar{u}_1^{(1)} - \partial_1 \bar{v}_1^{(1)} \right] \right\} \Big|_{\xi_3^{\geq 0}}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

При рассмотрении соотношений, содержащих компоненты  $P_{ij}^{(n)}$  и  $\check{P}_{ij}^{(k)}$ , необходимо учитывать разный порядок величины упругих модулей пластины и подложек (2.4).

Краевые условия на гранях пластины характеризуют обратное влияние на пластину деформаций в подложках. В частности, последнее из условий (2.14) учитывает изменение нормальных напряжений вследствие разной сжимаемости материалов пластины и подложек.

В формулах (2.13), (2.14) из-за малых модулей упругости подложек связь напряжений на поверхности пластины с напряжениями в подложках впервые проявилась, начиная с четвертого порядка теории возмущений для пластины. В низших порядках напряжения на развитой поверхности пластины обращаются в нуль. Это требование эквивалентно условиям

$$P_{i3}^{(n)} \Big|_{\eta=\pm 1/2} = 0, \quad n = 1, 2, 3. \quad (2.15)$$

Статические деформации среды на бесконечности должны обеспечить равновесие сжатых из-за деформирования пластины подложек. Динамические деформации подложек на бесконечности обращаются в нуль.

### 2.3. Редуктивная теория возмущений

Нелинейная динамика пластины определяется не только локальными взаимодействиями ее собственных деформаций, но и «косвенным» взаимодействием деформаций пластины через смещения подложек. Даже в простейшем случае квазиодномерного гофрирования пластины смещения подложек двумерны. Поэтому косвенные взаимодействия нелокальны. Для квазиодномерной динамики пластины теория возмущений (2.6) дает, вообще говоря, интегро-дифференциальные нелинейные уравнения. Задача упрощается и сводится к «почти локальной», когда пластина испытывает волнообразную гофрировку, близкую к той, что соответствует нейтрально-устойчивой линейной моде. Рассмотрим этот случай.

Вблизи порога неустойчивости пластины (по линейной теории) решение (2.6) следует конкретизировать:

$$\begin{aligned} \bar{u}_1 &= \bar{u}_1^{(0,0)}(X, T) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \bar{u}_1^{(n,l)}(X, T, \eta) \exp(ikl\xi_1), \\ \bar{u}_3 &= \left[ \bar{u}_3^{(0,1)}(X, T) \exp(ik\xi_1) + \text{c.c.} \right] + \\ &\quad + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \bar{u}_3^{(n,l)}(X, T, \eta) \exp(ikl\xi_1), \\ \bar{v}_m &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \bar{v}_m^{(n,l)}(X, T, \xi_3) \exp(ikl\xi_1), \quad m = 1, 3. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Здесь индекс  $n$  характеризует порядок слагаемых по параметрам  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  ( $\varepsilon_1 \sim \varepsilon_2$ ),  $k$  — волновое число. Пусть  $k = k_0$  — значение волнового числа нейтрально-устойчивой линейной моды, которая формируется при критическом напряжении  $T_{11}^{\text{lin}}$ . Верхний индекс «lin» указывает, что это напряжение соответствует верхней критической нагрузке

линейной теории упругости. Явные выражения для  $k_0$  и  $T_{11}^{\text{lin}}$  находятся в процессе решения задачи. Дальнейший анализ покажет, что для  $T_{11}^{\text{lin}}$  справедлива оценка

$$\frac{T_{11}^{\text{lin}}}{\mu} = O(\varepsilon_1^2).$$

При внешних напряжениях  $T_{11}^{\text{ext}}$ , близких к  $T_{11}^{\text{lin}}$ , нелинейная динамика пластины определяется неустойчивыми модами, волновые числа которых принадлежат малой окрестности критического волнового числа  $k_0$ . Радиус окрестности зависит от того, насколько напряжение  $T_{11}^{\text{ext}}$  отличается от  $T_{11}^{\text{lin}}$ . Далее считаем, что

$$\frac{T_{11} - T_{11}^{\text{lin}}}{\mu} = O(\varepsilon_1^4),$$

тогда через параметр  $\varepsilon_1$  определяются медленные переменные:

$$X = \varepsilon_1 \xi_1, \quad T = \varepsilon_1^2 \tau,$$

которые описывают модуляции основной гармоники  $\sim \exp(ik\xi_1)$  в результате ее взаимодействия с близкими неустойчивыми модами. В конечном счете справедливость масштабного растяжения оправдывается самосогласованностью результатов.

Согласно (2.16) рассматриваются два варианта теории возмущений. Один — для описания нелинейной динамики пластины, другой — для подложек. В результате их «сшивки» будет построена эффективная квазиодномерная модель эволюции огибающей поперечных изгибов пластины.

**2.3.1. Теория возмущений для пластины.** Выбранная форма решения (2.16) приводит к следующим представлениям для тензоров  $\eta_{sp}$  и  $P_{sp}$ :

$$\begin{aligned} \eta_{sp} &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \eta_{sp}^{(n,l)} \exp(ikl\xi_1), \\ P_{sp} &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} P_{sp}^{(n,l)} \exp(ikl\xi_1). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Связь между коэффициентами  $\eta_{ij}^{(n,l)}$  и  $\bar{u}_i^{(n,l)}$  находим в результате подстановки (2.16), (2.17) в соотношения

$$\begin{aligned} \eta_{11} &= \varepsilon_1 \left\{ \hat{D}_1 \bar{u}_1 + \frac{\varepsilon_1}{2} (\hat{D}_1 \bar{u}_n)^2 \right\}, \\ \eta_{33} &= \frac{a}{d} \left\{ \partial_\eta \bar{u}_3 + \frac{1}{2} \frac{a}{d} (\partial_\eta \bar{u}_n)^2 \right\}, \\ \eta_{13} &= \frac{1}{2} \left\{ \varepsilon_1 \hat{D}_1 \bar{u}_3 + \frac{a}{d} \partial_\eta \bar{u}_1 + \frac{\varepsilon_1 a}{d} (\hat{D}_1 \bar{u}_n) \partial_\eta \bar{u}_n \right\}, \end{aligned} \quad (2.18)$$

где  $\widehat{D}_1 = \partial_1 + \varepsilon_1 \partial_X$  — полная производная по пространственной координате вдоль оси  $x_1$ . Из (2.18) следует, что коэффициенты  $\eta_{13}^{(n,l)}$  отличны от нуля при  $n \geq 1$ , а коэффициенты  $\eta_{11}^{(n,l)}$  и  $\eta_{33}^{(n,l)}$  — при  $n \geq 2$ . Приведем первые из них:

$$\begin{aligned}\eta_{13}^{(1,1)} &= \frac{1}{2} \left[ \varepsilon_1 i k \bar{u}_3^{(0,1)} + \frac{a}{d} \partial_\eta \bar{u}_1^{(1,1)} \right], \\ \eta_{13}^{(2,1)} &= \frac{1}{2} \left[ \varepsilon_1^2 \partial_X \bar{u}_3^{(0,1)} + \frac{a}{d} \partial_\eta \bar{u}_1^{(2,1)} \right], \\ \eta_{13}^{(n,l)} &= \frac{1}{2} \frac{a}{d} \partial_\eta \bar{u}_1^{(n,l)}, \quad n = 1, 2, \quad l = 0, 2, 3, \dots; \quad (2.19)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\eta_{33}^{(2,0)} &= \frac{a}{d} \partial_\eta \bar{u}_3^{(2,0)} + (\varepsilon_1 k)^2 \left| \bar{u}_3^{(0,1)} \right|^2, \\ \eta_{33}^{(2,2)} &= \frac{a}{d} \partial_\eta \bar{u}_3^{(2,2)} - \frac{(\varepsilon_1 k)^2}{2} \left( \bar{u}_3^{(0,1)} \right)^2, \\ \eta_{33}^{(2,l)} &= \frac{a}{d} \partial_\eta \bar{u}_3^{(2,l)}, \quad l = 1, 3, 4, \dots; \quad (2.20)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\eta_{11}^{(2,0)} &= \varepsilon_1^2 \partial_X \bar{u}_1^{(0,0)} + (\varepsilon_1 k)^2 \left| \bar{u}_3^{(0,1)} \right|^2, \\ \eta_{11}^{(2,2)} &= 2ik\varepsilon_1 \bar{u}_1^{(1,2)} - \frac{(\varepsilon_1 k)^2}{2} \left( \bar{u}_3^{(0,1)} \right)^2, \\ \eta_{11}^{(2,l)} &= ikl\varepsilon_1 \bar{u}_1^{(1,l)}, \quad l = 1, 3, 4, \dots \quad (2.21)\end{aligned}$$

Ввиду вещественности исходных полей функции  $\bar{u}_i^{(n,l)}$  и т. д. удовлетворяют условию

$$\bar{u}_i^{(n,-l)} = \left[ \bar{u}_i^{(n,l)} \right]^*,$$

поэтому здесь и далее выписываются лишь коэффициенты с неотрицательными  $l$ . Приведем первые из компонент  $P_{ij}^{(n,l)}$ , которые наиболее просто связаны с  $\eta_{ij}^{(n,l)}$ :

$$\begin{aligned}P_{13}^{(n,l)} &= \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \eta_{13}} \right)^{(n,l)} = 2\mu \eta_{13}^{(n,l)}, \quad n = 1, 2, 3, 4; \\ P_{33}^{(k,l)} &= \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \eta_{33}} \right)^{(k,l)} = (\lambda + 2\mu) \eta_{33}^{(k,l)} + \lambda \eta_{11}^{(k,l)}; \quad (2.22) \\ P_{11}^{(k,l)} &= \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \eta_{11}} \right)^{(k,l)} = (\lambda + 2\mu) \eta_{11}^{(k,l)} + \lambda \eta_{33}^{(k,l)}, \quad k = 2, 3.\end{aligned}$$

Поля  $\bar{u}_i^{(n,l)}$ ,  $\eta_{ij}^{(n,l)}$ ,  $P_{ij}^{(n,l)}$  зависят от переменных  $\eta$ ,  $X$ ,  $T$ . Подставляя (2.22) в (2.3), (2.10), (2.13)–(2.15) и приравнивая члены одного порядка малости при каждой из независимых гармоник, получаем краевые задачи по переменной  $\eta$ .

В первых порядках теории возмущений имеем краевые задачи

$$\begin{aligned} \partial_\eta P_{13}^{(n,l)} = 0, \quad P_{13}^{(n,l)} \Big|_{\eta=\pm 1/2} &= 0, \quad n = 1, 2, \\ \partial_\eta P_{33}^{(k,l)} = 0, \quad P_{33}^{(k,l)} \Big|_{\eta=\pm 1/2} &= 0, \quad k = 2, 3, \end{aligned}$$

с тривиальными решениями

$$\begin{aligned} P_{13}^{(n,l)} &\equiv 0, \\ P_{33}^{(k,l)} &\equiv 0. \end{aligned}$$

Первое из них эквивалентно условию  $\eta_{13}^{(n,l)} = 0$ , из которого прежде всего следует, что коэффициенты  $\eta_{13}^{(n,l)}$ , в действительности, не равны нулю начиная с  $n = 3$ . Если условия  $\eta_{13}^{(n,l)} = 0$  ( $n = 1, 2$ ) переписать через смещения, получатся дифференциальные уравнения для расчета полей  $\bar{u}_1^{(n,l)}$ . Функции  $\bar{u}_1^{(n,l)}$  ( $n = 1, 2$ ) с  $l = 0, 2, 3 \dots$  оказываются не зависящими от  $\eta$ . Далее функции, не зависящие от  $\eta$ , будем отмечать знаком « $\sim$ »:

$$\bar{u}_1^{(n,l)} = \tilde{u}_1^{(n,l)}, \quad n = 1, 2, \quad l = 0, 2, 3, \dots$$

Коэффициенты  $\bar{u}_1^{(1,1)}$  ( $n = 1, 2$ ) выражаются через  $\tilde{u}_3^{(1,1)}$ :

$$\bar{u}_1^{(1,1)} = -\varepsilon_2 i k \eta \tilde{u}_3^{(0,1)} + \tilde{u}_1^{(1,1)}, \quad \bar{u}_1^{(2,1)} = -\varepsilon_1 \varepsilon_2 \eta \partial_X \bar{u}_3^{(0,1)} + \tilde{u}_1^{(2,1)}, \quad (2.23)$$

где  $\tilde{u}_1^{(n,1)}$  ( $n = 1, 2$ ) — произвольные функции, возникшие при интегрировании. Они определяются следующими порядками теории возмущений. Оказывается, что

$$\tilde{u}_1^{(n,1)} = 0, \quad n = 1, 2.$$

Из соотношений

$$P_{33}^{(n,l)} = (\lambda + 2\mu)\eta_{33}^{(n,l)} + \lambda\eta_{11}^{(n,l)} \equiv 0, \quad n = 2, 3, \quad (2.24)$$

находим полезную для дальнейших вычислений связь между  $\eta_{11}^{(n,l)}$  и  $\eta_{33}^{(n,l)}$ :

$$\eta_{33}^{(n,l)} = -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}\eta_{11}^{(n,l)}, \quad n = 2, 3.$$

В результате последняя формула в (2.22) упрощается и принимает вид

$$P_{11}^{(n,l)} = (\lambda' + 2\mu)\eta_{11}^{(n,l)}, \quad n = 2, 3, \quad (2.25)$$

где  $\lambda' = 2\lambda\mu/(\lambda + 2\mu)$  — эффективный упругий модуль плоской деформации.

Рассмотрим краевую задачу

$$\partial_\eta P_{13}^{(3,l)} + \varepsilon_2 i k l P_{11}^{(2,l)} = 0; \quad P_{13}^{(3,l)} \Big|_{\eta=\pm 1/2} = 0, \quad l = 1, 2, 3, \dots \quad (2.26)$$

Проинтегрируем уравнение (2.26) по толщине пластины. Получим условие его разрешимости,

$$\int_{-1/2}^{1/2} P_{11}^{(2,l)} d\eta = (\lambda' + 2\mu) \int_{-1/2}^{1/2} \eta_{11}^{(2,l)} d\eta = 0,$$

из которого, используя (2.21) и (2.25), найдем связи между уже введенными функциями:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_1^{(1,1)} &= 0, \\ \bar{u}_1^{(1,2)} &= \tilde{u}_1^{(1,2)} = -\frac{ik\varepsilon_1}{4} \left( \tilde{u}_3^{(0,1)} \right)^2, \\ \bar{u}_1^{(1,l)} &= 0, \quad l = 3, 4, \dots \end{aligned} \quad (2.27)$$

Ограничения (2.27) означают, что из коэффициентов  $\eta_{11}^{(2,l)}$  ( $l \geq 0$ ) не обращаются в нуль только два:

$$\begin{aligned} \eta_{11}^{(2,0)} &= \varepsilon_1^2 \left( \partial_X \bar{u}_1^{(0,0)} + k^2 \left| \tilde{u}_3^{(0,1)} \right|^2 \right) \equiv \varepsilon_{11}^{(2,0)}, \\ \eta_{11}^{(2,1)} &= \varepsilon_1 \varepsilon_2 k^2 \eta \tilde{u}_3^{(0,1)}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Величина  $\varepsilon_{11}^{(2,0)}$  характеризует продольную деформацию пластины, однородную по ее толщине.

При  $l = 1, 2, \dots$  решения задачи (2.26) суть

$$\begin{aligned} P_{13}^{(3,1)} &= -\frac{1}{2} (\lambda' + 2\mu) i k^3 \tilde{u}_3^{(0,1)} \left( \eta^2 - \frac{1}{4} \right) \varepsilon_1 \varepsilon_2^2, \\ P_{13}^{(3,l)} &= 0, \quad l = 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (2.29)$$

Когда  $l = 0$ , вместо (2.26) имеем

$$\partial_\eta P_{13}^{(3,0)} = 0, \quad P_{13}^{(3,0)} \Big|_{\eta=\pm 1/2} = 0, \quad (2.30)$$

а потому  $P_{13}^{(3,0)} \equiv 0$ .

Установленные ограничения на  $\eta_{ij}^{(2,l)}$  (см. (2.28)) позволяют вернуться к уравнениям (2.24) и разрешить их относительно полей  $\bar{u}_3^{(2,l)}$ .



Используя (2.21), перепишем (2.24) через смещения. В результате интегрирования полученных уравнений вычисляются поправки  $\bar{u}_3^{(2,l)}$ :

$$\begin{aligned}\frac{a}{d}\bar{u}_3^{(2,0)} &= -\frac{\lambda'}{2\mu}\varepsilon_{11}^{(2,0)}\eta - (\varepsilon_1 k)^2 \eta \left| \tilde{u}_3^{(0,1)} \right|^2 + \frac{a}{d}\tilde{u}_3^{(2,0)}, \\ \bar{u}_3^{(2,1)} &= -\frac{\lambda'}{4\mu}(\varepsilon_2 k \eta)^2 \tilde{u}_3^{(0,1)} + \tilde{u}_3^{(2,1)}, \\ \bar{u}_3^{(2,2)} &= \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 k^2}{2} \left( \tilde{u}_3^{(0,1)} \right)^2 \eta + \tilde{u}_3^{(2,2)}, \\ \bar{u}_3^{(2,l)} &= \tilde{u}_3^{(2,l)}, \quad l = 3, 4, \dots,\end{aligned}\tag{2.31}$$

где  $\tilde{u}_3^{(2,l)}$  ( $l = 0, 1 \dots$ ) — функции, возникшие при интегрировании.

Чтобы продвинуться дальше, заметим, что, с одной стороны, компоненты  $P_{13}^{(3,l)}$  уже найдены ((2.29), (2.30)), а с другой, — они могут быть выражены через деформации (см. (2.22)):

$$P_{13}^{(3,l)} = 2\mu\eta_{13}^{(n,l)}.\tag{2.32}$$

Из уравнений (2.32) могут быть найдены не только деформации  $\eta_{13}^{(3,l)}$ , но и, согласно (2.18), продольные смещения  $\bar{u}_1^{(3,l)}$ :

$$\begin{aligned}\bar{u}_1^{(3,0)} &= \tilde{u}_1^{(3,0)}, \\ \bar{u}_1^{(3,1)} &= -\varepsilon_2^3 i k^3 \left[ \left( 1 + \frac{\lambda'}{4\mu} \right) \frac{\eta^3}{3} - \frac{1}{4} \left( 1 + \frac{\lambda'}{2\mu} \eta \right) \right] \tilde{u}_3^{(0,1)} + \\ &\quad + \varepsilon_2 i k \eta \left[ -\tilde{u}_3^{(2,1)} + \left( 1 + \frac{\lambda'}{2\mu} \right) \varepsilon_{11}^{(2,0)} \tilde{u}_3^{(0,1)} \right] + \tilde{u}_1^{(3,1)}, \\ \bar{u}_1^{(3,2)} &= \frac{i k^3 \varepsilon_1 \varepsilon_2^2 \lambda'}{4\mu} \eta^2 \left[ \tilde{u}_3^{(0,1)} \right]^2 - 2i k \varepsilon_2 \eta \tilde{u}_3^{(2,2)} + \tilde{u}_1^{(3,2)}, \\ \bar{u}_1^{(3,l)} &= -\varepsilon_2 i k l \tilde{u}_3^{(2,l)} \eta + \tilde{u}_1^{(3,l)}, \quad l = 3, 4, \dots\end{aligned}\tag{2.33}$$

После интегрирования уравнений (2.32) снова появились произвольные функции  $\tilde{u}_1^{(3,l)}$ .

Общая схема вычислений будет самосогласованной, если функции, которые были произвольными в первых порядках теории возмущений, в конечном счете объединятся в блоки так, что получится замкнутая система уравнений, определяющая эволюцию первых из них. Эта система уравнений и будет эффективной моделью нелинейной динамики пластины. Процедура замыкается лишь при верном выборе медленных переменных. Связи между функциями возникают из условий разрешимости краевых задач теории возмущений. Замечательно, что предложенная теория возмущений удовлетворяет сформулированному критерию. Необходимые вычисления просты, но утомительны и осуществляются по уже изложенной схеме. Перечислим ключевые моменты.

Для задачи

$$\begin{aligned} \partial_\eta P_{13}^{(4,l)} + \varepsilon_2 ikl P_{11}^{(3,l)} + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \partial_X P_{11}^{(2,l)} &= 0; \\ P_{13}^{(4,l)} \Big|_{\eta=\pm 1/2} &= 0, \quad l = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (2.34)$$

условия разрешимости имеют вид

$$ikl \langle P_{11}^{(3,l)} \rangle + \varepsilon_1 \partial_X \langle P_{11}^{(2,l)} \rangle = 0. \quad (2.35)$$

Здесь и далее для сокращения записи использовано обозначение

$$\langle f \rangle = \int_{-1/2}^{1/2} f(\eta) d\eta.$$

Из (2.35) следуют не только алгебраические связи между функциями, возникшими при интегрировании, но и дифференциальное уравнение

$$\partial_X \sigma_{11}^{(2,0)} = 0, \quad \sigma_{11}^{(2,0)} = (\lambda' + 2\mu) \varepsilon_{11}^{(2,0)}. \quad (2.36)$$

Поскольку внешнее напряжение  $[T_{11}^{\text{ext}}]^{(2,0)}$  на бесконечности равно константе, из (1.12), (2.36) заключаем, что

$$\sigma_{11}^{(2,0)} = \varepsilon_1^2 (\lambda' + 2\mu) \left[ \partial_X \bar{u}_1^{(0,0)} + k^2 \left| \tilde{u}_3^{(0,1)} \right|^2 \right] = [T_{11}^{\text{ext}}]^{(2,0)} = \text{const.} \quad (2.37)$$

Используя найденные ограничения, из (2.34) вычисляем компоненты  $P_{13}^{(4,l)}$ . Не равной нулю оказывается лишь  $P_{13}^{(4,1)}$ , причем

$$P_{13}^{(4,1)} = -i \varepsilon_1 \partial_X \partial_k P_{13}^{(3,1)}. \quad (2.38)$$

Для построения эффективной модели этой информации о  $P_{13}^{(4,l)}$  достаточно. Можно не вычислять поправки  $\bar{u}_1^{(4,l)}$ , поскольку они не входят в уравнения изгибов пластины. В эффективные уравнения не входят также поля  $\bar{u}_3^{(3,l)}$ , поэтому можно избежать интегрирования системы (2.24) при  $n = 3$ .

Начиная с четвертого порядка теории возмущений, проявятся реакции подложек на изгибы пластины. Поясним сказанное на примере краевой задачи

$$\varepsilon_2 ikl P_{31}^{(3,l)} + \partial_\eta P_{33}^{(4,l)} = 0; \quad P_{33}^{(4,l)} \Big|_{\eta=\pm 1/2} = \check{P}_{33}^{(1,l)} \Big|_{\xi_3^{\geq 0}}. \quad (2.39)$$

На поверхности пластины  $\eta = \pm 1/2$  действуют напряжения  $\check{P}_{33}^{(1,l)} \Big|_{\xi_3^{\geq 0}}$ , вызванные деформациями подложек. Поэтому варианты теории возмущений (для пластины и подложек) взаимосвязаны. Успех метода

обусловлен тем, что краевые задачи для подложек решаются на основе уже вычисленных смещений и деформаций на поверхностях  $\eta = \pm 1/2$  пластины. Теорию возмущений для подложек рассмотрим в следующем разделе, чтобы не прерывать анализа динамики пластины, а здесь приведем результаты решения краевых задач для подложек. Оказывается, что на границе пластины отлична от нуля только компонента  $\check{P}_{33}^{(1,1)}$ , причем она определяется через поперечные смещения пластины  $\tilde{u}_3^{(0,1)}$ :

$$\check{P}_{33}^{(1,1)} \Big|_{\xi_3^{\pm}=0} = \mp \frac{1}{2} (\check{\lambda}' + 2\check{\mu}) \varepsilon_1 |k| \tilde{u}_3^{(0,1)}(X, T). \quad (2.40)$$

Заметим также, что, начиная с  $n = 3$ , поля  $P_{13}^{(n,l)}$  и  $P_{31}^{(n,l)}$  не равны друг другу. Однако, согласно (1.14), они связаны между собой так, что по известным компонентам  $P_{13}^{(n,l)}$  всегда можно найти  $P_{31}^{(n,l)}$ . В частности, используя (2.29), (2.30), нетрудно убедиться, что при  $l \geq 0$  отличны от нуля две из функций  $P_{31}^{(3,l)}$ :

$$\begin{aligned} P_{31}^{(3,1)} &= -\frac{1}{2} (\lambda' + 2\mu) \varepsilon_1 \varepsilon_2^2 \left( \eta^2 - \frac{1}{4} \right) i k^3 \tilde{u}_3^{(0,1)} + \\ &\quad + i k \varepsilon_1 \tilde{u}_3^{(0,1)} [T_{11}^{\text{ext}}]^{(2,0)}, \\ P_{31}^{(3,2)} &= (\lambda' + 2\mu) \varepsilon_1^2 \varepsilon_2 i k^3 [\tilde{u}_3^{(0,1)}]^2 \eta. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Интегрируя уравнение (2.39) с  $l = 1$  по толщине пластины, получим условие его разрешимости

$$[T_{11}^{\text{ext}}]^{(2,0)} = -\frac{\check{\lambda}' + 2\check{\mu}}{\varepsilon_2 |k|} - \frac{(\varepsilon_2 k)^2}{12} (\lambda' + 2\mu). \quad (2.42)$$

Соотношение (2.42) связывает внешнее сжимающее напряжение  $[T_{11}^{\text{ext}}]^{(2,0)}$  с волновым числом  $k$  нейтрально устойчивой линейной моды, ответственной за гофрирование пластины. Из условия экстремума функции  $[T_{11}^{\text{ext}}]^{(2,0)}(k)$  найдем минимальное напряжение  $T_{11}^{\text{lin}}$  и деформацию  $\varepsilon_{11}^{(2,0)}$ , начиная с которых наблюдается гофрировка пластины, и соответствующее ей значение волнового числа  $k_0$ :

$$\varepsilon_2^3 |k_0|^3 = 6 \frac{\check{\lambda}' + 2\check{\mu}}{\lambda' + 2\mu}, \quad T_{11}^{\text{lin}} = -\frac{(\varepsilon_2 k_0)^2}{4} (\lambda' + 2\mu) = (\lambda' + 2\mu) \varepsilon_{11}^{(2,0)}. \quad (2.43)$$

При такой нагрузке решения задачи (2.39) суть

$$\begin{aligned} P_{33}^{(4,1)} &= -\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2^3}{2} k_0^4 (\lambda' + 2\mu) \left[ \frac{\eta^3}{3} + \frac{\eta}{4} \right] \tilde{u}_3^{(0,1)}, \\ P_{33}^{(4,2)} &= (\varepsilon_1 \varepsilon_2)^2 k_0^4 (\lambda' + 2\mu) \left( \eta^2 - \frac{1}{4} \right) [\tilde{u}_3^{(0,1)}]^2, \\ P_{33}^{(4,l)} &\equiv 0, \quad l = 0, 3, 4, \dots \end{aligned} \quad (2.44)$$

Эффективные уравнения динамики изгибов пластины получатся в шестом порядке теории возмущений. При решении уравнений пятого и шестого порядков теории возмущений лучше изменить прежнюю схему вычислений, поскольку от этих порядков в эффективные уравнения войдут лишь деформации. Оказывается, можно не вычислять поля смещений и некоторые из компонент тензора деформаций. Обсудим последовательность расчетов на конечных этапах вычислений.

Компоненты  $P_{33}^{(4,l)}$  нами уже найдены (2.44). Поэтому из уравнения (1.14) можно выразить  $(\partial\varphi/\partial\eta_{33})^{(4,l)}$  и  $\eta_{33}^{(4,l)}$  через известные величины. В частности, функции  $(\partial\varphi/\partial\eta_{33})^{(4,l)}$  определяются путем выделения коэффициентов при линейно независимых гармониках в соотношении

$$\left[ \frac{\partial\varphi}{\partial\eta_{33}} \right]^{(4)} = P_{33}^{(4)} - \varepsilon_1 \partial_1 \bar{u}_3^{(0)} P_{13}^{(3)}.$$

Компоненты  $\eta_{11}^{(n,l)}$  ( $n = 3, 4$ ) выражаются через уже введенные поля смещений с помощью первого из уравнений (2.18). Этим данным достаточно, чтобы найти функции  $(\partial\varphi/\partial\eta_{11})^{(4,l)}$ . Для вычисления  $(\partial\varphi/\partial\eta_{11})^{(4,l)}$  можно получить формулу

$$\left( \frac{\partial\varphi}{\partial\eta_{11}} \right)^{(4)} = (\lambda' + 2\mu)\eta_{11}^{(4)} + \frac{\lambda'}{2\mu} \left( \frac{\partial\varphi}{\partial\eta_{33}} \right)^{(4)} + (3a_1 + a_2) \left[ \eta_{11}^{(2)} \right]^2,$$

где  $a_1$  и  $a_2$  — эффективные упругие модули пластины (1.47), причем

$$3a_1 + a_2 = (A + 2B) \left[ 1 - \left( \frac{\lambda'}{2\mu} \right)^3 \right] + (B + C) \left[ 1 - \frac{\lambda'}{2\mu} \right]^3.$$

После чего поля  $P_{11}^{(n,l)}$  ( $n = 3, 4$ ) находятся из соотношений (2.25) и (1.14).

В результате в уравнениях пятого порядка теории возмущений,

$$\varepsilon_2 i k_0 l P_{11}^{(4,l)} + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \partial_X P_{11}^{(3,l)} + \partial_\eta P_{13}^{(5,l)} = 0, \quad (2.45)$$

неизвестными являются  $P_{13}^{(5,l)}$ . Граничные условия для системы (2.45) следуют из формул (2.13) ( $k = 5$ ) и (2.40). Нетрудно показать, что при  $l \geq 0$  на границе пластины отлична от нуля только

$$P_{13}^{(5,2)}(\eta = \pm 1/2) = \pm \frac{\varepsilon_1^2 \varepsilon_2^3 i k_0^5}{12} (\lambda' + 2\mu) \left[ \tilde{u}_3^{(0,1)} \right]^2. \quad (2.46)$$

Условия разрешимости уравнений (2.45) дают алгебраические связи между функциями, которые были произвольными в первых порядках теории возмущений, и дифференциальное уравнение

$$\partial_X P_{11}^{(3,0)} = 0. \quad (2.47)$$

Дальнейшие вычисления несколько упростятся, когда нет продольных нагрузок порядка  $O(\varepsilon_1^3)$ . В этом случае уравнение (2.47) имеет тривиальное решение

$$P_{11}^{(3,0)} = 0,$$

которое также связывает функции, возникшие при интегрировании. Важно, что все связи самосогласованны и непротиворечивы.

Решения краевых задач (2.45), (2.46) дают выражения для полей  $P_{13}^{(5,l)}$ . При  $l \geq 0$  отличны компоненты  $P_{13}^{(5,l)}$  с  $l = 1, 2$ . Для построения модели изгибов пластины потребуется только  $P_{13}^{(5,1)}$ , причем не сама функция, а ее среднее значение,

$$\langle P_{13}^{(5,1)} \rangle = \int_{-1/2}^{1/2} P_{13}^{(5,1)}(\eta) d\eta.$$

Нечетная часть функции  $P_{13}^{(5,1)}(\eta)$  обращается в нуль после интегрирования по  $\eta$ . Поэтому для дальнейшего анализа достаточно вычислить четную часть  $P_{13}^{(5,1)}(\eta)$ :

$$P_{13}^{(5,1)\text{even}} = \varepsilon_2 i k_0 \int_{\eta}^{1/2} P_{11}^{(4,1)\text{odd}} d\eta' + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \partial_X \int_{\eta}^{1/2} P_{11}^{(3,1)\text{odd}} d\eta', \quad (2.48)$$

где

$$f^{\text{odd}}(\eta) = \frac{1}{2}[f(\eta) - f(-\eta)], \quad f^{\text{even}}(\eta) = \frac{1}{2}[f(\eta) + f(-\eta)].$$

Компонента  $P_{31}^{(5,1)}$  выражается через  $P_{13}^{(5,1)}$  и другие известные поля с помощью (1.14). Для построения упрощенной модели изгибов пластины потребуется  $\langle P_{31}^{(5,1)} \rangle$ . Приведем окончательный результат:

$$\begin{aligned} \langle P_{31}^{(5,1)} \rangle &= \varepsilon_1 i k_0 \tilde{u}_3^{(0,1)} \left[ \sigma_{11}^{(4,0)} + (\varepsilon_2 k_0)^4 p \right] - \\ &- \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2^2}{6} i k_0^3 (\lambda' + 2\mu) \tilde{u}_3^{(2,1)} - \frac{\varepsilon_1^3 \varepsilon_2^2}{4} i k_0 (\lambda' + 2\mu) \partial_X^2 \tilde{u}_3^{(0,1)} + \\ &+ \varepsilon_1 \frac{g_v^{(4)}}{i k_0} \left| \tilde{u}_3^{(0,1)} \right|^2 \tilde{u}_3^{(0,1)}, \quad (2.49) \end{aligned}$$

где

$$p = \frac{1}{8} \left[ \left( 1 + \frac{\lambda'}{2\mu} \right) \left( \frac{\lambda'}{6} - \frac{3}{5}\mu \right) + \frac{3a_1 + a_2}{6} \right].$$

Параметр

$$g_v^{(4)} = \frac{(\varepsilon_1 \varepsilon_2 k_0^3)^2}{2} \left[ \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\lambda'}{2\mu} \right) \left( \lambda' - \frac{5}{3}\mu \right) - \frac{3a_1 + a_2}{3} \right]$$

характеризует взаимодействие поперечных мод в объеме пластины. Величина

$$\sigma_{11}^{(4,0)} = (\lambda' + 2\mu)\varepsilon_{11}^{(4,0)}$$

определяется через однородную по толщине пластины часть  $\varepsilon_{11}^{(4,0)}$  тензора продольной деформации  $\eta_{11}^{(4,0)}$  и представляет комбинацию функций, которые были произвольными в первых порядках теории возмущений:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}^{(4,0)} = & \varepsilon_1^2 \partial_X \bar{u}_1^{(2,0)} + \varepsilon_1^4 \left\{ \left| \partial_X \bar{u}_3^{(0,1)} \right|^2 + \frac{1}{2} \left[ \partial_X \bar{u}_1^{(0,0)} \right]^2 \right\} + \\ & + (\varepsilon_1 k_0)^2 \left\{ \tilde{u}_3^{(0,1)} \tilde{u}_3^{(2,-1)} + \tilde{u}_3^{(0,-1)} \tilde{u}_3^{(2,1)} + 4 \left| \tilde{u}_1^{(1,2)} \right|^2 \right\}. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Интересно, что для построения эффективной модели в представлении (2.50) нет необходимости, так как условия разрешимости уравнений шестого порядка теории возмущений дают замкнутую систему для вычисления  $\sigma_{11}^{(4,0)}$ ,  $\tilde{u}_3^{(1,0)}$  и  $\tilde{u}_1^{(0,0)}$ .

Обсудим оставшиеся уравнения пятого порядка

$$\varepsilon_2 i k_0 l P_{31}^{(4,l)} + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \partial_X P_{31}^{(3,l)} + \partial_\eta P_{33}^{(5,l)} = 0. \quad (2.51)$$

В уравнениях (2.51) неизвестными являются  $P_{33}^{(5,l)}$ , поскольку поля  $P_{31}^{(3,l)}$  уже найдены (2.41), а  $P_{31}^{(4,l)}$  связаны с  $P_{13}^{(4,l)}$  (2.38) с помощью (1.14). При  $l \geq 0$  отличны от нуля три компоненты  $P_{31}^{(4,l)}$ :

$$\begin{aligned} P_{31}^{(4,0)} &= -\varepsilon_1^3 \varepsilon_2 k_0^2 \eta (\lambda' + 2\mu) \partial_X \left| \tilde{u}_3^{(0,1)} \right|^2, \\ P_{31}^{(4,1)} &= \varepsilon_1^2 \partial_X \tilde{u}_3^{(0,1)} T_{11}^{\text{lin}} - i \varepsilon_1 \partial_X \partial_{k_0} P_{13}^{(3,1)}, \\ P_{31}^{(4,2)} &= \frac{3}{2} \varepsilon_1^3 \varepsilon_2 k_0^2 \eta (\lambda' + 2\mu) \partial_X \left[ \tilde{u}_3^{(0,1)} \right]^2. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Согласно (2.14) для того, чтобы выписать граничные условия для уравнений (2.51), следует найти смещения подложек и вычислить значения компонент  $P_{33}^{(5,l)}$  на границе пластины. Можно показать, что на границе пластины при  $l \geq 0$  отличны от нуля три из них:

$$\begin{aligned} P_{33}^{(5,0)} \Big|_{\eta=\pm 1/2} &= -4(\varepsilon_1 k_0)^2 \left( \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right)^2 (\check{\lambda} + \check{\mu}) \left| \tilde{u}_3^{(0,1)} \right|^2, \\ P_{33}^{(5,1)} \Big|_{\eta=\pm 1/2} &= -i \varepsilon_1 \partial_X \partial_{k_0} P_{33}^{(4,1)} \Big|_{\eta=\pm 1/2}, \\ P_{33}^{(5,2)} \Big|_{\eta=\pm 1/2} &= \frac{2(\varepsilon_1 k_0)^2 (\check{\lambda} + \check{\mu})}{(\gamma+1)^2} \{2Q + (\gamma-1)^2 \alpha_2\} \left[ \tilde{u}_3^{(0,1)} \right]^2. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Явный вид параметров  $Q$ ,  $\gamma$ ,  $\alpha_2$  приведен в следующем разделе (см. обозначения к формулам (2.66), (2.70), (2.76)).

Важно, что условия разрешимости краевых задач (2.51), (2.53) выполняются тождественно и не дают новых связей между функциями. В частности, условие разрешимости уравнения (2.51) с  $l = 1$ , в силу выбора  $k_0$ , сводится к тождеству

$$\partial_{|k|}[|k| - |k_0|]^2(|k| + 2|k_0|) \Big|_{k=k_0} \equiv 0.$$

Полное обсуждение результатов теории возмущений 5-го порядка приведено для иллюстрации непротиворечивости асимптотических разложений. Решения краевых задач (2.51), (2.53) не нужны для построения эффективной модели.

Из уравнений шестого порядка теории возмущений для построения модели изгибов пластины используются два:

$$\begin{aligned} \mu \varepsilon_2 \varepsilon_1^5 \partial_T^2 \tilde{u}_1^{(0,0)} &= \partial_\eta P_{13}^{(6,0)} + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \partial_X P_{11}^{(4,0)}, \\ \mu \varepsilon_2 \varepsilon_1^5 \partial_T^2 \tilde{u}_3^{(0,1)} &= \partial_\eta P_{33}^{(6,1)} + \varepsilon_2 i k_0 P_{31}^{(5,1)} + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \partial_X P_{31}^{(4,1)}. \end{aligned} \quad (2.54)$$

В уравнениях (2.54) функция  $P_{31}^{(4,1)}$  известна (2.52), компоненты  $P_{31}^{(5,1)}$  и  $P_{11}^{(4,0)}$  выражаются через найденные поля из соотношения (1.14). Неизвестными являются функции  $P_{13}^{(6,0)}$  и  $P_{33}^{(6,1)}$ . Используя формулы (2.13), (2.53), (2.40), можно получить краевое условие

$$P_{13}^{(6,0)} \Big|_{\eta=\pm 1/2} = 0. \quad (2.55)$$

Процедура расчета граничных значений  $P_{33}^{(6,1)}$  изложена в следующем разделе. Приведем результат:

$$\begin{aligned} P_{33}^{(6,1)} \Big|_{\eta=\pm 1/2} &= \pm \left\{ -\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2^3 k_0^4}{12} (\lambda' + 2\mu) \left[ \tilde{u}_3^{(2,1)} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \left( \frac{\varepsilon_2 k_0}{2} \right)^2 \left( 1 + \frac{\lambda'}{2\mu} \right) \tilde{u}_3^{(0,1)} \right] + \frac{g_s^{(4)} \varepsilon_1 \varepsilon_2}{2} \left| \tilde{u}_3^{(0,1)} \right|^2 \tilde{u}_3^{(0,1)} \right\}. \end{aligned} \quad (2.56)$$

Параметр  $g_s^{(4)}$  представляет интегральную характеристику трехслойной среды. Он связан с действующими на пластину со стороны подложек поверхностными силами, из-за которых происходит косвенное взаимодействие поперечных мод в пластине. Выражение для  $g_s^{(4)}$  приведено в следующем разделе (см. формулу (2.86) и приложение В).

Условия разрешимости краевых задач (2.54)–(2.56) суть

$$\begin{aligned} \mu \varepsilon_1^4 \partial_T^2 \tilde{u}_1^{(0,0)} &= \partial_X \left\{ \sigma_{11}^{(4,0)} + (\varepsilon_1 \varepsilon_2)^2 q \left| \tilde{u}_3^{(0,1)} \right|^2 \right\}, \\ \mu \varepsilon_1^4 \partial_T^2 \tilde{u}_3^{(0,1)} &= -k_0^2 \sigma_{11}^{(4,0)} \tilde{u}_3^{(0,1)} - k_0^2 (\varepsilon_2 k_0)^4 \left[ p - \frac{(\lambda' + 2\mu)^2}{48\mu} \right] \tilde{u}_3^{(0,1)} + \end{aligned} \quad (2.57)$$

$$+ \frac{(\varepsilon_1 \varepsilon_2 k_0)^2}{4} (\lambda' + 2\mu) \partial_X^2 \tilde{u}_3^{(0,1)} + g_{sv}^{(4)} \left| \tilde{u}_3^{(0,1)} \right|^2 \tilde{u}_3^{(0,1)}, \quad (2.58)$$

где

$$q = k_0^4 \left\{ \left( 1 + \frac{\lambda'}{2\mu} \right) \left( \frac{2}{3}\mu - \frac{\lambda'}{4} \right) + \frac{3a_1 + a_2}{6} \right\}, \quad g_{sv}^{(4)} = g_s^{(4)} + g_v^{(4)}.$$

Уравнения (2.37), (2.57), (2.58) образуют замкнутую систему для вычисления полей  $\sigma_{11}^{(4,0)}$ ,  $\bar{u}_3^{(0,1)}$ ,  $\bar{u}_1^{(0,0)}$ . Ее решения соответствуют разным начальным условиям и разным способам нагружения слоя среды при  $|X| \rightarrow \infty$ . Полученные модельные уравнения пригодны для изучения эволюции формы сильно нагруженного слоя среды и после потери им устойчивости, до тех пор, пока деформации остаются нелинейно-упругими и сравнительно малыми.

Когда деформация среднего слоя среды однородна на бесконечности, следует положить

$$\begin{aligned} \tilde{u}_3^{(0,1)} \Big|_{|X| \rightarrow \infty} &= \partial_T \bar{u}_1^{(0,0)} \Big|_{|X| \rightarrow \infty} = 0, \\ \sigma_{11}^{(4,0)} \Big|_{|X| \rightarrow \infty} &= (T_{11}^{\text{ext}})^{(4)} - (T_{11}^{\text{lin}})^2 \left\{ \frac{1}{2\mu} + \frac{3a_1 + a_2}{(\lambda' + 2\mu)^2} \right\}. \end{aligned} \quad (2.59)$$

Приведенное выражение для  $\sigma_{11}^{(4,0)} \Big|_{|X| \rightarrow \infty}$  проще всего получить методом работы [29]. Пусть на бесконечности к пластине приложено постоянное напряжение  $T_{ij}^{\text{ext}}$ , которое удовлетворяет условиям

$$T_{11}^{\text{ext}} = [T_{ij}^{\text{ext}}]^{(2)} + [T_{11}^{\text{ext}}]^{(4)} + \dots, \quad T_{33}^{\text{ext}} = T_{13}^{\text{ext}} = 0.$$

Верхние индексы указывают порядки слагаемых по параметрам  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ ,  $[T_{11}^{\text{ext}}]^{(2)} = T_{11}^{\text{lin}}$ . Координаты деформированной пластины имеют вид (здесь используются размерные переменные)

$$X_1 = \gamma_1 x_1, \quad X_3 = \gamma_3 x_3.$$

Параметры  $\gamma_1, \gamma_3$  и деформации пластины допускают разложения

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= 1 + \varkappa_1^{(2)} + \dots, \quad \gamma_3 = 1 + \varkappa_3^{(2)} + \dots; \\ \eta_{11} &= \varkappa_1^{(2)} + \eta_{11}^{(4)} + \dots, \quad \eta_{33} = \varkappa_3^{(2)} + \eta_{33}^{(4)} + \dots, \quad \eta_{13} = 0. \end{aligned}$$

Связи (1.14), (1.12) между напряжениями и смещениями сводятся к алгебраическим уравнениям

$$[T_{11}^{\text{ext}}]^{(2)} + [T_{11}^{\text{ext}}]^{(4)} + \dots = \frac{\gamma_1}{\gamma_3} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta_{11}}, \quad T_{33}^{\text{ext}} = \frac{\gamma_3}{\gamma_1} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta_{33}}. \quad (2.60)$$



Система (2.60) решается методом последовательных приближений. Сначала вычисляются постоянные

$$\varkappa_1^{(2)} = \frac{1}{\lambda' + 2\mu} T_{11}^{\text{lin}}, \quad \varkappa_3^{(2)} = -\frac{\lambda'}{2\mu} \varkappa_1^{(2)},$$

затем — поправка  $(\lambda' + 2\mu)\eta_{11}^{(4)}$ , которую следует отождествить с  $\sigma_{11}^{(4,0)} \Big|_{|X| \rightarrow \infty}$  (см. (2.59)).

**2.3.2. Теория возмущений для подложек.** При расчете смещений  $\bar{v}_i$  используются другие медленные координаты, которые лучше отражают пространственно-временной отклик полубесконечных подложек на изгибы пластины. Вычисление компонент  $\bar{v}_i^{(n)}$  в разложении (2.6) сводится к рекуррентному решению квазистатических краевых задач линейной теории упругости, в которые медленное время входит в качестве параметра (см. приложение Б). При этом уравнения, определяющие поля  $\bar{v}_i^{(0)}$ , однородны, а уравнения для расчета функций  $\bar{v}_i^{(n)}$  с  $n \geq 1$  содержат объемные силы, которые индуцированы смещениями, найденными в предыдущих порядках теории возмущений. Конкретизация формы решения (2.16), связанная с выделением резонансной моды и введением медленной координаты  $X$ , позволяет избежать появления сложных интегралов при построении упрощенной модели. Краевые задачи для вычисления компонент  $\bar{v}_i^{(n,l)}$  с  $l \neq 0$  представляют собой преобразования Фурье по переменной  $\xi_1$  от линейных краевых задач с источниками. Расчет функций  $\bar{v}_i^{(n,l)}$  сводится к интегрированию обыкновенных дифференциальных уравнений.

Так же, как при анализе динамики пластины, выбранная форма смещений в подложках (2.16) ведет к представлениям (2.17) для тензоров  $\check{P}_{ij}$  и  $\check{\eta}_{ij}$ . Однако связь между коэффициентами другая, поскольку получается в результате подстановки (2.16), (2.17) в соотношения

$$\begin{aligned} \check{\eta}_{11} &= \varepsilon_1 \left[ \widehat{D}_1 \bar{v}_1 + \frac{\varepsilon_1}{2} (\widehat{D}_1 \bar{v}_n)^2 \right], \\ \check{\eta}_{13} &= \frac{1}{2} \varepsilon_1 \left[ \widehat{D}_1 \bar{v}_3 + \partial_3 \bar{v}_1 + \varepsilon_1 (\widehat{D}_1 \bar{v}_n) \partial_3 \bar{v}_n \right], \\ \check{\eta}_{33} &= \varepsilon_1 \left[ \partial_3 \bar{v}_3 + \frac{\varepsilon_1}{2} (\partial_3 \bar{v}_n)^2 \right], \end{aligned}$$

которые отличаются от (2.18). Компоненты  $\check{\eta}_{ij}^{(n,l)}$ ,  $P_{ij}^{(n,l)}$  ( $n \geq 1$ ) являются функциями координат  $\xi_3$ ,  $X$ ,  $T$ .

При  $n = 0$ ,  $l \geq 0$  не равны нулю смещения  $\bar{v}_i^{(n,l)}$  с  $l = 1$ . Они определяются из однородных линейных уравнений с краевыми условиями

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{H}}_1 \mathbf{v}^{(0,1)} = 0; \quad \bar{v}_3^{(0,1)} \Big|_{\xi_3^{\geq 0}} &= \tilde{u}_3^{(0,1)}, \\ \partial_3 \bar{v}_1^{(0,1)} \Big|_{\xi_3^{\geq 0}} &= -ik_0 \tilde{u}_3^{(0,1)}, \quad \bar{v}_i^{(0,1)} \Big|_{\xi_3^{\geq \pm\infty}} = 0, \end{aligned} \quad (2.61)$$

где

$$\xi_3^{\geq} = \xi_3 - d/2l \geq 0, \quad \xi_3^{\leq} = \xi_3 + d/2l \leq 0.$$

Здесь и далее полезно ввести векторы  $\mathbf{v}^{(n,l)} = (\bar{v}_1^{(n,l)}, \bar{v}_3^{(n,l)})$  и матричный оператор  $\widehat{\mathbf{H}}_l$ :

$$\widehat{\mathbf{H}}_l = \begin{pmatrix} \check{\mu} \partial_3^2 - (\check{\lambda} + 2\check{\mu})(k_0 l)^2 & (\check{\lambda} + \check{\mu})i(k_0 l) \partial_3 \\ (\check{\lambda} + \check{\mu})i(k_0 l) \partial_3 & (\check{\lambda} + 2\check{\mu}) \partial_3^2 - \check{\mu}(k_0 l)^2 \end{pmatrix}. \quad (2.62)$$

В дальнейшем потребуются смещения  $\mathbf{v}^{(0,1)}$  и их производные  $\partial_3 \mathbf{v}^{(0,1)}$ . Сформулируем задачу (2.61) так, чтобы в процессе ее решения вычислить все необходимые поля. Введем четырехкомпонентный вектор  $\mathbf{w}^{(0,1)} = (\mathbf{v}^{(0,1)}, \partial_3 \mathbf{v}^{(0,1)})$ . В терминах  $\mathbf{w}^{(0,1)}$  задача (2.61) сводится к системе уравнений первого порядка с краевыми условиями,

$$\begin{aligned} [\partial_3 - \mathbf{L}(k_0)] \mathbf{w}^{(0,1)} = 0; \quad \mathbf{w}^{(0,1)} \Big|_{\xi_3^{\geq \pm\infty}} &= 0, \\ w_2^{(0,1)} \Big|_{\xi_3^{\geq 0}} &= \tilde{u}_3^{(0,1)}, \quad w_3^{(0,1)} \Big|_{\xi_3^{\geq 0}} = -ik_0 \tilde{u}_3^{(0,1)}. \end{aligned} \quad (2.63)$$

Явный вид матрицы  $\mathbf{L}(k_0)$  размерности  $4 \times 4$  приведен в приложении Б. Важно, что собственные значения  $\mathbf{L}(k_0)$  двукратно вырождены и равны  $\pm |k_0|$ . Поэтому матрица  $\mathbf{L}(k_0)$  не сводится к диагональной форме посредством невырожденного преобразования. В то же время существует матрица  $\mathbf{T}$  такая, что  $\mathbf{L}(k_0)$  приводится к блочно-диагональной форме Жордана с помощью преобразования подобия:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^{-1} \mathbf{L}(k_0) \mathbf{T} = \mathbf{L}_J(k_0) &= \begin{pmatrix} |k_0| \mathbf{E} + \mathbf{n} & 0 \\ 0 & -|k_0| \mathbf{E} + \mathbf{n} \end{pmatrix}, \\ \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{n} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.64)$$

Явный вид матрицы  $\mathbf{T}$  приведен в приложении Б.

Представление (2.64) позволяет найти общее решение матричного уравнения (2.63)

$$\mathbf{w}^{(0,1)} = \mathbf{T} \exp \left\{ \mathbf{L}_J(k_0) \xi_3^{\geq} \right\} \mathbf{c}. \quad (2.65)$$

Величина  $\exp(\mathbf{L}_J(k_0)\xi)$  факторизуется в произведение коммутирующих матриц:

$$\exp(\mathbf{L}_J(k_0)\xi) = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & 0 \\ 0 & \mathbf{A} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{|k_0|\xi}\mathbf{E} & 0 \\ 0 & e^{-|k_0|\xi}\mathbf{E} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & \xi \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Краевые условия (2.63) определяют компоненты постоянного вектора  $\mathbf{s}$ . Из (2.65) путем алгебраических вычислений найдены  $\mathbf{v}^{(0,1)}$  и  $\partial_3\mathbf{v}^{(0,1)}$ .

Смещения для  $\mathbf{v}^{(0,1)}$  имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^{(0,1)} &= \tilde{u}_3^{(0,1)} \mathbf{s}, \\ \mathbf{s} &= \frac{\exp(-|k_0|\xi_3^>l)}{\gamma+1} \begin{pmatrix} i \operatorname{sign} \xi_3^>l \cdot \sigma [\gamma-1-2|k_0\xi_3^>l|] \\ \gamma+1+2|k_0\xi_3^>l| \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.66)$$

где

$$\sigma = \operatorname{sign} k_0, \quad \gamma = \frac{\check{\lambda} + 3\check{\mu}}{\check{\lambda} + \check{\mu}}.$$

Используя полученные результаты, определяются в явном виде компоненты тензора деформации  $\check{\eta}_{ij}^{(1,1)}$ :

$$\begin{aligned} \check{\eta}_{11}^{(1,1)} &= -\frac{\varepsilon_1|k_0|\operatorname{sign} \xi_3^>l}{\gamma+1} \chi^{(0,1)} [\gamma-1-2|k_0\xi_3^>l|], \\ \check{\eta}_{33}^{(1,1)} &= -\frac{\varepsilon_1|k_0|\operatorname{sign} \xi_3^>l}{\gamma+1} \chi^{(0,1)} [\gamma-1+2|k_0\xi_3^>l|], \\ \check{\eta}_{13}^{(1,1)} &= \frac{2ik_0\varepsilon_1}{\gamma+1} |k_0\xi_3^>l| \chi^{(0,1)}, \quad \chi^{(0,1)} = \exp\{-|k_0\xi_3|\} \tilde{u}_3^{(0,1)}, \end{aligned}$$

а также граничные значения функции  $\check{P}_{33}^{(1,1)}$ ,

$$\check{P}_{33}^{(1,1)} \Big|_{\xi_3^>=0} = \left( \frac{\partial\varphi}{\eta_{33}} \right)^{(1,1)} \Big|_{\xi_3^>=0} = \mp \frac{\varepsilon_1|k_0|}{2} (\lambda' + 2\mu) \tilde{u}_3^{(0,1)}. \quad (2.67)$$

Соотношение (2.67) дает нормальные напряжения на поверхности пластины, вызванные деформациями подложек. Связь этих напряжений с изгибами пластины  $\tilde{u}_3^{(0,1)}$  была использована в предыдущем разделе.

Рассмотрим уравнения второго порядка теории возмущений,

$$ik_0l\check{P}_{i1}^{(2,l)} + \varepsilon_1\partial_X\check{P}_{i1}^{(1,l)} + \partial_3\check{P}_{i3}^{(2,l)} = 0. \quad (2.68)$$

Краевые условия для них определяются из (2.10) и (2.13):

$$\begin{aligned} \check{v}_3^{(1,l)} \Big|_{\xi_3^>=0} &= 0; \quad \check{P}_{13}^{(2,l)} \Big|_{\xi_3^>=0} = 0, \quad l \neq 2, \\ \check{P}_{13}^{(2,2)} \Big|_{\xi_3^>=0} &= \pm \frac{ik_0|k_0|\varepsilon_1^2}{2} (\lambda' + 2\mu) (\tilde{u}_3^{(0,1)})^2. \end{aligned} \quad (2.69)$$

Задача (2.68), (2.69) имеет отличные от нуля решения для  $\mathbf{v}^{(1,l)}$  только при  $|l| \leq 2$ .

Когда  $l = 0$ , система (2.68) сводится к уравнениям

$$\partial_3 \check{P}_{i3}^{(2,0)} = 0,$$

из которых следует, что  $\check{P}_{i3}^{(2,0)} = \text{const}$ . Постоянные интегрирования полагаются равными нулю, чтобы удовлетворить (2.69) и условию отсутствия напряжений при  $\xi_3 \rightarrow \pm\infty$ . Из уравнений  $\check{P}_{i3}^{(2,0)} = 0$  вычисляются смещения  $\mathbf{v}^{(1,0)}$ :

$$\begin{aligned} \bar{v}_3^{(1,0)} = & -\frac{8\varepsilon_1 k_0^2}{(\gamma+1)^3} \int_0^{\xi_3^{\geq}} |\chi^{(0,1)}|^2 \left\{ \gamma^2 + 1 + (\gamma-1)^2(\alpha_2+1) + \right. \\ & \left. + 2(\gamma+\alpha_1) [(\gamma-1)|k_0\xi_3| + 2|k_0\xi_3|^2] \right\} d\xi_3, \end{aligned} \quad (2.70)$$

$$\bar{v}_1^{(1,0)} = 0,$$

где

$$\alpha_1 = \frac{\check{A} + 2\check{B}}{\check{\lambda} + \check{\mu}}, \quad \alpha_2 = \frac{3\check{B} + 2\check{C} + \check{A}/2}{\check{\lambda} + \check{\mu}}.$$

В дальнейшем потребуется не сама функция  $\bar{v}_3^{(1,0)}$ , а ее производная  $\partial_3 \bar{v}_3^{(1,0)}$ .

При  $l = 1$  систему (2.68) можно записать в форме

$$\widehat{\mathbf{H}}_1 \mathbf{v}^{(1,1)} - i\varepsilon_1 \left( \partial_{k_0} \widehat{\mathbf{H}}_1 \right) \partial_X \mathbf{v}^{(0,1)} = 0. \quad (2.71)$$

С целью найти решение уравнений (2.71) продифференцируем тождество

$$\widehat{\mathbf{H}}_1 \mathbf{v}^{(0,1)} = 0$$

по параметру  $k_0$ :

$$\widehat{\mathbf{H}}_1 \partial_{k_0} \mathbf{v}^{(0,1)} + \left( \partial_{k_0} \widehat{\mathbf{H}}_1 \right) \mathbf{v}^{(0,1)} = 0. \quad (2.72)$$

Из сравнения формул (2.71), (2.72) заключаем:

$$\mathbf{v}^{(1,1)} = -i\varepsilon_1 \partial_{k_0} \partial_X \mathbf{v}^{(0,1)}. \quad (2.73)$$

Прямой проверкой можно убедиться, что решение (2.73) удовлетворяет необходимым граничным условиям. Нетрудно также показать, что

$$\check{\eta}_{ij}^{(2,1)} = -i\varepsilon_1 \partial_{k_0} \partial_X \check{\eta}_{ij}^{(1,1)}, \quad \check{P}_{ij}^{(2,1)} = -i\varepsilon_1 \partial_{k_0} \partial_X \check{P}_{ij}^{(1,1)}. \quad (2.74)$$

Значения  $\check{P}_{33}^{(2,1)} \Big|_{\xi_3^{\geq}=0}$  были использованы в предыдущем разделе при анализе динамики пластины.

При  $l = 2$  система (2.68) имеет вид:

$$\widehat{\mathbf{H}}_2 \mathbf{v}^{(1,2)} = \mathbf{f}^{(1,2)}, \quad \mathbf{f}^{(1,2)} = -\frac{1}{\varepsilon_1} \begin{pmatrix} 2ik_0 \pi_{11}^{(2,2)} + \partial_3 \pi_{13}^{(2,2)} \\ 2ik_0 \pi_{31}^{(2,2)} + \partial_3 \pi_{33}^{(2,2)} \end{pmatrix}, \quad (2.75)$$

где  $\pi_{ij}^{(2,2)}$  — нелинейная часть тензора  $\check{P}_{ij}^{(2,2)}$ , которая выражается через уже известные поля ( $\pi_{ij}^{(2,2)} \sim \varepsilon_1^2 [\chi^{(0,1)}]^2$ ). В приложении Б показано, как с помощью матричной функции Грина найти решение системы (2.75), удовлетворяющее условиям (2.69) и требованию

$$\mathbf{v}^{(1,2)} \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad |\xi_3| \rightarrow \infty.$$

Приведем результат:

$$\begin{pmatrix} \bar{v}_1 \\ \bar{v}_3 \end{pmatrix}^{(1,2)} = -\frac{\varepsilon_1 k_0 (\gamma + Q)}{(\gamma + 1)^2} [\chi^{(0,1)}]^2 \begin{pmatrix} i \left[ 1 + 2 \left| k_0 \xi_3^{\geq} \right| \right] \\ -2k_0 \xi_3^{\geq} \end{pmatrix}, \quad (2.76)$$

где

$$Q = \gamma^2 + 2\gamma - 2 - (\gamma - 1)^2 \alpha_2 + (\gamma - 1) \alpha_1.$$

Из (1.14), (2.76) определяется функция  $\check{P}_{33}^{(2,2)}$  и ее граничные значения:

$$\check{P}_{33}^{(2,2)} \Big|_{\xi_3^{\geq}=0} = \frac{2(\varepsilon_1 k_0)^2 (\check{\lambda} + \check{\mu}) (\tilde{u}_3^{(0,1)})^2}{(\gamma + 1)^2} \{2Q + (\gamma - 1)^2 (\alpha_2 + 1)\},$$

которые необходимы при формулировке краевых условий в следующем порядке теории возмущений.

Для построения модели изгибов пластины осталось найти граничные значения функции  $\check{P}_{33}^{(3,1)}$ . Замечательно, что для этого необязательно рассчитывать смещения  $\mathbf{v}^{(2,1)}$ .

Для определения  $\check{P}_{33}^{(3,1)} \Big|_{\xi_3^{\geq}=0}$  обратимся к уравнениям

$$ik_0 \check{P}_{i1}^{(3,1)} + \varepsilon_1 \partial_X \check{P}_{i1}^{(2,1)} + \partial_3 \check{P}_{i3}^{(3,1)} = 0, \quad (2.77)$$

которые полезно переписать в виде

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{H}}_1 \mathbf{v}^{(2,1)} - \varepsilon_1^2 \left( \partial_{k_0} \widehat{\mathbf{H}}_1 \right) \partial_{k_0} \partial_X^2 \mathbf{v}^{(0,1)} - \\ - \frac{\varepsilon_1^2}{2} \left( \partial_{k_0}^2 \widehat{\mathbf{H}}_1 \right) \partial_X^2 \mathbf{v}^{(0,1)} + \frac{1}{\varepsilon_1} [ik_0 \mathbf{a} + \partial_3 \mathbf{b}] = 0. \end{aligned} \quad (2.78)$$

Здесь

$$\mathbf{a} = \left( \pi_{11}^{(3,1)}, \pi_{31}^{(3,1)} \right)^T, \quad \mathbf{b} = \left( \pi_{13}^{(3,1)}, \pi_{33}^{(3,1)} \right)^T,$$

где  $\pi_{ij}^{(3,1)}$  — нелинейная часть тензора  $\check{P}_{ij}^{(3,1)}$ , которая определяется через уже найденные поля ( $\pi_{ij}^{(3,1)} \sim \varepsilon_1^3 |\chi^{(0,1)}|^2 \chi^{(0,1)}$ ). Продифференцировав дважды по  $k_0$  тождество  $\widehat{\mathbf{H}}_1 \mathbf{v}^{(0,1)} = 0$ , получим

$$\left( \partial_{k_0}^2 \widehat{\mathbf{H}}_1 \right) \mathbf{v}^{(0,1)} + 2 \left( \partial_{k_0} \widehat{\mathbf{H}}_1 \right) \left( \partial_{k_0} \mathbf{v}^{(0,1)} \right) + \widehat{\mathbf{H}}_1 \partial_{k_0}^2 \mathbf{v}^{(0,1)} = 0. \quad (2.79)$$

С помощью (2.79) представим (2.78) в более компактной форме:

$$\widehat{\mathbf{H}}_1 \mathbf{w} + \frac{1}{\varepsilon_1} (ik_0 \mathbf{a} + \partial_3 \mathbf{b}) = 0, \quad (2.80)$$

где

$$\mathbf{w} = \mathbf{v}^{(2,1)} + \frac{1}{2} \varepsilon_1^2 \partial_{k_0}^2 \partial_X^2 \mathbf{v}^{(0,1)}.$$

Обозначим через  $L_{ij}^{(3,1)}$  линейную по смещениям часть тензора  $\check{P}_{ij}^{(3,1)}$ , тогда

$$\check{P}_{ij}^{(3,1)} = L_{ij}^{(3,1)} + \pi_{ij}^{(3,1)}.$$

Далее потребуются граничные значения  $L_{i3}^{(3,1)} \Big|_{\xi_3^{\approx} = 0}$ . Компоненты  $L_{i3}^{(3,1)}$  имеют вид

$$\begin{aligned} L_{13}^{(3,1)} &= \varepsilon_1 \check{\mu} \left\{ ik_0 \bar{v}_3^{(2,1)} + \partial_3 \bar{v}_1^{(2,1)} - i \varepsilon_1^2 \partial_X^2 \partial_{k_0} \bar{v}_3^{(0,1)} \right\}, \\ L_{33}^{(3,1)} &= \varepsilon_1 \left\{ \check{\lambda} i \left[ k_0 \bar{v}_1^{(2,1)} - \varepsilon_1^2 \partial_X^2 \partial_{k_0} \bar{v}_1^{(0,1)} \right] + (\check{\lambda} + 2\check{\mu}) \partial_3 \bar{v}_3^{(2,1)} \right\}. \end{aligned} \quad (2.81)$$

На границе с пластиной слагаемые  $\partial_X^2 \partial_{k_0} \bar{v}_i^{(0,1)}$  в (2.81) обращаются в нуль, поскольку  $\partial_{k_0} \mathbf{v}^{(0,1)} \Big|_{\xi_3^{\approx} = 0} = 0$ .

Чтобы вычислить  $\check{P}_{33}^{(3,1)} \Big|_{\xi_3^{\approx} = 0}$ , определим функцию ( $\boldsymbol{\sigma}_3$  — матрица Паули)

$$\mathbf{p} = \mathbf{s}^T \boldsymbol{\sigma}_3 = (s_1, -s_3)$$

(см. (2.66)), которая является решением сопряженной (2.61) краевой задачи, т. е. удовлетворяет уравнению

$$\mathbf{p} \widehat{\mathbf{H}}_1^+ = 0,$$

где  $\widehat{\mathbf{H}}_1^+$  — оператор, эрмитово сопряженный к  $\widehat{\mathbf{H}}_1$ . На границе с пластиной  $\mathbf{p}$  и  $\partial_3 \mathbf{p}$  имеют значения

$$\begin{aligned} \mathbf{p} \Big|_{\xi_3^{\approx} = 0} &= \frac{1}{\gamma + 1} \{ \pm i \sigma (\gamma - 1), -(\gamma + 1) \}, \\ \partial_3 \mathbf{p} \Big|_{\xi_3^{\approx} = 0} &= \frac{1}{\gamma + 1} \{ -ik_0 (\gamma + 1), \pm |k_0| (\gamma - 1) \}. \end{aligned} \quad (2.82)$$

Векторная функция  $\mathbf{p}$  обладает важным свойством: если скалярное произведение  $(\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{H}}_1 \mathbf{w})$  проинтегрировать по области

$$\Gamma^> = \{\xi_3 - d/2l \geq 0\} \quad (\Gamma^< = \{\xi_3 + d/2l \leq 0\}),$$

получим тождество

$$\varepsilon_1 \int_{\Gamma^{\geq}} (\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{H}}_1 \mathbf{w}) d\xi_3 = \mp (\mathbf{p} \cdot \mathbf{c}) \Big|_{\xi_3^{\geq}=0} + \frac{1}{2} (\lambda' + 2\mu) \varepsilon_1 |k_0| w_3 \Big|_{\xi_3^{\geq}=0}, \quad (2.83)$$

где

$$\mathbf{c} = \left( \check{\mu} [\partial_3 w_1 + ik_0 w_3], (\check{\lambda} + 2\check{\mu}) \partial_3 w_3 + \check{\lambda} ik_0 w_1 \right)^T$$

и  $\mathbf{w} = (w_1, w_3)^T$  — произвольная вектор-функция, удовлетворяющая условию

$$\mathbf{w} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad |\xi_3| \rightarrow \infty.$$

Кроме того, имеем

$$\int_{\Gamma^{\geq}} (\mathbf{p} \cdot \partial_3 \mathbf{b}) d\xi_3 = \mp (\mathbf{p} \cdot \mathbf{b}) \Big|_{\xi_3^{\geq}=0} - \int_{\Gamma^{\geq}} (\partial_3 \mathbf{p} \cdot \mathbf{b}) d\xi_3. \quad (2.84)$$

Умножим систему (2.80) слева на вектор  $\mathbf{p}$  и проинтегрируем результат по области  $\Gamma^{\geq}$ . После простых преобразований, с учетом формул (2.81)–(2.84) и соотношений

$$\partial_{k_0} \mathbf{v}^{(0,1)} \Big|_{\xi_3^{\geq}=0} = \partial_{k_0}^2 \mathbf{v}^{(0,1)} \Big|_{\xi_3^{\geq}=0} = 0,$$

находим интегральное представление для граничных значений компоненты  $\check{P}_{33}^{(3,1)}$ :

$$\begin{aligned} \check{P}_{33}^{(3,1)} \Big|_{\xi_3^{\geq}=0} = & \pm \left\{ \int_{\Gamma^{\geq}} d\xi_3 [(\partial_3 \mathbf{p} \cdot \mathbf{b}) - ik_0 (\mathbf{p} \cdot \mathbf{a})] + \right. \\ & \left. + i\sigma \left( \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \right) \check{P}_{13}^{(3,1)} \Big|_{\xi_3^{\geq}=0} - \frac{\varepsilon_1 |k_0|}{2} (\lambda' + 2\mu) \bar{v}_3^{(2,1)} \Big|_{\xi_3^{\geq}=0} \right\}. \quad (2.85) \end{aligned}$$

В правую часть (2.85) входят уже вычисленные поля. В частности, компоненты  $\check{P}_{13}^{(3,1)} \Big|_{\xi_3^{\geq}=0}$  определяются из (2.13), а  $\bar{v}_3^{(2,1)} \Big|_{\xi_3^{\geq}=0}$  — из (2.10) и (2.31).

В конечном счете, из (2.14) и (2.85) следует формула (2.56), которая использовалась в предыдущем разделе при анализе динамики пластины. Параметр  $g_s^{(4)}$  в (2.56) имеет вид

$$\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 g_s^{(4)}}{2} = 4(\varepsilon_1 |k_0|)^3 (\check{\lambda} + \check{\mu}) \frac{(\gamma - 1)}{(\gamma + 1)^3} \left[ Q - \frac{5}{4}(\gamma - 1)^2 + 2\gamma \right] + \int_{\Gamma^{\geq}} \frac{(\partial_3 \mathbf{p} \cdot \mathbf{b}) - i k_0 (\mathbf{p} \cdot \mathbf{a})}{|\tilde{u}_3^{(0,1)}|^2 \tilde{u}_3^{(0,1)}} d\xi_3. \quad (2.86)$$

Зависимость  $g_s^{(4)}$  от упругих модулей трехслойной среды приведена в приложении В.

## 2.4. Солитоны гофрировки среднего слоя

Будем искать решение системы (2.37), (2.57), (2.58) в виде

$$\begin{aligned} \tilde{u}_1^{(0,0)} &= \tilde{u}_1^{(0,0)}(X + VT) + \frac{\sigma_{11}^{(2,0)}}{\varepsilon_1^2 (\lambda' + 2\mu)} X, \\ \tilde{u}_3^{(0,1)} &= A(X + VT) \exp(i\Omega T + i\kappa X + i\varphi_0), \end{aligned} \quad (2.87)$$

где  $V, \kappa, \Omega, \varphi_0$  — вещественные параметры. Из уравнений (2.37), (2.57) получаем

$$\sigma_{11}^{(4,0)} = c^{(4)} - |\tilde{u}_3^{(0,1)}|^2 [(\varepsilon_1 \varepsilon_2)^2 q + \mu \varepsilon_1^4 (k_0 V)^2]. \quad (2.88)$$

Постоянная интегрирования  $c^{(4)}$  определяется краевыми условиями. В частности, когда деформации пластины однородны на бесконечности, из (2.59) следует

$$c^{(4)} = [T_{11}^{\text{ext}}]^{(4)} - [T_{11}^{\text{lin}}]^2 \left\{ \frac{1}{2\mu} + \frac{3a_1 + a_2}{\lambda' + 2\mu} \right\}.$$

После подстановки (2.88) в (2.58) находим связь между параметрами  $V, \kappa, \Omega$ :

$$\kappa = \frac{V\Omega}{V_{\text{cr}}^2}, \quad V_{\text{cr}}^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{\varepsilon_2 k_0}{\varepsilon_1} \right)^2 \left( 1 + \frac{\lambda'}{2\mu} \right) \quad (2.89)$$

и обыкновенное дифференциальное уравнение для определения  $A$ , которое допускает первый интеграл

$$(\partial_X A)^2 = \alpha A^2 + \frac{\beta}{2} A^4 + c, \quad (2.90)$$

где  $c$  — постоянная интегрирования,

$$\begin{aligned} \alpha &= -k_0^2 [\mu \varepsilon_1^4 (V^2 - V_{\text{cr}}^2)]^{-1} \left\{ c^{(4)} + (\varepsilon_2 k_0)^4 \left( p - \frac{\lambda' + 2\mu}{48\mu} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \mu \varepsilon_1^4 \left( \frac{\Omega}{V_{\text{cr}} k_0} \right)^2 (V^2 - V_{\text{cr}}^2) \right\}, \end{aligned}$$



$$\beta = [\mu\varepsilon_1^4(V^2 - V_{\text{cr}}^2)]^{-1} \left\{ g_{\text{sv}}^{(4)} + (k_0\varepsilon_1\varepsilon_2)^2 q + \mu(\varepsilon_1^2 V k_0^2)^2 \right\}.$$

В случае граничных условий (2.59) решение уравнения (2.90), которое описывает пространственно локализованную поперечную гофрировку среднего слоя на фоне его однородного основного состояния, существует при

$$c = 0, \quad \alpha > 0, \quad \beta < 0$$

и представляет «светлый» солитон,

$$A = \frac{\sqrt{2\alpha/|\beta|}}{\text{ch}(\sqrt{\alpha} [X + VT])}. \quad (2.91)$$

Согласно (2.91) изгибы пластины отличны от нуля в области с характерным размером порядка  $\alpha^{-1/2}$ , которая движется со скоростью  $V$ . При  $\Omega = \varkappa = 0$  поперечные смещения пластины имеют вид

$$\bar{u}_3^{(1)} = \frac{2\sqrt{2\alpha/|\beta|}}{\text{ch}(\sqrt{\alpha} [X + VT])} \cos(k_0\xi_1 + \varphi_0). \quad (2.92)$$

Пусть для определенности  $g_{\text{sv}}^{(4)} > 0$ . Тогда волнообразное искривление среднего слоя среды и его «дробление» на солитоны поперечной гофрировки (2.87), (2.91) происходит начиная с некоторого критического внешнего напряжения  $T_{11}^{\text{ext}}$  (близкого к  $T_{11}^{\text{lim}}$ ), которое зависит от толщины слоя и материальных параметров среды. При  $3a_1 + a_2 > 0$  оно меньше порога неустойчивости среднего слоя, т. е.

$$|T^{\text{ext}}| < |T^{\text{lim}}| \left\{ 1 - \frac{2}{3} \left( \frac{\varepsilon_2 k_0}{2} \right)^2 \left[ \frac{17}{5} + \frac{\lambda'}{\mu} + \frac{3a_1 + a_2}{\lambda' + 2\mu} \right] \right\} + \mu \left[ \frac{\Omega\varepsilon_1^2}{V_{\text{cr}} k_0} \right]^2 (V^2 - V_{\text{cr}}^2).$$

«Светлый» солитон (рис. 2.2) движется со скоростью, не превышающей  $V_{\text{cr}}$  ( $V^2 < V_{\text{cr}}^2$ ). В частности, такие солитоны могут быть неподвижными. Они являются концентраторами напряжений и одновременно предвестниками последующей пластической деформации материала.

При  $c > 0$ ,  $0 > c > -\alpha^2/2|\beta|$ ,  $\alpha > 0$ ,  $\beta < 0$  существуют ограниченные решения, которые описывают, в частности, структуры типа цепочек из солитонов гофрировки:

$$A = A_1 \text{dn} \left\{ A_1 \sqrt{\frac{|\beta|}{2}} (X + VT), k \right\},$$

$$k^2 = \frac{A_1^2 - A_2^2}{A_1^2}, \quad -\frac{\alpha^2}{2|\beta|} < c < 0; \quad (2.93)$$

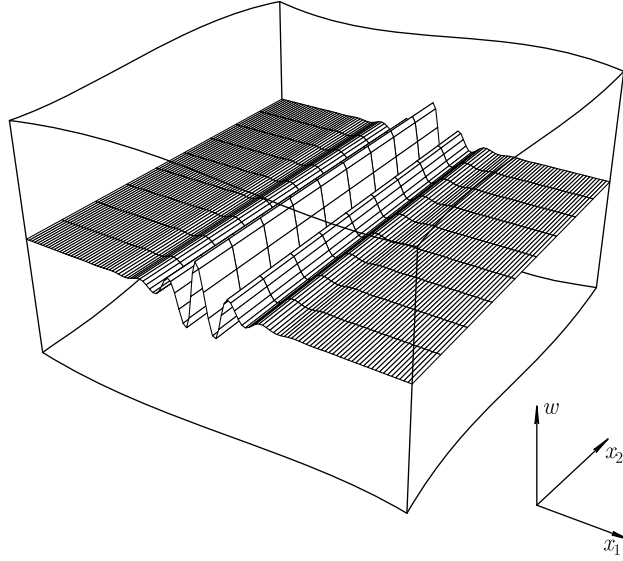


Рис. 2.2. «Светлый» солитон гофрировки среднего слоя (решение (2.91))

$$A = A_1 \operatorname{cn} \left\{ \frac{A_1}{k} \sqrt{\frac{|\beta|}{2}} (X + VT), k \right\},$$

$$k^2 = \frac{A_1^2}{A_1^2 + |A_2|^2}, \quad c > 0, \quad (2.94)$$

где

$$A_1 = \sqrt{(\alpha + D)/|\beta|}, \quad A_2 = \sqrt{(\alpha - D)/|\beta|}, \quad D = \sqrt{\alpha^2 + 2c|\beta|}.$$

Обсудим характер решения (2.93) при значениях параметра  $k$ , близких к единице. Воспользуемся представлением

$$\operatorname{dn}(Y, k) = \frac{\pi}{2K'} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \operatorname{sech} \left[ \frac{\pi}{2K'} (Y - 2Kn) \right], \quad (2.95)$$

где  $K = K(k)$ ,  $K' = K(k')$  — полные эллиптические интегралы первого рода,  $k' = \sqrt{1 - k^2}$  ( $k' \ll 1$ ),  $n$  — целые числа. Соотношение (2.95) доказывается сравнением разложений на простые дроби [59] левой и правой частей формулы (2.95). Аддитивная постоянная фиксируется условием нормировки

$$\operatorname{dn}(Y = 0, k) = 1$$

и оказывается равной нулю.

Согласно (2.93), (2.95) при  $k' \ll 1$  изменения функции  $A$  локализованы вблизи точек с координатами  $X = (2Kn/A_1)\sqrt{2/|\beta|}$ .

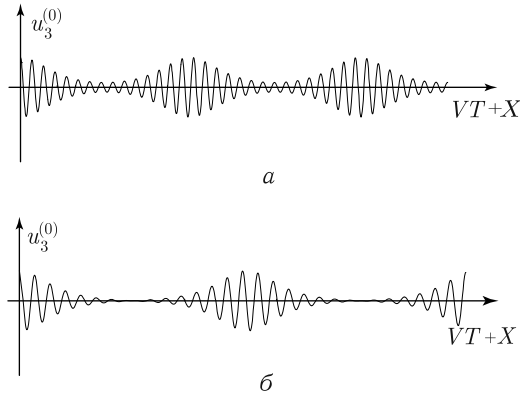


Рис. 2.3. Цепочки из «светлых» солитонов: *a* — решение (2.93), *б* — решение (2.94)

В окрестности каждой из таких точек, в области с характерным размером  $l_0 = (2K'/\pi A_1)\sqrt{2/|\beta|}$  решение (2.87), (2.93) выглядит как солитон гофрировки (см. рис. 2.3, *a*). Вне указанных областей деформации материала малы.

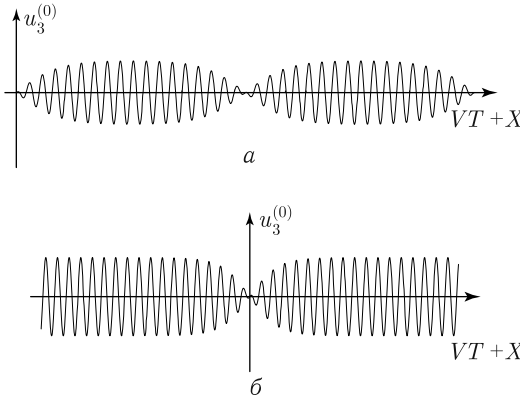


Рис. 2.4. «Темные» солитоны: *a* — решение (2.96), *б* — решение (2.97)

Когда  $\alpha < 0$ ,  $\beta > 0$ , ограниченные решения уравнения (2.90) существуют при  $0 < c \leq \alpha^2/2\beta$  (рис. 2.4, *a*):

$$A = A_2 \operatorname{sn} \left\{ A_1 \sqrt{\frac{\beta}{2}} (X + VT), k \right\}, \quad k = \frac{A_2}{A_1}, \quad (2.96)$$

где

$$A_1 = \sqrt{(|\alpha| + D)/\beta}, \quad A_2 = \sqrt{(|\alpha| - D)/\beta}, \quad D = \sqrt{\alpha^2 - 2c\beta}.$$

Простейшее из решений получается при  $c = \alpha^2/2\beta$  и представляет так называемый «темный» солитон:

$$A = \sqrt{\frac{|\alpha|}{\beta}} \operatorname{th} \left( \sqrt{\frac{|\alpha|}{2}} [X + VT] \right). \quad (2.97)$$

Выражениям (2.87), (2.97) соответствует возбужденное состояние пластины с асимптотикой типа поперечной волны:

$$\tilde{u}_3^{(1)} \sim \cos(k_0\xi_1 + \varkappa X + \Omega T + \varphi_0) \quad \text{при } X \rightarrow \pm\infty.$$

«Темный» солитон (2.97) описывает модуляцию этой волны (рис. 2.4, б). В области локализации солитона с характерным размером порядка  $|\alpha|^{-1/2}$  поперечные смещения пластины меньше, чем на бесконечности:

$$\bar{u}_3^{(1)} = 2\sqrt{\frac{|\alpha|}{\beta}} \operatorname{th} \left( \sqrt{\frac{|\alpha|}{2}} [X + VT] \right) \cos(k_0\xi_1 + \varkappa X + \Omega T + \varphi_0).$$

При  $g_{sv}^{(4)} > 0$  «темные» солитоны образуются ниже порога неустойчивости пластины и движутся со скоростями  $V$ , превышающими по абсолютной величине  $|V_{cr}|$ .

В этой главе рассмотрен простейший случай, когда внешнее напряжение и граничные условия в плоскости  $x_1Ox_2$  приводят к одномерной гофрировке многослойной среды, которая является результатом взаимодействия одной нейтрально-устойчивой линейной моды с близкими неустойчивыми модами. В общем случае следует учитывать взаимодействия нескольких групп волн, чтобы описать изгибы слоев в нескольких направлениях. При других краевых условиях и материальных параметрах слоистой среды теорию возмущений следует модифицировать. Это приведет к изменению эффективной модели, однако схема ее построения принципиально не изменится.

Отметим, что контакт с проскальзыванием слоев среды типичен для теоретического описания геологических процессов и структур [60]. Поэтому возможны геофизические приложения рассмотренной модели для объяснения образования локализованных складок в жестких слоях земной коры. «Темные» солитоны на фоне сейсмических волн от удаленных землетрясений могут быть использованы для нелинейной диагностики земной коры. Выявление неоднородностей в строении земной коры может дать новую информацию о физическом состоянии материала на недостижимых для нас глубинах планеты.

Резюмируем полученные результаты. Главной задачей этой главы было описание гофрирования наиболее сильно нагруженных слоев материала на начальной нелинейно-упругой стадии их формоизменения. Для этого в результате обобщения подхода, предложенного в предыдущей главе, построена модель динамики квазиодномерных изгибов продольно сжатого слоя материала в форме пластины, стесненного двумя

полубезграницными слоями с меньшими модулями упругости. Модель получена в результате «сшивки» двумерных вариантов нелинейной теории возмущений для пластины и подложек. Теоретическое описание осложнено нелокальным характером взаимодействий между слоями. Вблизи порога устойчивости формы среднего слоя упрощение модели достигнуто путем корректного выделения нелинейных взаимодействий тех мод деформации, которые близки к нейтрально устойчивым линейным модам и потому, в первую очередь, обуславливают гофрирование материала.

На основе предложенной модели предсказаны и аналитически описаны нелинейно-упругие структуры, характеризующие гофрировку сильно нагруженных слоев среды. Показано, что волнообразные искривления слоистой среды пространственно локализуются в форме «светлых» солитонов. Эффектом локализации изгибов нелинейная задача существенно отличается от линейной эйлеровой задачи о неустойчивости упругих систем. «Светлые» солитоны образуются при продольной нагрузке вблизи критической нагрузки линейной теории и движутся со скоростями ниже некоторой предельной. Они являются концентраторами напряжений и одновременно «предвестниками» последующей пластической деформации материала.

Возможно также образование «темных» солитонов на фоне акустической волны, бегущей вдоль сильнонагруженного слоя среды. «Темные» солитоны представляют собой локализованные амплитудные модуляции волны, которые движутся в продольном направлении пластины со скоростями выше некоторой предельной. «Темные» солитоны образуются только на начальной стадии формоизменения слоистой среды, и потому могут быть использованы для диагностики ее состояния.

## Глава 3

# УЗОРЫ ИЗ ВМЯТИН НА ПОВЕРХНОСТИ ПРОДОЛЬНО СЖАТОЙ НЕЛИНЕЙНО-УПРУГОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

Я больше всего дорожу аналогиями, моими самыми верными учителями.

*Иоганн Кеплер*

Линейная теория тонких оболочек [1, 25] исходит из предположений, что перемещения материальных точек оболочки малы по сравнению с ее толщиной, а деформации подчиняются закону Гука, что сужает область ее применимости. Критерием устойчивости формы оболочки в линейной теории служит образование нейтрально-устойчивых мод деформации. Минимальное напряжение, при котором формируются нейтрально-устойчивые моды, соответствует критическому напряжению. Вблизи порога устойчивости системы амплитуда изгибов оболочки начинает расти. При этом приближения линейной теории не соблюдаются, и она дает лишь «верхнюю» критическую нагрузку, начиная с которой возможно изменение формы оболочки. На практике после потери устойчивости формы при «верхней» критической нагрузке оболочка скачком переходит в устойчивое закритическое состояние с пространственно локализованными изгибами и «узорами» из вмятин на поверхности. При этом предельная нагрузка, выдерживаемая оболочкой с вмятинами, резко снижается. Для технологических приложений важно, что малые начальные несовершенства формы образца или неидеальность внешнего нагружения слабо влияют на закритическую форму образца и величину нижней критической нагрузки. Линейная теория не пригодна для анализа процессов локализации деформаций. Образование узоров из пространственно локализованных вмятин на поверхности оболочки на начальной стадии изменения ее формы может быть описано в рамках нелинейной теории упругости [29–32, 46], так как на этой стадии деформации обычно невелики и соответствуют, в основном, изометрическому изгибу оболочки [6].

Эффективное исследование динамики оболочки вблизи порога устойчивости ее формы достигается посредством построения упрощенных нелинейных моделей. Как и ранее, отличительная черта задачи состоит в том, что, хотя исходные уравнения нелинейной теории не содержат дисперсионных слагаемых, при построении упрощенных моделей оболочек такие слагаемые появляются в результате исключения «быстрых» переменных, характеризующих неоднородность деформаций вдоль нормали к поверхности оболочки. Дисперсионные эффекты существенно зависят от размеров оболочки и краевых условий на ее боковой поверхности. В отсутствие дисперсии, при учете только нелинейного взаимодействия неустойчивых мод деформации невозможно образование на поверхности нагруженной оболочки локализованных стационарных структур из выпуклостей и впадин и долгоживущих солитоноподобных волн деформации. Поэтому, как и в предыдущих главах, краевые задачи вдоль нормали к поверхности оболочки решаются аккуратно.

Напомним также, что имеется аналогия между тонкими пластинами и оболочками, которая позволяет заимствовать при построении теории оболочек ряд приемов теории пластин. Однако традиционные приближения, основанные на геометрических гипотезах Кирхгофа или разложениях смещений в ряды Тейлора по координате, перпендикулярной к поверхности пластины, часто не удовлетворяют граничным условиям на поверхности пластины. Как впервые отмечено в работах [25, 28], подобные приемы не могут быть развиты в точную теорию оболочек, так как даже в линейной теории оболочек погрешность гипотез Кирхгофа оказывается более существенной, чем для пластин. В первой главе изложены результаты работы [35], в которой на примере аналитического описания двумерных мультисолитонов в пластине показано, что гипотезы и подстановки, типичные для вариационного подхода, не дают правильного закона дисперсии линейных мод, приводят к неверным оценкам и качественным выводам при анализе динамики нелинейно-упругих систем.

Нелинейная теории упругости, в отличие от классической нелинейной теории оболочек [27, 44], учитывает не только геометрическую нелинейность среды, проявляющуюся в нелинейности тензора деформаций, но и ее физическую нелинейность, которая характеризует свойства материала и описывается инвариантами высокого порядка в разложении упругой энергии среды. Основные уравнения традиционной нелинейной теории оболочек представляют собой условия равновесия элементов срединной поверхности оболочки. В рамках такого подхода трудно учесть эффекты линейной и, тем более, нелинейной дисперсии, нелинейные по своему происхождению локализованные деформации оболочки.

Для упрощения уравнений нелинейной теории упругости обычно привлекают дополнительные предположения о роли инвариантов в разложении энергии нелинейно-упругого тела: одни из них сохраняют,

другие, того же порядка малости, отбрасывают. При последовательном описании нелинейно-упругой динамики оболочек правильнее исходить из полного, совместимого с симметрией среды разложения упругой энергии материала по инвариантам тензора деформаций.

В настоящей главе развиваются методы редуктивной теории возмущений, которые позволяют корректно аппроксимировать нелинейно-упругую динамику оболочки вблизи порога ее устойчивости без привлечения априорных гипотез. Варианты этих методов применительно к нелинейно-упругой динамике пластины и гофрированию сильно нагруженных слоев материала были изложены в предыдущих главах. Предлагаемая теория возмущений не противоречит классической нелинейной теории оболочек. С ее помощью нетрудно показать, что традиционная нелинейная модель оболочек представляет простейшую редукцию общих уравнений нелинейной теории упругости (3.3). В следующей главе обоснуем и обсудим это утверждение подробнее.

В этой главе на основе редуктивной теории возмущений построены модели, описывающие сценарии начальной стадии формоизменения продольно сжатой оболочки. Рассматриваемый случай нагружения оболочки практически интересен, к нему сводятся многие задачи. Круговая оболочка, сжатая вдоль образующей, не только служит основным несущим элементом многих конструкций, но и является эталоном для сопоставления теоретических и экспериментальных данных и проверки различных подходов в теории устойчивости оболочек.

В данной главе показано, что нелинейная теория упругости позволяет аналитически описать процесс формирования пространственно локализованных кольцевых складок на поверхности продольно сжатой оболочки. Важно, что развитие локальных неустойчивостей и образование складок обусловлено не только геометрической, но и физической нелинейностью среды, которая не учитывается традиционными моделями оболочек «первого» и «второго» приближений [44]. Построение эффективной модели существенно упрощается, если, как и в главе 2, предположить, что вблизи порога устойчивости оболочки гофрировка ее поверхности осуществляется через преимущественные (нейтрально устойчивые) линейные моды деформации, а образование кольцевых складок — результат взаимодействия близких неустойчивых мод деформации.

В разделе 3.1 приведены основные уравнение нелинейной теории упругости применительно к цилиндрической оболочке и сформулированы граничные условия для случая продольного одноосного нагружения.

В разделе 3.2 рассмотрена задача об осесимметричной деформации продольно сжатой оболочки. Как и в предыдущей главе, при построении упрощенной модели вводится иерархия переменных для описания разных масштабных уровней деформаций, а именно:

1. «быстрые» переменные, характеризующие деформации вдоль нормали к поверхности оболочки;



2. более «медленные» переменные, ответственные за образование вмятин на ее поверхности;

3. переменные, определяющие локализацию групп из вмятин на поверхности оболочки.

В процессе построения модели решается серия нелинейных краевых задач вдоль нормали к поверхности деформируемой оболочки. Важную роль играют условия разрешимости краевых задач редуktивной теории возмущений. Они дают: а) волновые векторы тех нейтрально устойчивых резонансных мод деформации, которые обуславливают образование выпуклостей и впадин на поверхности оболочки; б) критическое внешнее напряжение, при котором формируются резонансные моды; в) упрощенную модель динамики оболочки. При осесимметричной деформации модель определяет эволюцию огибающей кольцевых складок на поверхности оболочки.

В разделе 3.2.1 предсказаны и аналитически описаны солитноподобные кольцевые складки на поверхности продольно сжатой оболочки. Найдены условия формирования и явные выражения для уединенных волн, распространяющихся вдоль образующей оболочки на фоне структур из кольцевых складок. Подобные образования, будучи концентраторами напряжений и, в то же время, предвестниками пластического течения материала, несут информацию о предкритическом напряженном состоянии оболочки.

При одноосном сжатии круговой цилиндрической оболочки (кроме ее осесимметричных изгибов) линейная теория упругости предсказывает формирование на поверхности оболочки вмятин и выпуклостей прямоугольного очертания, расположенных в шахматном порядке. Однако вместо такой структуры на поверхности оболочки обычно наблюдают двумерные пространственно локализованные узоры из ромбовидных вмятин [1].

В разделе 3.3 показано, что предлагаемая теория возмущений допускает обобщение и дает аналитическое описание двумерных узоров из ромбовидных вмятин на поверхности продольно сжатой оболочки. Построена модель, которая определяет эволюцию огибающих ромбовидных вмятин на поверхности оболочки.

На первый взгляд кажется, что за образование ромбовидных вмятин должны отвечать две нейтрально устойчивые моды деформации. В частности, так предполагалось в линейной теории при расчете «шахматной структуры» из выпуклостей и впадин на поверхности оболочки. Однако более детальный анализ выявил, что формирование двумерных узоров из вмятин связано с взаимодействием трех групп неустойчивых волн, близких к трем нейтрально устойчивым модам деформации.

В разделе 3.3.1 теоретически описаны неподвижные винтовые полосы из ромбовидных вмятин на поверхности продольно сжатой оболочки и уединенные волны, которые распространяются вдоль оболочки с вмятинами. Показано, что оболочка с ромбовидными вмятинами на поверхности выдерживает внешние напряжения в ограниченном интервале,

причем они выше некоторого критического значения, но на десятки процентов меньше по величине в сравнении с «верхней» критической нагрузкой линейной теории.

### 3.1. Основные уравнения

Пусть ось круговой цилиндрической оболочки совпадает с осью  $Ox_1$  декартовой системы координат (рис. 3.1),  $\mathbf{r} = x^s \mathbf{i}_s$  — радиус-вектор материальной частицы недеформированного тела,  $\mathbf{i}_s$  — единичные орты декартовой системы координат, по дважды встречающимся индексам подразумевается суммирование. Индексы, обозначенные латинскими буквами, принимают значения 1, 2, 3.

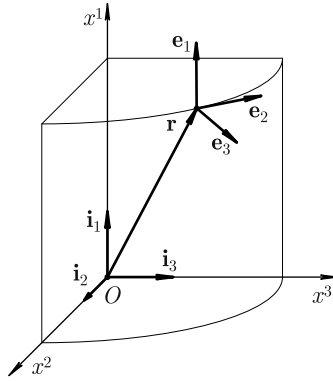


Рис. 3.1. Декартовы базисные векторы  $\mathbf{i}_n$  и локальный репер  $\mathbf{e}_s$  криволинейной системы координат

Перейдем от декартовой к цилиндрической системе координат, так как она лучше отражает симметрию оболочки:

$$y^1 = x^1, \quad y^2 = \frac{R}{2i} \ln \frac{x^2 + ix^3}{x^2 - ix^3}, \quad y^3 = \sqrt{(x^2)^2 + (x^3)^2}.$$

Здесь  $R$  — радиус срединной поверхности оболочки,  $d$  — толщина оболочки,  $|y^3 - R| \leq d/2$ .

Базисные векторы локального репера в цилиндрической системе координат и метрика, определяющая расстояние  $(d\mathbf{r})^2 = g_{ik} dy^i dy^k$  между двумя близкими материальными частицами недеформированного тела, имеют вид

$$\mathbf{e}_i = \frac{\partial x^s}{\partial y^i} \mathbf{i}_s, \quad g_{ik} = \frac{\partial x^s}{\partial y^i} \frac{\partial x^s}{\partial y^k} = \text{diag} \left\{ 1, \left( \frac{y^3}{R} \right)^2, 1 \right\}.$$

При деформировании тела радиус-вектор каждой его материальной частицы приобретает смещение  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  ( $\mathbf{R} = \mathbf{r} + \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ ), которое может быть представлено в форме  $\mathbf{u} = v^s \mathbf{e}_s$ . Здесь  $v^s$  — координаты вектора смещения материальной частицы среды относительно локального репера, связанного с недеформированным телом.

Лагранжев тензор деформации  $E_{km}$ , характеризующий изменение расстояния между двумя близкими материальными частицами при деформировании оболочки, определяется соотношением

$$\begin{aligned} E_{km} &= \frac{1}{2} \{ \nabla_k v^s g_{sm} + \nabla_m v^s g_{ks} + \nabla_k v^s \nabla_m v^p g_{sp} \}, \\ \nabla_k v^s &= \frac{\partial}{\partial y^k} v^s + \Gamma_{kp}^s v^p. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Здесь  $\nabla_k v^s$  — абсолютная (ковариантная) производная от компонент  $v^s$  вектора смещений, которая учитывает изменение длины и ориентации векторов локального репера при переходе от одной точки среды к соседней точке. В данном случае отличны от нуля только следующие из символов Кристоффеля, определяющих операцию параллельного переноса в криволинейной системе координат:

$$\Gamma_{23}^2 = \Gamma_{32}^2 = \frac{1}{y^3}, \quad \Gamma_{22}^3 = -\frac{y^3}{R^2}.$$

В криволинейной системе координат верхние и нижние индексы тензоров и абсолютных производных играют разную роль. Поднимание и опускание индексов осуществляется с помощью метрического тензора  $g_{ik}$  и ему обратного:

$$g^{ks} = \left( \frac{\partial y^k}{\partial x^i} \right) \left( \frac{\partial y^s}{\partial x^i} \right) = \text{diag} \left\{ 1, \left( \frac{R}{y^3} \right)^2, 1 \right\}.$$

Нелинейно-упругая энергия материала записывается в форме разложения по инвариантам тензора деформации, учитывающим кристаллографическую симметрию среды [29, 31, 46]. Для изотропной среды независимых инвариантов три:

$$I_1 = E^m{}_m, \quad I_2 = E^p{}_m E^m{}_p, \quad I_3 = E^p{}_m E^m{}_k E^k{}_p.$$

Общее выражение для упругой энергии изотропного нелинейного тела имеет вид [29, 31, 46]

$$\begin{aligned}
U &= \int_{V_0} \varphi \sqrt{g} \, dy^1 dy^2 dy^3, \\
\varphi &= \frac{\lambda}{2} I_1^2 + \mu I_2 + \frac{A}{3} I_3 + B I_1 I_2 + \frac{C}{3} I_1^3 + \varphi_{n \geq 4}, \\
\varphi_{n \geq 4} &= \sum_{n=4}^{\infty} \sum_{\langle k,p,q \rangle = n} A_{kpq} I_1^k I_2^p I_3^q, \\
\sqrt{g} &= \sqrt{\det \|g\|} = \det \left\| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{y}} \right\| = -\frac{y^3}{R}.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Здесь  $\varphi$  — энергия, отнесенная к единице объема тела до деформации,  $\sum_{\langle k,p,q \rangle = n}$  — означает сумму слагаемых, для которых  $k + 2p + 3q = n$ , индексов  $k, p, q$ . Интегрирование производится по объему тела  $V_0$  до деформации. Упругие модули  $\lambda, \mu, A, B, C, A_{kpq}$  предполагаются сравнимыми по порядку величины.

Уравнения динамики нелинейно-упругого тела примерительно к оболочке имеют вид [29, 31, 46]

$$-\rho_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} v^i + \nabla_s P^{is} = 0, \tag{3.3}$$

где  $\rho_0 = \text{const}$  — плотность среды в недеформированном состоянии,  $P^{is}$  — компоненты несимметричного по индексам  $i, s$  тензора Пиолы–Кирхгофа,

$$P^{is} = \frac{\partial \varphi}{\partial E_{si}} + \frac{\partial \varphi}{\partial E_{sm}} \nabla_m v^i. \tag{3.4}$$

В нелинейной теории упругости силы, возникающие при деформациях, характеризуются симметричным тензором напряжений, являющимся плотностью потока импульса ( $\Theta^{mn}$  — компоненты тензора напряжений относительно локального репера). Тензор Пиолы–Кирхгофа связан с тензором напряжений соотношением

$$\Theta^{mn} = \frac{1}{\det \|C\|} P^{mk} C^n_k = \frac{1}{\det \|C\|} C^m_k P^{nk}, \quad C^s_m = \delta^s_m + \nabla_m v^s.$$

На части поверхности деформированного образца, где заданы поверхностные силы  $\mathbf{f} = f^k \mathbf{e}_k$ , выполняются граничные условия ( $N_i$  — компоненты вектора единичной нормали к ориентированной площадке  $dS$ )

$$\Theta^{ki} N_i dS = f^k dS,$$

которые можно переписать в терминах недеформированного тела [29, 31]

$$P^{ki} \nu_i = \Theta^{kn} \frac{\partial \det \|C\|}{\partial C^n_i} \nu_i = f^k \frac{dS}{d\sigma}.$$

Здесь  $\nu_i$  — компоненты вектора единичной нормали к элементу площади  $d\sigma$  тела до деформации, множитель  $dS/d\sigma$  характеризует относительное изменение площадки при деформировании тела,

$$\frac{dS}{d\sigma} = \sqrt{m_k m^k}, \quad m_k = \frac{\partial \det \|C\|}{\partial C^k_i} \nu_i.$$

В этой главе рассматривается цилиндрическая оболочка, подвергающаяся сжатию вдоль образующей усилиями, равномерно распределенными вдоль ее кромок. На незагруженной боковой поверхности цилиндра  $\sigma'$  граничные условия принимают простой вид

$$P^{i3} \Big|_{\sigma'} = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.5)$$

Эти нелинейные граничные условия определяют процесс локализации вмятин на поверхности оболочки, поэтому при построении упрощенной модели учитываются аккуратно.

Важно, что для построения уравнений динамики изгибов, расположенных в центральной части оболочки, не нужна детальная информация о распределении сил вдоль кромок оболочки. В модельные уравнения входят лишь продольные напряжения, которые существуют в деформированной оболочке вне узкой полоски вдоль ее кромок. Задачу существенно упрощает то обстоятельство, что для построения модели нужны только первые порядки редуцированной теории возмущений, когда справедливо приближение  $\Theta^{11} \approx P^{11}$ . Процедура теории возмущений соответствует принципу Сен-Венана, согласно которому динамику изгибов центральной части оболочки могут определять лишь интегральные характеристики сил вдоль кромок оболочки. Учет сил, действующих на узкую полоску оболочки вдоль ее кромок, осуществляется через эффективные краевые условия для упрощенной модели точно так же, как в традиционной теории оболочек [26].

### 3.2. Построение модели осесимметричных изгибов оболочки

Для упрощения уравнений (3.3) введем малые параметры, отражающие характерные пространственно-временные масштабы деформаций и величину внешнего нагружения (рис. 3.2).

Пусть  $l$  — характерный размер вмятин на поверхности оболочки,  $l \ll L$  ( $L$  — длина оболочки). Изгибы оболочки предполагаются сильными — амплитуды полей смещений порядка толщины оболочки  $d$ .

Определим параметры  $\varepsilon$  и  $\varepsilon_1$ , характеризующие порядки малости амплитуд смещений и кривизны оболочки:

$$\varepsilon = \frac{d}{l} \ll 1, \quad \varepsilon_1 = \frac{d}{R} = O(\varepsilon^2). \quad (3.6)$$

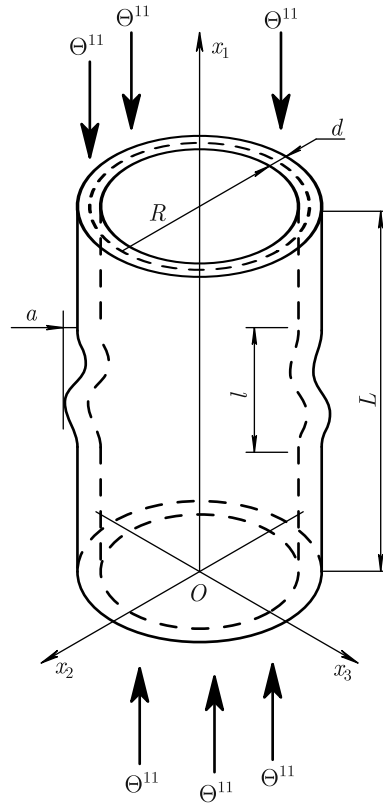


Рис. 3.2. Геометрические параметры продольно нагруженной оболочки

Пусть внешние напряжения приложены только вдоль кромок оболочки, а их порядок величины таков:

$$\frac{\Theta^{11}}{\mu} = O(\varepsilon^2) + O(\varepsilon^4).$$

Этими условиями выделена область физических параметров задачи, в которой нелинейная динамика локальных изгибов оболочки может быть корректно описана в рамках более простой квазиодномерной модели.

Введем безразмерные переменные

$$\begin{aligned} \xi_\alpha &= \frac{y^\alpha}{l} \quad (\alpha = 1, 2), \quad \eta = \frac{y^3 - R}{d}, \quad \tau = \frac{t}{\tau_{\text{ch}}}, \\ u &= \frac{v^1}{d}, \quad v = \frac{v^2}{d}, \quad w = \frac{v^3}{d}, \end{aligned} \quad (3.7)$$

где  $\tau_{\text{ch}} = l/\sqrt{\mu/\rho_0}$  — характерное время деформации ( $\mu$  — модуль сдвига).

Уравнения динамики оболочки (3.3) в безразмерных переменных примут вид

$$\begin{aligned}\mu\varepsilon^2\partial_\tau^2 w &= \varepsilon\partial_{\xi_\alpha} P^{3\alpha} + \partial_\eta P^{33} - (1 + \varepsilon_1\eta)\varepsilon_1 P^{22} + \frac{\varepsilon_1}{1 + \varepsilon_1\eta} P^{33}, \\ \mu\varepsilon^2\partial_\tau^2 u &= \varepsilon\partial_{\xi_\alpha} P^{1\alpha} + \partial_\eta P^{13} + \frac{\varepsilon_1}{1 + \varepsilon_1\eta} P^{13}, \\ \mu\varepsilon^2\partial_\tau^2 v &= \varepsilon\partial_{\xi_\alpha} P^{2\alpha} + \partial_\eta P^{23} + \frac{\varepsilon_1}{1 + \varepsilon_1\eta} (2P^{13} + P^{32}) \\ (\partial_\tau &= \partial/\partial\tau, \quad \partial_{\xi_\alpha} = \partial/\partial\xi_\alpha, \quad \partial_\eta = \partial/\partial\eta).\end{aligned}\quad (3.8)$$

Поскольку в случае осесимметричных изгибов оболочки поля смещений имеют вид

$$u = u(\xi, \eta, \tau), \quad v = 0, \quad w = w(\xi, \eta, \tau),$$

последнее уравнение (3.8) удовлетворяется автоматически.

Главная цель редуктивной теории возмущений заключается в том, чтобы свести сложную трехмерную динамическую систему (3.8) к более простой нелинейной модели, вводя медленные переменные  $X$  и  $T$ . Для построения такой модели решение уравнений (3.8) ищется в следующем виде:

$$\begin{aligned}w &= w^{(0,0)}(X, T) + \left[ w^{(0,1)}(X, T) \exp(ik\xi) + \text{c.c.} \right] + \\ &+ \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} w^{(n,l)}(X, T, \eta) \exp(ikl\xi), \\ u &= u^{(0,0)}(X, T) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} u^{(n,l)}(X, T, \eta) \exp(ikl\xi).\end{aligned}\quad (3.9)$$

Целочисленные индексы  $n, l$  определяют порядок слагаемого по параметру  $\varepsilon$  и кратность гармоники, описывающей изгиб поверхности оболочки соответственно. Требование вещественности полей  $u$  и  $w$  накладывает ограничения

$$[u^{(n,l)}]^* = u^{(n,-l)}, \quad [w^{(n,l)}]^* = w^{(n,-l)}.\quad (3.10)$$

Осесимметричный изгиб оболочки начинается с формирования нейтрально устойчивой линейной моды с волновым числом  $k_0$  при внешнем напряжении  $\Theta^{11} = \Theta$ , которое совпадает с критическим напряжением линейной теории оболочек. Значения  $k_0$  и  $\Theta$  будут найдены в процессе решения задачи.

При внешних напряжениях, близких к  $\Theta$ , нелинейная динамика оболочки описывается неустойчивыми модами, волновые числа которых лежат в малой окрестности критического волнового числа  $k_0$ .

Радиус окрестности зависит от того, насколько внешнее напряжение отличается от критического. Далее предполагаем

$$\frac{\Theta^{11} - \Theta}{\mu} = O(\varepsilon^4). \quad (3.11)$$

Тогда с помощью параметра  $\varepsilon$  можно определить медленные переменные,

$$X = \varepsilon\xi, \quad T = \varepsilon^2\tau, \quad (3.12)$$

которые описывают модуляцию основной гармоники, пропорциональной  $\exp(ik_0\xi)$ , в результате ее взаимодействия с близкими неустойчивыми модами. Нелинейные взаимодействия близких неустойчивых мод ведут к локализации изгибов на поверхности оболочки. Этим нелинейная задача существенно отличается от линейной эйлеровой задачи устойчивости формы оболочки.

Рассматриваются сравнительно медленные во времени процессы, для которых справедлива оценка

$$\frac{\partial_\tau w}{w} = O(\varepsilon^2).$$

Более детальной информации о начальных условиях задачи для построения упрощенной модели не требуется.

Выбор масштабных преобразований (3.12) основывается на анализе пространственно-временных откликов системы на внешние возмущения, учитывает возможность баланса эффектов дисперсии и нелинейности (см. [33, 61] и ссылки, приведенные там). Правильность выбора медленных переменных (3.12) проявится в ходе дальнейших вычислений.

Выбранная форма решения приводит к следующим представлениям:

$$\begin{aligned} E_{sm} &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} E_{sm}^{(n,l)} \exp(ikl\xi), \\ P^{sm} &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} (P^{sm})^{(n,l)} \exp(ikl\xi). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Связь между коэффициентами  $w^{(n,l)}$ ,  $u^{(n,l)}$ ,  $E_{km}^{(n,l)}$  находится в результате подстановки выражений (3.9) в соотношения

$$\begin{aligned} E_{11} &= \varepsilon \widehat{D}u + \frac{\varepsilon^2}{2} \left[ (\widehat{D}u)^2 + (\widehat{D}w)^2 \right], \\ E_{22} &= \varepsilon_1(1 + \varepsilon_1\eta)w + \frac{(\varepsilon_1 w)^2}{2}, \\ E_{13} &= \frac{1}{2} \left\{ \varepsilon (\widehat{D}w) + \frac{a}{d} \partial_\eta u + \frac{a}{d} \varepsilon \left[ (\widehat{D}u) \partial_\eta u + (\widehat{D}w) \partial_\eta w \right] \right\}, \end{aligned}$$



$$E_{12} = E_{23} = 0,$$

где

$$\widehat{D} = \partial_\xi + \varepsilon \partial_X.$$

Выражения для компонент тензора  $(P^{km})^{(n,l)}$  следуют из формул (3.4). Первые из компонент наиболее просто связаны с  $E_{km}^{(n,l)}$ :

$$\begin{aligned} (P^{13})^{(n,l)} &= \left( \frac{\partial \varphi}{\partial E_{13}} \right)^{(n,l)} = 2\mu E_{13}^{(n,l)}, \\ &n = 1, 2, 3, 4; \\ (P^{\alpha\beta})^{(s,l)} &= \left( \frac{\partial \varphi}{\partial E_{\alpha\beta}} \right)^{(s,l)} = \lambda E_{pp}^{(s,l)} \delta_{\alpha\beta} + 2\mu E_{\alpha\beta}^{(s,l)}, \\ &\alpha, \beta = 1, 2; \\ (P^{33})^{(s,l)} &= \left( \frac{\partial \varphi}{\partial E_{33}} \right)^{(s,l)} = \lambda E_{pp}^{(s,l)} + 2\mu E_{33}^{(s,l)}, \\ &s = 2, 3. \end{aligned} \quad (3.14)$$

После подстановки разложений (3.13) в систему (3.8) и приравнивания слагаемых одного порядка малости получается цепочка обыкновенных дифференциальных уравнений относительно быстрой переменной  $\eta$ , определяющей неоднородность деформаций вдоль нормали к поверхности оболочки. Необходимые для их решения граничные условия получены путем разложения по степеням малого параметра  $\varepsilon$  исходных краевых условий (3.5).

В первых порядках теории возмущений краевые задачи

$$\partial_\eta (P^{13})^{(n,l)} = 0, \quad (P^{13})^{(n,l)} \Big|_{\eta=\pm 1/2} = 0, \quad n = 1, 2, \quad (3.15)$$

$$\partial_\eta (P^{33})^{(m,l)} = 0, \quad (P^{33})^{(m,l)} \Big|_{\eta=\pm 1/2} = 0, \quad m = 2, 3, \quad (3.16)$$

имеют тривиальные решения. Решение задачи (3.15) эквивалентно равенствам

$$(P^{13})^{(n,l)} = (\partial \varphi / \partial E_{13})^{(n,l)} = 2\mu E_{13}^{(n,l)} = 0, \quad n = 1, 2,$$

из которых прежде всего следует, что коэффициенты  $(P^{13})^{(n,l)}$  и  $E_{13}^{(n,l)}$ , в действительности, не равны нулю, начиная с  $n \geq 3$ . Если условия  $E_{13}^{(n,l)} = 0$  ( $n = 1, 2$ ) переписать через смещения, то получатся обыкновенные дифференциальные уравнения относительно переменной  $\eta$  для вычисления полей  $u^{(n,l)}$ . В результате их интегрирования выделится явная зависимость смещений от быстрой переменной  $\eta$  и возникнут произвольные функции от медленных переменных  $\tilde{u}^{(n,l)}(X, T)$ :

$$u^{(1,1)} = -\varepsilon i k \eta \tilde{w}^{(0,1)} + \tilde{u}^{(1,1)}, \quad u^{(1,l)} = \tilde{u}^{(1,l)}, \quad l = 0, \pm 2, \pm 3, \dots;$$

$$u^{(2,1)} = -\varepsilon^2 \eta \partial_X \tilde{w}^{(0,1)} + \tilde{u}^{(2,1)}, \quad u^{(2,l)} = \tilde{u}^{(2,l)}, \quad l = \pm 2, \pm 3, \dots$$

Далее все функции, не зависящие от  $\eta$ , отмечены тильдой, например  $\tilde{u}^{(n,l)}(X, T)$ .

Из соотношений  $(P^{33})^{(m,l)} = 0$  можно найти полезную для дальнейших вычислений связь между компонентами тензора деформаций:

$$E_{33}^{(m,l)} = -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} E_{\gamma\gamma}^{(m,l)}, \quad \gamma = 1, 2, \quad m = 2, 3. \quad (3.17)$$

В частности, равенства (3.17) приводят к представлению

$$(P^{\alpha\beta})^{(m,l)} = \lambda' E_{\gamma\gamma}^{(m,l)} \delta_{\alpha\beta} + 2\mu E_{\alpha\beta}^{(m,l)}, \quad \lambda' = \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu},$$

$$m = 2, 3, \quad \alpha, \beta, \gamma = 1, 2,$$

позволяющему выразить компоненты  $(P^{\alpha\beta})^{(m,l)}$  через функции  $u^{(n,l)}$ ,  $w^{(n,l)}$  ( $n = 1, 2$ ). Здесь  $\lambda'$  — эффективный упругий модуль; в линейном приближении он определяет напряжения, появляющиеся при изменении элемента площади оболочки.

Схема последующих вычислений может быть проиллюстрирована на примере краевой задачи

$$\partial_\eta (P^{13})^{(3,l)} + \varepsilon i k l (P^{11})^{(2,l)} = 0, \quad (P^{13})^{(3,l)} \Big|_{\eta=\pm 1/2} = 0. \quad (3.18)$$

Предыдущими порядками теории возмущений для компонент  $(P^{11})^{(2,l)}$  выявлена зависимость от быстрой переменной  $\eta$  и от произвольных функций  $\tilde{u}^{(n,l)}$ ; функции  $(P^{13})^{(3,l)}$  пока полностью не известны. Если уравнение (3.18) проинтегрировать по толщине оболочки, то с учетом граничных условий получим равенство

$$\langle P^{11} \rangle^{(2,l)} = 0. \quad (3.19)$$

Равенство (3.19) и есть условие разрешимости краевой задачи (3.18). В данном случае оно дает алгебраические связи между уже введенными функциями,

$$\varepsilon i k \tilde{u}^{(1,1)} = -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \varepsilon_1 \tilde{w}^{(0,1)}, \quad \tilde{u}^{(1,2)} = -\frac{i k \varepsilon}{4} (w^{(0,1)})^2,$$

$$\tilde{u}^{(1,l)} = 0, \quad l = \pm 3, \pm 4, \dots,$$

которые означают, что только два из коэффициентов  $(P^{11})^{(2,l)}$  отличаются от нуля:

$$(P^{11})^{(2,1)} = (\varepsilon k)^2 \eta (\lambda' + 2\mu) \tilde{w}^{(0,1)},$$

$$(P^{11})^{(2,0)} = (\lambda' + 2\mu) \left\{ \varepsilon^2 \partial_X^2 \tilde{u}^{(0,0)} + (\varepsilon k)^2 \left| \tilde{w}^{(0,1)} \right|^2 \right\} + \lambda' \varepsilon_1 \tilde{w}^{(0,0)}.$$

Здесь приведены лишь компоненты с  $l \geq 0$ , так как компоненты с  $l < 0$  могут быть найдены из условий вещественности (3.10). Компонента  $\tilde{w}^{(0,0)}$  будет определена следующими порядками теории возмущений. Оказывается, что

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 \tilde{w}^{(0,0)} &= -\frac{\lambda'}{\lambda' + 2\mu} \left\{ \varepsilon^2 \partial_X \tilde{u}^{(0,0)} + (\varepsilon k)^2 \left| \tilde{w}^{(0,1)} \right|^2 \right\} = \\ &= -\frac{\lambda'}{\lambda' + 2\mu} E_{11}^{(2,0)}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Поэтому

$$(P^{11})^{(2,0)} = \frac{4\mu(\lambda' + \mu)}{\lambda' + 2\mu} E_{11}^{(2,0)}. \quad (3.21)$$

При учете условий разрешимости решения задачи (3.18) имеют вид

$$\begin{aligned} (P^{13})^{(3,1)} &= -\frac{1}{2}(\lambda' + 2\mu)ik^3 \tilde{w}^{(0,1)} \left( \eta^2 - \frac{1}{4} \right) \varepsilon^3, \\ (P^{13})^{(3,l)} &= 0, \quad l = 0, \pm 2, \pm 3, \dots \end{aligned} \quad (3.22)$$

Установленные ограничения, налагаемые на функции от медленных переменных  $(X, T)$ , позволяют вернуться к соотношениям (3.17). В терминах полей смещений соотношения (3.17) сводятся к обыкновенным дифференциальным уравнениям относительно переменной  $\eta$ . В результате их интегрирования получаем поправки  $w^{(2,l)}$ :

$$\begin{aligned} \frac{a}{d} w^{(2,0)} &= -\frac{\lambda'}{2\mu} \left[ \varepsilon_1 \tilde{w}^{(0,0)} + E_{11}^{(2,0)} \right] - (\varepsilon k)^2 \left| \tilde{w}^{(0,1)} \right|^2 \eta + \frac{a}{d} \tilde{w}^{(2,0)}, \\ w^{(2,1)} &= -\frac{\lambda'}{4\mu} (\varepsilon k \eta)^2 \tilde{w}^{(0,1)} - \frac{\lambda'}{\lambda' + 2\mu} \varepsilon_1 \tilde{w}^{(0,1)} \eta + \tilde{w}^{(2,1)}, \\ w^{(2,l)} &= \tilde{w}^{(2,l)}, \quad l = \pm 3, \pm 4, \dots \end{aligned}$$

После интегрирований снова появились произвольные функции от медленных переменных  $\tilde{w}^{(2,l)}$ .

Главный критерий обоснованности процедуры и самой модели состоит в следующем. При верном выборе медленных переменных  $\mathbf{X}, T$  условия разрешимости серии краевых задач вдоль нормали к поверхности деформируемой оболочки в некотором порядке теории возмущений должны привести к замкнутой системе уравнений в частных производных для расчета функций от медленных переменных, которые были произвольными в первых порядках теории возмущений. Эта система уравнений и будет эффективной моделью, описывающей динамику нелинейно-упругой оболочки вблизи порога устойчивости ее формы. В данной работе «замыкание» процедуры осуществляется в шестом порядке теории возмущений и дает уравнения для огибающей осесимметричных изгибов оболочки. «Замыкание» в столь высоком порядке разложения не является случайным, а отражает детальный баланс

эффектов дисперсии и нелинейности, характерных для данной задачи. Покажем, как условия разрешимости уравнений теории возмущений позволяют найти волновое число нейтрально-устойчивой линейной моды, ответственной за формирование кольцевых складок на поверхности оболочки, «верхнюю» критическую нагрузку, при которой она образуется, и, в конечном счете, построить модель динамики изгибов оболочки вблизи порога ее устойчивости.

Условия разрешимости уравнений теории возмущений приводят к тому, что для построения модели нужно знать небольшое число полей смещений  $w^{(s,l)}$ ,  $u^{(s+1,l)}$  ( $s = 0, 2$ ). Кроме уже вычисленных компонент потребуется только гармоника  $u^{(3,1)}$ , которую нетрудно получить интегрированием уравнения (3.22). Необходимые для построения модели компоненты  $(P^{km})^{(s,l)}$  тензора Пиолы–Кирхгофа и связанные с ними величины  $(\partial\varphi/\partial E_{km})^{(s,l)}$  найти из уравнений теории возмущений много проще, чем рассчитать поля смещений. Указанное обстоятельство значительно сокращает объем вычислений. Для построения модели необходимо вычислить компоненты тензора Пиолы–Кирхгофа  $(P^{13})^{(s,l)}$  ( $(P^{11})^{(s,l)}$  до пятого (четвертого) порядка включительно. Отметим, что начиная с  $n = 3$  компоненты  $(P^{13})^{(n,l)}$  и  $(P^{31})^{(n,l)}$  не равны друг другу, но, согласно определяющему соотношению (3.4), они связаны между собой, так что по известным  $(P^{13})^{(n,l)}$  всегда можно вычислить  $(P^{31})^{(n,l)}$ .

Уравнения четвертого порядка теории возмущений, следующие из второго уравнения (3.8), имеют вид

$$\begin{aligned} \varepsilon ikl(P^{11})^{(3,l)} + \varepsilon^2 \partial_X (P^{11})^{(2,l)} + \partial_\eta (P^{13})^{(4,l)} &= 0, \\ (P^{13})^{(4,l)} \Big|_{\eta=\pm 1/2} &= 0. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Предыдущими порядками теории возмущений в задаче (3.23) определены все функции, кроме  $(P^{13})^{(4,l)}$ . Условия разрешимости краевой задачи (3.23) дают не только алгебраические связи между функциями от медленных переменных, возникшими при интегрированиях, но и дифференциальное уравнение

$$\partial_X \langle P^{11} \rangle^{(2,0)} = 0. \quad (3.24)$$

Поскольку внешнее напряжение на бесконечности  $(\Theta^{11})^{(2,0)}$  предполагается постоянным, из уравнения (3.24) следует

$$\langle P^{11} \rangle^{(2,0)} \equiv (P^{11})^{(2,0)} = (\Theta^{11})^{(2,0)} = \text{const}. \quad (3.25)$$

С использованием найденных ограничений из соотношений (3.23) вычисляются  $(P^{13})^{(4,l)}$ . Не равной нулю оказывается лишь

$$(P^{13})^{(4,1)} = -i\varepsilon \partial_X \partial_k (P^{13})^{(3,1)}. \quad (3.26)$$

Для построения модели этой информации о  $(P^{13})^{(4,l)}$  достаточно. Можно не разрешать соотношение (3.26) относительно смещений  $u^{(4,1)}$ , поскольку они не входят в упрощенные уравнения нелинейной динамики оболочки. Необходимые для дальнейших расчетов производные  $(\partial\varphi/\partial E_{13})^{(4,l)}$  определяются из соотношений (3.14) и (3.26). Для построения эффективных уравнений не требуется также вид полей  $w^{(3,l)}$ , достаточно иметь выражения для деформаций  $E_{33}^{(3,l)}$ , которые вычисляются с помощью соотношений (3.17).

Из первого уравнения (3.8) в четвертом порядке теории возмущений получим

$$\begin{aligned} \varepsilon i k l (P^{31})^{(3,l)} - \varepsilon_1 (P^{22})^{(2,l)} + \partial_\eta (P^{33})^{(4,l)} &= 0, \\ (P^{33})^{(4,l)} \Big|_{\eta=\pm 1/2} &= 0. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Условие разрешимости краевой задачи (3.27) по переменной  $\eta$  при  $l = 0$  дает уже упоминавшееся ограничение (3.20). В результате обобщена формула (3.21), и соотношение (3.25) переписывается в виде

$$\begin{aligned} (P^{11})^{(2,0)} &= \frac{4\mu(\lambda' + \mu)}{\lambda' + 2\mu} \left[ \varepsilon^2 \partial_X \tilde{u}^{(0,0)} + (\varepsilon k)^2 \left| \tilde{w}^{(0,1)} \right|^2 \right] = \\ &= (\Theta^{11})^{(2,0)} = \text{const.} \end{aligned} \quad (3.28)$$

Условие разрешимости уравнений (3.27) при  $l = 1$  дает связь волнового числа нейтрально-устойчивой моды, ответственной за гофрирование оболочки, с внешним напряжением,

$$-(\Theta^{11})^{(2,0)} = \frac{\lambda' + 2\mu}{12} (\varepsilon k)^2 + \frac{4\mu(\lambda' + \mu)}{\lambda' + 2\mu} \left( \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon k} \right)^2.$$

Условие минимума функции  $[-(\Theta^{11})^{(2,0)}(k)]$  определяет критическое волновое число  $k_0$  и критическую нагрузку  $\Theta$ :

$$\begin{aligned} (\varepsilon k_0)^2 &= \frac{4\varepsilon_1}{\lambda' + 2\mu} \sqrt{3\mu(\lambda' + \mu)}, \\ \Theta &= -\frac{2d}{R} \sqrt{\frac{\mu(\lambda' + \mu)}{3}} = O(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (3.29)$$

Выражения для  $k_0$  и  $\Theta$  совпадают с полученными ранее [1] при анализе линейной эйлеровой устойчивости формы продольно сжатой оболочки.

Условия разрешимости уравнений пятого порядка теории возмущений дают алгебраические связи между функциями, которые были произвольными в первых порядках теории возмущений и уравнение

$$\partial_X \langle P^{11} \rangle^{(3,0)} = 0. \quad (3.30)$$

Дальнейшие вычисления несколько упростятся, когда нет продольных нагрузок порядка  $\varepsilon^3$ . Тогда уравнение (3.30) имеет тривиальное решение  $\langle P^{11} \rangle^{(3,0)} = 0$ , которое также связывает функции, возникшие

при интегрированиях. Важно, что все связи самосогласованы и непротиворечивы.

Условия разрешимости уравнений шестого порядка теории возмущений образуют замкнутую систему дифференциальных уравнений для расчета полей  $\sigma_{11}^{(4,0)}$ ,  $\tilde{w}^{(0,1)}$ , которая и является упрощенной моделью нелинейно-упругой динамики оболочки вблизи порога ее устойчивости:

$$\begin{aligned} \mu \varepsilon^4 \partial_\tau^2 \tilde{w}^{(0,1)} &= -k_0^2 \left( \sigma_{11}^{(4,0)} - p \right) \tilde{w}^{(0,1)} + \\ &+ \frac{1}{3} \varepsilon^4 k_0^2 (\lambda' + 2\mu) \partial_X^2 \tilde{w}^{(0,1)} - q_2 \varepsilon^4 k_0^6 \left| \tilde{w}^{(0,1)} \right|^2 \tilde{w}^{(0,1)}, \quad (3.31) \\ \mu \varepsilon^4 k_0^2 \partial_\tau^2 \left| \tilde{w}^{(0,1)} \right| &= -\partial_X^2 \left\{ \sigma_{11}^{(4,0)} + q_1 (\varepsilon k_0)^4 \left| \tilde{w}^{(0,1)} \right|^2 \right\}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} p &= \varepsilon_1^2 \left[ \frac{3}{8} (\lambda' + 2\mu) - \frac{\mu(\lambda' + \mu)}{30(\lambda' + 2\mu)} + \frac{\mu(a_1 + a_2)(3\lambda' + 5\mu)}{3(\lambda' + \mu)(\lambda' + 2\mu)} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{a_1(\lambda' + 2\mu)(\lambda' - \mu)}{6\mu(\lambda' + \mu)} + \frac{\lambda'^2}{16\mu} \right], \\ q_1 &= \frac{\lambda' + 2\mu}{4} \left( 1 - \frac{\lambda'}{2\mu} \right) + s, \quad q_2 = \frac{\lambda' + 2\mu}{2} \left( \frac{1}{3} - \frac{\lambda'}{4\mu} \right) + s, \\ s &= \frac{3a_1 + a_2}{6} + \frac{\lambda'^2 a_1 + 2\mu^2 (a_1 + a_2)}{12\mu(\lambda' + 2\mu)}. \end{aligned}$$

Параметры  $a_{1,2}$  были введены ранее в главе 1. Применительно к этой задаче они имеют смысл эффективных модулей, характеризующих «квазиплоское» нелинейно-упругое напряженное состояние оболочки:

$$a_1 = \frac{A}{2} + \frac{2\mu B}{\lambda + 2\mu}, \quad a_2 = \frac{1}{(\lambda + 2\mu)^3} [-\lambda^3 A + 6\lambda^2 \mu B + 8\mu^3 C] - \frac{A}{2}.$$

Отметим, что вычисление эффективных упругих модулей оболочки потребовало учета высших инвариантов в разложении энергии оболочки. Таким образом, в данной задаче развитие локальных неустойчивостей обусловлено не только геометрической, но и физической нелинейностью среды, а потому не может быть исследовано в рамках традиционной теории оболочек.

Величина  $\sigma_{11}^{(4,0)}$  определяется соотношением

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial E_{11}} \right)^{(4,0)} &= \sigma_{11}^{(4,0)} + \frac{\varepsilon_1^2}{6\mu(\lambda' + \mu)} [2\mu^2 (a_1 + a_2) + \\ &+ a_1 (\lambda' + 2\mu)^2] + \left| \tilde{w}^{(0,1)} \right|^2 f(\eta), \quad (3.32) \end{aligned}$$

где  $f(\eta)$  — определенная функция от  $\eta$ . Когда радиус оболочки стремится к бесконечности, параметр  $\varepsilon_1 \rightarrow 0$ . Поэтому величина  $\sigma_{11}^{(4,0)}$  описывает «квазиплоское», однородное по толщине оболочки напряженное состояние оболочки.

Разные решения системы (3.31) соответствуют разным начально-краевым условиям по медленным переменным  $X, T$ .

Когда оболочка достаточно длинная, а деформации однородны на ее концах, решение упрощенной модели следует искать при следующих граничных условиях:

$$\begin{aligned} \tilde{w}^{(0,1)} \Big|_{|x| \rightarrow \infty} &= \partial_\tau \tilde{u}^{(0,0)} \Big|_{|x| \rightarrow \infty} = 0, \\ \sigma_{11}^{(4,0)} \Big|_{|x| \rightarrow \infty} &= [\Theta^{11}]^{(4,0)} - \frac{1}{2\mu} \Theta^2 \left\{ 1 + \frac{1}{4\mu(\lambda' + \mu)^2} \times \right. \\ &\quad \left. \times [2\mu^2(a_1 + a_2) + a_1(\lambda' + 2\mu)^2] \right\}. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Приведенное выражение для  $\sigma_{11}^{(4,0)} \Big|_{|x| \rightarrow \infty}$  проще всего получить следующим способом. Пусть на бесконечности к оболочке приложено постоянное напряжение  $\Theta^{ij}$ , единственная отличная от нуля компонента которого удовлетворяет условию

$$\Theta^{11} = (\Theta^{11})^{(2)} + (\Theta^{11})^{(4)} + \dots$$

Верхние индексы указывают порядки слагаемых по параметру  $\varepsilon$ ,  $(\Theta^{11})^{(2)} = \Theta$ .

Однородные осесимметричные деформации оболочки описывается формулами

$$v^3 = y^3 \tilde{w}, \quad v^1 = y^1 \tilde{u}, \quad v^2 = 0.$$

Здесь используются размерные переменные. Отличные от нуля компоненты тензоров  $\nabla_s v^m$  и  $E_{sm}$  имеют вид

$$\begin{aligned} \nabla_1 v^1 &= \tilde{u}, \quad \nabla_2 v^2 = \nabla_3 v^3 = \tilde{w}, \\ E_{11} &= \tilde{u} + \frac{1}{2} \tilde{u}^2, \quad E_{22} = \left( \frac{y^3}{R} \right)^2 \tilde{E}_{22}, \quad E_{33} = \tilde{E}_{22} = \tilde{w} + \frac{1}{2} \tilde{w}^2. \end{aligned}$$

Для однородных деформаций инварианты тензора  $E_{km}$  выглядят просто:

$$I_1 = E_{11} + \tilde{E}_{22} + E_{33}, \quad I_2 = E_{11}^2 + \tilde{E}_{22}^2 + E_{33}^2, \quad I_3 = E_{11}^3 + \tilde{E}_{22}^3 + E_{33}^3.$$

А граничные условия (3.5) при  $|x| \rightarrow \infty$  сводятся к алгебраическим соотношениям

$$P^{11} = (1 + \tilde{u}) \frac{\partial \varphi}{\partial E_{11}} = (1 + \tilde{w}) \Theta^{11}, \quad P^{33} = (1 + \tilde{w}) \frac{\partial \varphi}{\partial E_{33}} = 0. \quad (3.34)$$

Решения уравнений (3.34) найдены методом последовательных приближений в форме разложений,

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= \tilde{u}^{(2)} + \dots, & \tilde{w} &= \tilde{w}^{(2)} + \dots, \\ E_{11} &= E_{11}^{(2)} + E_{11}^{(4)} + \dots, & E_{33} &= E_{33}^{(2)} + E_{33}^{(4)} + \dots. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Из соотношений (3.34), (3.35) сначала вычислены поправки второго порядка по  $\varepsilon$ , а затем выражение для производной

$$\left( \frac{\partial \varphi}{\partial E_{11}} \right)^{(4)} = [\Theta^{11}]^{(4)} - \frac{1}{2\mu} \Theta^2. \quad (3.36)$$

Сопоставляя формулы (3.36) и (3.32) и принимая во внимание равенство (3.29), получаем приведенное ранее выражение (3.33) для  $\sigma_{11}^{(4,0)} \Big|_{|x| \rightarrow \infty}$ .

**3.2.1. Солитоноподобные возбуждения и структуры.** Интересно, что система уравнений (3.28), (3.31), описывающая нелинейно-упругую динамику осесимметричных изгибов оболочки вблизи порога ее устойчивости, формально совпадает с полученной в главе 2 при анализе совершенно другой физической задачи о гофрировке отдельного наиболее нагруженного слоя материала в слоистой среде. Это указывает на универсальность упрощенных нелинейных уравнений и позволяет воспользоваться точными решениями, найденными и проанализированными ранее.

Нелинейная модель (3.28), (3.31) допускает решения следующего вида:

$$\begin{aligned} \tilde{u}^{(0,0)} &= \frac{(\lambda' + 2\mu)}{4\mu(\lambda + \mu)\varepsilon^2} \Theta X - k_0^2 \int^{X+VT} A^2(X') dX', \\ \tilde{w}^{(0,1)} &= A(X + VT) \exp \{i(\Omega T + \varkappa X + \varphi_0)\}, \\ \sigma_{11}^{(4,0)} &= c^{(4)} - A^2 \varepsilon^4 k_0^2 \{q_1 k_0^2 + \mu V^2\}, \quad A^2 = \left| \tilde{w}^{(0,1)} \right|^2, \end{aligned}$$

где  $V$ ,  $\varkappa$ ,  $\Omega$ ,  $\varphi_0$  — связанные между собой вещественные параметры

$$\varkappa = \frac{V\Omega}{V_{\text{cr}}^2}, \quad V_{\text{cr}}^2 = \frac{\lambda' + 2\mu}{3\mu} k_0^2.$$

Постоянная интегрирования определяется краевыми условиями. В частности, когда деформации оболочки однородны на бесконечности, постоянная определяется условиями (3.33)

$$c^{(4)} = \sigma_{11}^{(4,0)} \Big|_{|x| \rightarrow \infty}.$$



Функция  $A(X)$  — решение обыкновенного дифференциального уравнения

$$(\partial_X A)^2 = \alpha A^2 + \frac{\beta}{2} A^4 + c, \quad (3.37)$$

где

$$\alpha = -\frac{k_0^2}{\mu \varepsilon^4 (V^2 - V_{cr}^2)} \left[ c^{(4)} - p + \mu \varepsilon^4 \left( \frac{\Omega}{k_0 V_{cr}} \right)^2 (V^2 - V_{cr}^2) \right],$$

$$\beta = \frac{k_0^4}{\mu (V^2 - V_{cr}^2)} [\mu V^2 + k_0^2 (q_1 - q_2)],$$

$c$  — постоянная интегрирования.

Пространственно локализованные нелинейно-упругие складки на поверхности оболочки формируются, если размеры и материальные параметры оболочки, а также физические параметры складок удовлетворяют условиям

$$c = 0, \quad \alpha > 0, \quad \beta < 0.$$

Такие складки группируются в «светлые» солитоны,

$$A = \frac{\sqrt{2\alpha/|\beta|}}{\operatorname{ch}(\sqrt{\alpha}[X + VT])}. \quad (3.38)$$

Согласно соотношению (3.38) осесимметричные выпучивания оболочки локализованы вдоль образующей в области с характерными размерами  $\alpha^{-1/2}$ , которая движется со скоростью  $V$  (кольцевые складки могут быть и неподвижными). При  $\Omega = \varkappa = 0$  поперечные смещения

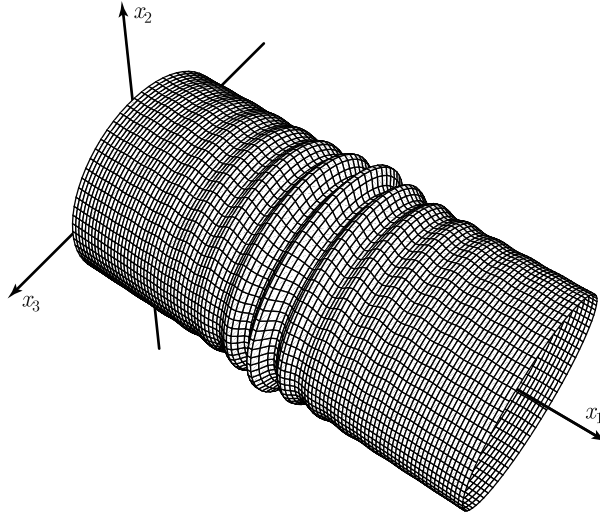


Рис. 3.3. Кольцевые складки на поверхности продольно сжатой оболочки

поверхности оболочки имеют вид (рис. 3.3)

$$w = \frac{2\sqrt{2\alpha/|\beta|} \cos(k_0\xi + \varphi_0)}{\text{ch}(\sqrt{\alpha}[X + VT])}. \quad (3.39)$$

Волнообразные искривления поверхности оболочки и их локализация в форме солитонов (3.39) начинаются с некоторой критической нагрузки, которая определяется условием  $\alpha > 0$  и отличается по абсолютной величине от  $|\Theta|$  ( $\Theta < 0$ ). Оболочка с неподвижными солитоноподобными складками выдерживает нагрузку  $|\Theta + [\Theta^{11}]^{(4,0)}|$ , которая меньше верхней критической нагрузки по линейной теории  $|\Theta|$ , если

$$[\Theta^{11}]^{(4,0)} > \max \left\{ \frac{1}{2\mu}[\Theta]^2 \left[ 1 + \frac{1}{4\mu(\lambda' + \mu)^2} [2\mu^2(a_1 + a_2) + a_1(\lambda' + 2\mu)^2] \right] + p, 0 \right\}.$$

Отличие внешней нагрузки от значения  $\Theta$  не может быть слишком большим, иначе нарушится исходное предположение (3.11) теории возмущений.

Образование пространственно локализованных кольцевых складок на поверхности продольно сжатой оболочки наблюдалось экспериментально. Наличие давления внутри оболочки способствует их формированию [1].

При  $c > 0$ ,  $0 > c > -\alpha^2/2|\beta|$ ,  $\alpha > 0$ ,  $\beta < 0$  существует два типа цепочек из светлых солитонов гофрировки, которые различаются видом перемычки, соединяющей соседние солитоны в цепочке [38] (см. также главу 2).

Светлые солитоны и цепочки из них можно считать предвестниками последующего пластического течения материала.

Когда  $\alpha < 0$ ,  $\beta > 0$ , ограниченные решения возможны только при  $0 < c \leq \alpha^2/(2\beta)$ . Они описывают локализованные возбуждения на фоне бегущей вдоль образующей оболочки кноидальной упругой волны. Простейшее из таких решений получается при  $c = \alpha^2/(2\beta)$  и представляет собой «темный» солитон,

$$w = A_0 \text{th} \left( \sqrt{|\alpha|/2} [X + VT] \right) \cos(k_0\xi + \varkappa X + \Omega T + \varphi_0), \quad A_0 = 2\sqrt{|\alpha|/\beta}. \quad (3.40)$$

Решение (3.40) имеет на пространственной бесконечности асимптотическое поведение типа поперечной акустической волны,

$$w \approx \pm A_0 \cos(k_0\xi + \varkappa X + \Omega T + \varphi_0).$$

Амплитуда нелинейной волны (3.40) имеет пространственно локализованный провал — «ямку» с характерным размером  $\alpha^{-1/2}$ , которая

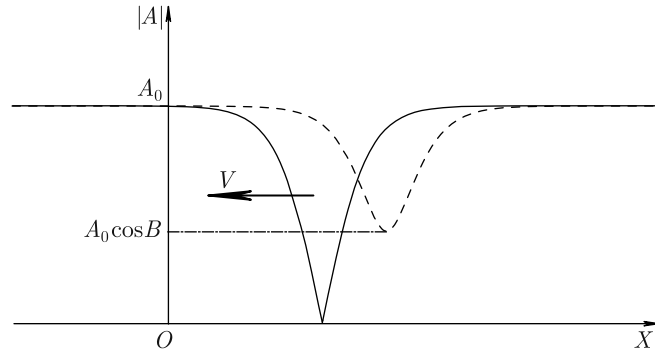


Рис. 3.4. «Темный» солитон гофрировки оболочки

движется подобно частице со скоростью  $V$  (рис. 3.4, сплошная линия). В области «ямки» амплитуда нелинейной волны уменьшается до нуля.

У модели (3.28), (3.31) могут также существовать решения следующего вида:

$$\tilde{w}^{(0,1)} = A(X + VT) \exp \{i\omega T + iF(X + VT)\}, \quad (3.41)$$

где  $\omega$  и  $V$  — действительные параметры,  $A(X)$  и  $F(X)$  — вещественные функции. Решениям (3.41) соответствуют нелинейные волны, распространяющиеся вдоль образующей оболочки на фоне кольцевых складок на ее поверхности. Поперечные смещения оболочки имеют вид

$$w = 2A(X + VT) \cos [k_0 \xi + \omega T + F(X + VT)]. \quad (3.42)$$

В силу закона сохранения

$$\partial_T \{w^* \partial_T w - \text{c.c.}\} = V_{\text{cr}}^2 \partial_X \{w^* \partial_X w - \text{c.c.}\}$$

функции  $A$  и  $F$  связаны соотношением

$$G = A^2 \{ \omega V + (V^2 - V_{\text{cr}}^2) \partial_X F \}. \quad (3.43)$$

Далее постоянная  $G$  принята отличной от нуля (при  $G = 0$  получаются уже рассмотренные решения).

Соотношение (3.43) позволяет свести систему (3.31) к уравнению для расчета функции  $z = A^2$ :

$$(\partial_X z)^2 / 8 = Ez - v_0 - v_2 z^2 - v_3 z^3 \equiv f(z), \quad (3.44)$$

где

$$v_0 = \frac{1}{2} \left[ \frac{G}{V^2 - V_{\text{cr}}^2} \right]^2, \\ v_2 = \frac{1}{2(V^2 - V_{\text{cr}}^2)} \left\{ \omega^2 V_{\text{cr}}^2 + \frac{k_0^2 (V^2 - V_{\text{cr}}^2)}{\mu \varepsilon^4} [c^{(4)} - p] \right\},$$

$$v_3 = -\frac{\beta}{4},$$

$E$  — новая постоянная интегрирования.

Ограниченные решения уравнения (3.44) существуют только при условии вещественности корней  $z_1, z_2, z_3$  полинома  $f(z)$ :

$$4v_2^3v_0 + 27v_0^2v_3^2 + 2Ev_3 [9v_2v_0 - 2E^2] - v_2^2E^2 < 0$$

и следующих неравенствах:

$$\begin{aligned} 0 < z_1 < z_2 \leq z_3 & \quad (v_3 < 0, z_1 \leq z \leq z_2), \\ z_1 < 0 < z_2 < z_3 & \quad (v_3 > 0, z_2 \leq z \leq z_3). \end{aligned} \quad (3.45)$$

Общее решение уравнений (3.43), (3.44) записывается в терминах эллиптических функций Якоби и неполных эллиптических интегралов третьего рода [62]. Первый из вариантов (3.45) имеет место при  $v_2 > 0, v_3 < 0$ . Когда корни  $z_2$  и  $z_3$  совпадают, решение выражается в элементарных функциях:

$$\begin{aligned} A^2 &= A_0^2 \left[ 1 - \sin^2 B \operatorname{sech}^2 \Psi \right], \quad \Psi = (X + VT) \sqrt{2|v_3|} A_0 \sin B, \\ F &= \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} B \operatorname{th} \Psi) + \\ &+ \left[ \sqrt{2|v_3|} A_0 \cos B - \frac{\omega V}{V^2 - V_{\text{cr}}^2} \right] (X + VT). \end{aligned} \quad (3.46)$$

Здесь вместо параметра  $E$ , удовлетворяющего неравенствам

$$\frac{v_2^2}{3|v_3|} < E < \frac{v_2^2}{4|v_3|},$$

введен угловой параметр  $B$ :  $\sin^2 B = (z_2 - z_1)/z_2$ . В результате получаются соотношения

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{v_2 - 2\sqrt{D}}{3|v_3|} = \frac{v_2 \cos^2 B}{|v_3|(2 + \cos^2 B)}, \\ z_2 &= A_0^2 = \frac{v_2 + \sqrt{D}}{3|v_3|} = \frac{v_2}{|v_3|(2 + \cos^2 B)}, \\ v_0 &= A_0^6 |v_3| \cos^2 B, \quad v_2 = A_0^2 |v_3| (2 + \cos^2 B), \quad v_3 = -\beta/4, \\ \sqrt{D} &= v_2^2 - 3|v_3|E = \frac{v_2 \sin^2 B}{2 + \cos^2 B}, \quad E = A_0^4 |v_3| (1 + 2 \cos^2 B). \end{aligned}$$

Решение (3.42), (3.46) описывает новый тип «темного» солитона — «серый» солитон на фоне поперечной монохроматической упругой волны, распространяющейся вдоль образующей оболочки. Серый солитон представляет частицеподобные образования в форме «ямки» в амплитуде поперечной нелинейной волны. В отличие от темного солитона (3.40) серый солитон (3.42), (3.46) имеет дополнительную степень свободы  $B$ , которая управляет глубиной этой «ямки» (рис. 3.4,

штриховая линия). Поскольку «темные» и «серые» солитоны формируются только вблизи порога устойчивости формы оболочки, их изучение полезно для выявления и диагностики предкритического напряженного состояния оболочки.

### 3.3. Построение модели двумерных изгибов оболочки

За образование ромбовидных вмятин или кольцевых складок на поверхности продольно сжатой оболочки ответственны разные нейтрально-устойчивые моды деформации. Поэтому теоретическое описание узоров из ромбовидных вмятин на поверхности оболочки предполагает построение другой модели.

Сформулируем условия, при которых двумерная динамика локальных изгибов оболочки вблизи порога ее устойчивости может быть корректно описана в рамках простой нелинейной модели.

Пусть порядок величины напряжений вдоль кромок оболочки удовлетворяет оценке

$$\frac{\Theta^{11}}{\mu} = O(\varepsilon^2) + O(\varepsilon^3).$$

Отметим, что наряду с резкими изгибами оболочки, которые ведут к образованию вмятин на ее поверхности, существуют более плавные деформации, связанные с процессами локализации определенных групп вмятин. Динамику «оггибающих» таких групп будем описывать медленными переменными

$$X_\alpha = \varepsilon^{1/2} \xi_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \quad T = \varepsilon^{3/2} \tau.$$

Для построения модели будем искать решение уравнений (3.8), (3.5) в виде

$$\begin{aligned} u &= \varkappa^{(1)} \xi_1 + \sum_{n=0}^{\infty} u^{(2+n/2)}(\eta, \xi, \mathbf{X}, T), \\ v &= \sum_{n=0}^{\infty} v^{(2+n/2)}(\eta, \xi, \mathbf{X}, T), \\ w &= w^{(0,0)} + w^{(1)}(\xi, \mathbf{X}, T) + \sum_{n=0}^{\infty} w^{(2+n/2)}(\eta, \xi, \mathbf{X}, T). \end{aligned}$$

Постоянные  $w^{(0,0)}$ ,  $\varkappa^{(1)}$ , характеризующие однородную деформацию оболочки под действием статистических сжимающих напряжений  $(\Theta^{11})^{(2)}$ , будут найдены в процессе вычислений. Рассматриваем сравнительно медленные во времени процессы, для которых справедлива оценка

$$\frac{\partial_\tau w}{w} = O(\varepsilon^{3/2}).$$

Изменение масштабных преобразований и оценок по сравнению с предыдущей задачей связано с появлением новых нелинейных взаимодействий и учетом других резонансных мод деформации. В конечном счете правильность выбора медленных переменных подтверждается «замыканием» редуцированной теории возмущений в упрощенную модель, которая допускает возможность баланса эффектов дисперсии и нелинейности, характерных для данной задачи.

Вычисления в первых порядках теории возмущений, аналогичные приведенным в предыдущем разделе, дают зависимость от  $\eta$  полей смещений, которые необходимы для построения модели:

$$\begin{aligned} u^{(s)} &= -\varepsilon\eta\partial_{\xi_1}\tilde{w}^{(s-1)} + \tilde{u}^{(s)}, & v^{(s)} &= -\varepsilon\eta\partial_{\xi_2}\tilde{w}^{(s-1)} + \tilde{v}^{(s)}, \\ & & s &= 2, 3, \\ u^{(2+1/2)} &= -\varepsilon^{3/2}\eta\partial_{X_1}\tilde{w}^{(1)} + \tilde{u}^{(2+1/2)}, \\ v^{(2+1/2)} &= -\varepsilon^{3/2}\eta\partial_{X_2}\tilde{w}^{(1)} + \tilde{v}^{(2+1/2)}, \\ w^{(2)} &= -\frac{\lambda\eta}{\lambda + 2\mu}E_{\alpha\alpha}^{(2)} + \tilde{w}^{(2)}. \end{aligned} \quad (3.47)$$

С помощью этой зависимости находим компоненты тензора деформаций  $E_{\alpha\beta}^{(n)}$  при  $n = 2, 2 + 1/2, 3$ . Отличны от нуля только следующие из них:

$$\begin{aligned} E_{11}^{(2)} &= \varepsilon\kappa^{(1)}, & E_{22}^{(2)} &= \varepsilon_1w^{(0,0)}, & E_{\alpha\beta}^{(3)} &= -\varepsilon^2\eta\partial_{\xi_\alpha}\partial_{\xi_\beta}\tilde{w}^{(1)} + \tilde{E}_{\alpha\beta}^{(3)}, \\ \tilde{E}_{11}^{(3)} &= \varepsilon\partial_{\xi_1}\tilde{u}^{(2)}, & \tilde{E}_{22}^{(3)} &= \varepsilon\partial_{\xi_2}\tilde{v}^{(2)} + \varepsilon_1\tilde{w}^{(1)}, \\ \tilde{E}_{12}^{(3)} &= \frac{\varepsilon}{2} \left[ \partial_{\xi_1}\tilde{v}^{(2)} + \partial_{\xi_2}\tilde{u}^{(2)} \right]. \end{aligned}$$

Компоненты  $(P^{\alpha\beta})^{(n)}$  вычисляются по формуле

$$(P^{\alpha\beta})^{(n)} = \left( \frac{\partial\varphi}{\partial E_{\alpha\beta}} \right)^{(n)} = -\lambda'\delta_{\alpha\beta}E_{\gamma\gamma}^{(n)} + 2\mu E_{\alpha\beta}^{(n)}, \quad n = 2, 2 + 1/2, 3.$$

При  $n = 2$  имеем две ненулевые компоненты

$$\begin{aligned} (P^{11})^{(2)} &= (\lambda' + 2\mu)\varepsilon\kappa^{(1)} + \lambda'\varepsilon_1w^{(0,0)}, \\ (P^{22})^{(2)} &= (\lambda' + 2\mu)\varepsilon_1w^{(0,0)} + \lambda'\varepsilon\kappa^{(1)}. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Постоянные  $\kappa^{(1)}$  и  $w^{(0,0)}$  будут конкретизированы следующими порядками теории возмущений.

В данной задаче для упрощения расчетов предполагаем отсутствие на кромках оболочки сжимающих напряжений  $O(\varepsilon^{2+1/2})$ . Это предположение будет согласовано с видом разложения (3.9), если

$$w^{(2+1/2)} = \tilde{w}^{(2+1/2)}.$$

Тогда получаем цепочку равенств

$$E_{33}^{(2+1/2)} = E_{\alpha\beta}^{(2+1/2)} = (P^{\alpha\beta})^{(2+1/2)} = \left( \frac{\partial\varphi}{\partial E_{\alpha\beta}} \right)^{(2+1/2)} = 0.$$

Особенности квазидвумерных расчетов поясним на примере. Последние два уравнения (3.8) в четвертом порядке теории возмущений приводят к краевой задаче

$$\partial_\eta (P^{\alpha 3})^{(4)} + \varepsilon \partial_{\xi_\beta} (P^{\alpha\beta})^{(3)} = 0, \quad (P^{\alpha 3})^{(4)} \Big|_{\sigma'} = 0, \quad \alpha = 1, 2. \quad (3.49)$$

Условием ее разрешимости будет

$$\partial_{\xi_\beta} \langle P^{\alpha\beta} \rangle^{(3)} = 0,$$

эквивалентное системе дифференциальных уравнений, связывающих «квазиплоские» смещения оболочки  $\tilde{u}^{(2)}$ ,  $\tilde{v}^{(2)}$  с поперечными изгибами  $\tilde{w}^{(1)}$ :

$$\begin{pmatrix} (\lambda' + 2\mu)\partial_{\xi_1}^2 + \mu\partial_{\xi_2}^2 & (\lambda' + \mu)\partial_{\xi_1}\partial_{\xi_2} \\ (\lambda' + \mu)\partial_{\xi_1}\partial_{\xi_2} & (\lambda' + 2\mu)\partial_{\xi_2}^2 + \mu\partial_{\xi_1}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{pmatrix}^{(2)} = \\ = -\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} \begin{pmatrix} \lambda'\partial_{\xi_1}\tilde{w}^{(1)} \\ (\lambda' + 2\mu)\partial_{\xi_2}\tilde{w}^{(1)} \end{pmatrix}. \quad (3.50)$$

На краях оболочки имеются статические сжимающие напряжения  $O(\varepsilon^3)$ , которые приводят к однородным деформациям

$$\tilde{u}^{(2)} \sim \varkappa^{(2)}\xi_1, \quad \tilde{w}^{(1)} \sim w^{(1,0)} = \text{const}.$$

Выделим их из полей смещений:

$$\begin{aligned} \tilde{u}^{(2)} &= \varkappa^{(2)}\xi_1 + \bar{u}^{(2)}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}, T), \\ \tilde{v}^{(2)} &= \bar{v}^{(2)}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}, T), \\ \tilde{w}^{(1)} &= w^{(1,0)} + \bar{w}^{(1)}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}, T). \end{aligned} \quad (3.51)$$

Напомним, что функции  $\tilde{u}^{(2)}$ ,  $\tilde{v}^{(2)}$ ,  $\tilde{w}^{(1)}$  появились после отделения в полях смещений зависимости от  $\eta$  — самой «быстрой» из координат, характеризующей неоднородность деформаций вдоль нормали к поверхности оболочки. После дополнительного выделения однородных деформаций (в соответствии с формулой (3.51)) координаты  $\boldsymbol{\xi}$ ,  $\mathbf{X}$  в функциях  $\bar{u}^{(2)}$ ,  $\bar{v}^{(2)}$ ,  $\bar{w}^{(1)}$  описывают разные масштабные уровни деформации. Координаты  $\boldsymbol{\xi}$  описывают волнообразные изгибы, связанные с образованием вмятин на поверхности оболочки, а координаты  $\mathbf{X}$  определяют плавные деформации, которые ведут к пространственной локализации некоторых групп из вмятин.

Для выявления зависимости функций  $\bar{u}^{(2)}$ ,  $\bar{v}^{(2)}$ ,  $\bar{w}^{(1)}$  от наиболее «быстрых» из оставшихся координат  $\boldsymbol{\xi}$  будем искать решения уравнения (3.50) в виде

$$\begin{aligned}\bar{u}^{(2)} &\sim u^{(2,\mathbf{k})}(\mathbf{X}, T) \exp(i(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\xi})), \\ \bar{v}^{(2)} &\sim v^{(2,\mathbf{k})}(\mathbf{X}, T) \exp(i(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\xi})), \\ \bar{w}^{(1,\mathbf{k})} &\sim w^{(2,\mathbf{k})}(\mathbf{X}, T) \exp(i(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\xi})).\end{aligned}$$

Тогда оно сведется к алгебраической системе, связывающей фурье-компоненты полей смещений:

$$\widehat{\mathbf{S}}\varphi^{(2,\mathbf{k})} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} i w^{(1,\mathbf{k})} f, \quad (3.52)$$

где

$$\begin{aligned}\varphi^{(2,\mathbf{k})} &= \begin{pmatrix} u^{(2,\mathbf{k})} \\ v^{(2,\mathbf{k})} \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} \lambda' k_1 \\ (\lambda' + 2\mu) k_2 \end{pmatrix}, \\ \widehat{\mathbf{S}} &= |\mathbf{k}|^2 \left\{ \mu \widehat{\mathbf{E}} + (\lambda' + \mu) \widehat{\mathbf{P}} \right\}.\end{aligned}$$

$\widehat{\mathbf{P}}$  — проекционная матрица с элементами

$$P_{\alpha\beta} = k_\alpha k_\beta / |\mathbf{k}|^2,$$

$\widehat{\mathbf{E}}$  — единичная матрица.

Используя обратную матрицу

$$\widehat{\mathbf{S}}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{k}|^2 (\lambda' + 2\mu)} \left\{ \widehat{\mathbf{E}} + \frac{\lambda' + \mu}{\mu} \boldsymbol{\sigma}_2 \widehat{\mathbf{P}} \boldsymbol{\sigma}_2 \right\},$$

где  $\boldsymbol{\sigma}_2$  — матрица Паули, из уравнения (3.52) выразим компоненты  $u^{(2,\mathbf{k})}$ ,  $v^{(2,\mathbf{k})}$  в терминах  $w^{(1,\mathbf{k})}$ , а затем вычислим фурье-гармоники компонент тензора Пиолы–Кирхгофа

$$\begin{aligned}(P^{\alpha\beta})^{(3,\mathbf{k})} &= \varepsilon^2 \eta \widehat{L}_{\alpha\beta} \bar{w}^{(1,\mathbf{k})} + \langle P^{\alpha\beta} \rangle^{(3,\mathbf{k})}, \\ \langle P^{\alpha\beta} \rangle^{(3,\mathbf{k})} &= \varepsilon_{\alpha\gamma} k_\gamma \varepsilon_{\beta\rho} k_\rho \varepsilon_1 w^{(1,\mathbf{k})} N,\end{aligned}$$

где

$$\widehat{L}_{\alpha\beta} = \lambda' \delta_{\alpha\beta} \mathbf{k}^2 + 2\mu k_\alpha k_\beta, \quad N = \frac{4\mu(\lambda' + \mu)k_1^2}{|\mathbf{k}|^2(\lambda' + 2\mu)},$$

и его однородные компоненты

$$\begin{aligned}(P^{11})^{(3,0)} &= (\lambda' + 2\mu) \varepsilon \varkappa^{(2)} + \lambda' \varepsilon_1 w^{(1,0)}, \\ (P^{22})^{(3,0)} &= (\lambda' + 2\mu) \varepsilon_1 w^{(1,0)} + \lambda' \varepsilon \varkappa^{(2)},\end{aligned} \quad (3.53)$$

где  $\varepsilon_{\alpha\beta}$  — абсолютно антисимметричный единичный тензор ( $\varepsilon_{12} = 1$ ). Постоянные  $\varkappa^{(2)}$  и  $w^{(1,0)}$  будут фиксированы условиями разрешимости следующих порядков теории возмущений.



При выполнении условия разрешимости (3.50) краевая задача (3.49) имеет решение

$$(P^{\alpha 3})^{(4)} = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial E_{\alpha 3}} \right)^{(4)} = \frac{\varepsilon^3}{2} (\lambda' + 2\mu) \left( \eta^2 - \frac{1}{4} \right) \partial_{\xi_\gamma}^2 \partial_{\xi_\alpha} \bar{w}^{(1)}. \quad (3.54)$$

Компоненты  $(P^{3\alpha})^{(4)}$  находим из соотношений (3.4), (3.54):

$$(P^{3\alpha})^{(4)} = (P^{\alpha 3})^{(4)} + (P^{\alpha\beta})^{(2)} \varepsilon \partial_{\xi_\beta} \bar{w}^{(1)}. \quad (3.55)$$

Формулы (3.54), (3.55) позволяют вычислить необходимые для построения модели фурье-гармоники функции  $(P^{3\alpha})^{(4)}$ .

Дальнейшие вычисления более утомительны, но осуществляются по схеме, подробно изложенной в предыдущем разделе. Остановимся на ключевых моментах.

Условия разрешимости первого уравнения (3.8) в четвертом и пятом порядках теории возмущений сводятся к алгебраическим соотношениям

$$\varepsilon_1 w^{(s,0)} = -\frac{\lambda' \varepsilon \mathcal{K}^{(s+1)}}{\lambda' + 2\mu}, \quad s = 0, 1, \quad (3.56)$$

$$-\langle P^{11} \rangle^{(2)} = -(\Theta^{11})^{(2)} = \frac{\lambda' + 2\mu}{12} \varepsilon^2 \Theta^2 + \left( \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} \right)^2 \frac{4\mu(\lambda' + \mu)}{(\lambda' + 2\mu)\Theta^2},$$

$$\Theta \equiv \Theta(\mathbf{k}) = \frac{|\mathbf{k}|^2}{k_1}. \quad (3.57)$$

Согласно соотношениям (3.48), (3.53) формула (3.56) равносильна равенствам

$$\langle P^{22} \rangle^{(n,0)} = 0$$

и позволяет связать продольные деформации оболочки с внешним напряжением:

$$\langle P^{11} \rangle^{(n,0)} = (\Theta^{11})^n = \frac{4\mu(\lambda' + \mu)}{\lambda' + 2\mu} \varepsilon \mathcal{K}^{(n-1)}, \quad n = 2, 3.$$

Условие минимума величины (3.57) по параметру  $\Theta$  определяет верхнюю критическую нагрузку,

$$-q^{(2)} = 2\varepsilon_1 \sqrt{\frac{\mu(\lambda' + \mu)}{3}} = -\frac{4\mu(\lambda' + \mu)}{\lambda' + 2\mu} \varepsilon \mathcal{K}^{(1)}, \quad (3.58)$$

которая совпадает с известной из анализа линейной эйлеровой устойчивости формы продольно сжатой оболочки [1].

Критическая нагрузка (3.58) соответствует значению

$$\Theta(\mathbf{k}) = \frac{|\mathbf{k}|^2}{k_1} = \frac{4\varepsilon_1 \sqrt{3\mu(\lambda' + \mu)}}{\varepsilon^2(\lambda' + 2\mu)} \equiv r_0^2.$$

Важно, что функция  $\Theta(\mathbf{k})$  почти не меняется, когда  $\partial_{k_1}\Theta \approx 0$ ,  $\partial_{k_2}\Theta \approx 0$ . Перечисленные условия выделяют волновые векторы трех нейтрально-устойчивых мод деформации

$$\mathbf{k}_1 = \frac{r_0}{2}(1, 1), \quad \mathbf{k}_2 = \frac{r_0}{2}(1, -1), \quad \mathbf{k}_3 = r_0(1, 0). \quad (3.59)$$

Три нейтрально-устойчивые резонансные моды (3.59), в первую очередь, обуславливают двумерные изгибы оболочки, поэтому примем

$$\begin{aligned} \overline{w}^{(1)}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}, T) = & \varphi_1(\mathbf{X}, T) \exp(i(\mathbf{k}_1 \cdot \boldsymbol{\xi})) + \\ & + \varphi_2(\mathbf{X}, T) \exp(i(\mathbf{k}_2 \cdot \boldsymbol{\xi})) + \chi(\mathbf{X}, T) \exp(i(\mathbf{k}_3 \cdot \boldsymbol{\xi})) + \text{с.с.}, \end{aligned} \quad (3.60)$$

где  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ ,  $\chi$  — комплекснозначные функции от медленных переменных  $X$ ,  $T$ .

В исходных координатах  $y^1$ ,  $y^2$  поля смещений не должны меняться при преобразованиях  $y^2 \rightarrow y^2 + 2\pi R$ . Это означает, что в безразмерных переменных функция (3.60) должна иметь период  $2\pi\varepsilon/\varepsilon_1$  по координате  $\xi_2$ . Далее для простоты предполагаем геометрические размеры оболочки такими, что требование периодичности функции (3.60) по координате  $\xi_2$  оказывается выполненным. Условие периодичности функции (3.60) по медленной переменной  $X_2$  обсудим особо.

Замечательно, что основная часть функций, необходимых для построения модели, выражается через уже найденные величины:

$$\begin{aligned} (\tilde{u} \ \tilde{v})^{(2+1/2)} &= -i\varepsilon^{1/2} \widehat{D}(\tilde{u} \ \tilde{v})^{(2)}, \\ (P^{\alpha\beta})^{(3+1/2)} &= \left( \frac{\partial \varphi}{\partial E_{\alpha\beta}} \right)^{(3+1/2)} = -i\varepsilon^{1/2} \widehat{D}(P^{\alpha\beta})^{(3)}, \\ (P^{\alpha 3})^{(4+1/2)} &= \left( \frac{\partial \varphi}{\partial E_{\alpha 3}} \right)^{(4+1/2)} = -i\varepsilon^{1/2} \widehat{D}(P^{\alpha 3})^{(4)}, \\ (P^{3\alpha})^{(4+1/2)} &= -i\varepsilon^{1/2} \widehat{D}(P^{3\alpha})^{(4+1/2)}, \\ (P^{\alpha 3})^{(5)} &= \left( \frac{\partial \varphi}{\partial E_{\alpha 3}} \right)^{(5)} = -\frac{\varepsilon}{2} \widehat{D}^2(P^{\alpha 3})^{(4)} + \\ &\quad + \frac{1}{2}(\lambda' + 2\mu)\varepsilon^3(\eta^2 - \frac{1}{4})\partial_{\xi_\gamma}^2 \partial_{\xi_\alpha} \tilde{w}^{(2)}, \\ (P^{3\alpha})^{(5)} &= (P^{\alpha 3})^{(5)} + \varepsilon \partial_{\xi_1} \tilde{w}^{(2)}(P^{11})^{(2)} + \varepsilon \partial_{\xi_\gamma} \tilde{w}^{(2)}(P^{\alpha\gamma})^{(3)}. \end{aligned} \quad (3.61)$$

Здесь дифференциальный оператор  $\widehat{D} = \partial_{k_\gamma} \partial_{X_\gamma}$ .

Упрощенная модель нелинейно-упругой динамики оболочки следует из условия разрешимости краевой задачи шестого порядка теории возмущений. Необходимое условие разрешимости получается в результате интегрирования первого уравнения (3.8) по толщине оболочки с учетом краевых условий на ее поверхности и сводится к равенству

$$\begin{aligned} \mu \varepsilon^5 \partial_T^2 w^{(1, \mathbf{k})} = i \varepsilon k_\alpha \langle P^{3\alpha} \rangle^{(5, \mathbf{k})} + \\ + \varepsilon^{3/2} \partial_{X_\alpha} \langle P^{3\alpha} \rangle^{(4+1/2, \mathbf{k})} - \varepsilon_1 \langle P^{22} \rangle^{(4, \mathbf{k})}. \end{aligned} \quad (3.62)$$

Входящие в правую часть равенства (3.62) фурье-компоненты  $\langle P^{3\alpha} \rangle^{(n, \mathbf{k})}$  ( $n = 4 + 1/2, 5$ ) могут быть найдены из соотношений (3.61). Функция  $\langle P^{22} \rangle^{(4, \mathbf{k})}$  выражается не только через ранее вычисленные поля, но и через компоненты  $(\tilde{u}, \tilde{v})^{(3, \mathbf{k})}$ , которые пока неизвестны.

Уравнения для расчета функций  $(\tilde{u}, \tilde{v})^{(3, \mathbf{k})}$  следуют из условий разрешимости краевых задач пятого порядка теории возмущений, которые связаны с двумя последними уравнениями (3.8). Объем вычислительной работы значительно сократится, если заметить, что указанные условия могут быть преобразованы к виду

$$\begin{aligned} - \varepsilon^2 \widehat{\mathbf{S}} \left\{ \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{pmatrix}^{(3, \mathbf{k})} + \frac{\varepsilon}{2} \widehat{D}^2 \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{pmatrix}^{(2, \mathbf{k})} \right\} + \\ + i \varepsilon \varepsilon_1 \tilde{w}^{(2, \mathbf{k})} \begin{pmatrix} \lambda' k_1 \\ (\lambda' + 2\mu) k_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}^{(5, \mathbf{k})} = 0. \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} f_\beta^{(5, \mathbf{k})} = i \frac{\varepsilon^3}{2} \left\{ k_1 \lambda' \left[ \left( \partial_{\xi_1} \bar{w}^{(1)} \right)^2 + \left( \partial_{\xi_2} \bar{w}^{(1)} \right)^2 \right]^{(2, \mathbf{k})} + \right. \\ \left. + 2\mu k_\alpha \left[ \partial_{\xi_\alpha} \bar{w}^{(1)} \partial_{\xi_\beta} \bar{w}^{(1)} \right]^{(2, \mathbf{k})} \right\}. \end{aligned}$$

Запись  $[f\varphi]^{(n, \mathbf{k})}$  означает коэффициент Фурье порядка  $\varepsilon^n$  от произведения функций  $f(\boldsymbol{\xi})$ ,  $\varphi(\boldsymbol{\xi})$ .

В конечном счете условие разрешимости (3.62) дает замкнутую систему уравнений эволюции «оггибающих» трех резонансных мод, которые ответственны за нелинейно-упругую динамику изгибов поверхности оболочки вблизи порога ее устойчивости:

$$\begin{aligned} (\partial_T^2 - s^2 \partial_{X_2}^2) \varphi_1 + \frac{1}{4} \sigma \varphi_1 + g \chi \varphi_2^* = 0, \\ (\partial_T^2 - s^2 \partial_{X_2}^2) \varphi_2 + \frac{1}{4} \sigma \varphi_2 + g \chi \varphi_1^* = 0, \\ (\partial_T^2 - s^2 \partial_{X_1}^2) \chi + \sigma \chi + g \varphi_1 \varphi_2 = 0, \end{aligned} \quad (3.63)$$

где

$$s^2 = \frac{\lambda' + 2\mu}{3\mu} r_0^2, \quad \sigma = \frac{(\Theta^{11})^{(3)}}{\mu \varepsilon^3} r_0^2, \quad g = 3r_0^2 \frac{\varepsilon_1 (\lambda' + \mu)}{\varepsilon^3 (\lambda' + 2\mu)}.$$

Отсутствие в уравнениях (3.63) функции  $\tilde{w}^{(2,\mathbf{k})}$ , принадлежащей к следующему порядку теории возмущений, гарантировано условием разрешимости (3.57) предыдущего порядка теории возмущений.

В отличие от рассмотренной ранее задачи о формировании кольцевых складок на поверхности продольно сжатой оболочки для теоретического описания (в главном приближении) двумерных узоров из вмятин, достаточно двух первых слагаемых в разложении (3.2) упругой энергии. Отсюда следует вывод о том, что значения эффективных модулей в упрощенных нелинейных моделях сильно зависят от динамической симметрии задачи.

Модельные уравнения (3.63) описывают эволюцию огибающих вмятин на поверхности оболочки. Можно показать, что если в традиционных уравнениях нелинейной теории тонких оболочек с помощью редуцированной теории возмущений выделить взаимодействие трех групп неустойчивых волн деформации, близких к тем резонансным модам, которые отвечают за гофрировку поверхности оболочки, то эти уравнения совпадут с предложенной упрощенной моделью. В то же время рассмотренные задачи показывают, что развитие локальных неустойчивостей и формирование вмятин на поверхностях оболочек не всегда определяется взаимодействиями, которые учитываются традиционными моделями оболочек.

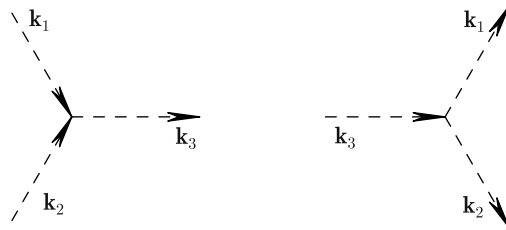


Рис. 3.5. Схематическое изображение взаимодействий между резонансными модами деформации

С математической точки зрения система (3.63) описывает трехволновые «реакции» (см. рис. 3.5). Во-первых, — «слияние» неустойчивых мод деформации  $\sim \exp(i(\mathbf{k}_\alpha \cdot \boldsymbol{\xi}))$  ( $\alpha = 1, 2$ ) с волновыми векторами, близкими к значениям  $\mathbf{k}_1 = r_0(1, 1)/2$  и  $\mathbf{k}_2 = r_0(1, -1)/2$ , в результате которого возникают волнообразные изгибы оболочки вдоль образующей. Во-вторых, — преобразование неустойчивой моды деформации  $\sim \exp(i(\mathbf{k}_3 \cdot \boldsymbol{\xi}))$  ( $\mathbf{k}_3 \simeq r_0(1, 0)$ ) в две волны, ответственные за гофрирование оболочки в направлениях, составляющих углы  $\pm 45^\circ$  с образующей.

Кроме традиционных законов сохранения энергии и импульса модель (3.63) допускает особые законы сохранения типа Мэнли–Роу [61]:

$$\partial_T (\varphi_\alpha^* \partial_T \varphi_\alpha + \chi^* \partial_T \chi - \text{с.с.}) - s^2 \{ \partial_{X_2} (\varphi_\alpha^* \partial_{X_2} \varphi_\alpha - \text{с.с.}) + \partial_{X_1} (\chi^* \partial_{X_1} \chi - \text{с.с.}) \} = 0, \quad \alpha = 1, 2. \quad (3.64)$$

В формуле (3.64) нет суммирования по повторяющемуся индексу  $\alpha$ .

**3.3.1. Узоры из вмятин и уединенные волны на поверхности оболочки.** При интегрировании системы (3.63) особое внимание следует уделить тому, что поля смещений оболочки являются периодическими функциями от исходной размерной координаты  $y^2$ . Это означает, что физический смысл имеют лишь решения уравнений (3.63) с периодом  $\varepsilon^{3/2} 2\pi/\varepsilon_1$  по медленной координате  $X_2$ .

Простейшее из решений системы (3.63)

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \mp 2\chi \equiv \varphi \left( X_1 + \frac{\gamma}{2} X_2 \right) = \varphi^* \left( X_1 + \frac{\gamma}{2} X_2 \right), \quad \gamma = \pm 1, \quad (3.65)$$

описывает неподвижные ромбовидные вмятины на поверхности оболочки. При этом поперечные смещения поверхности оболочки имеют вид

$$\begin{aligned} \bar{w}^{(1)} &= \pm A(\Psi) \left\{ \cos \frac{r_0 \xi_1}{2} \cos \frac{r_0 \xi_2}{2} - \cos r_0 \xi_1 \right\}, \\ A(\Psi) &= \frac{(\lambda' + 2\mu)R}{\mu(\lambda' + \mu)d} (\Theta^{11})^{(3)} [\alpha_2 + (\alpha_3 - \alpha_2) \text{cn}^2(\Psi, k)], \\ \Psi &= \frac{2\varepsilon_1}{\pi \varepsilon^{3/2}} K(k) \left( X_1 + \frac{\gamma}{2} X_2 \right) \equiv \frac{2K(k)}{R\pi} \left( y^1 + \frac{\gamma}{2} y^2 \right). \end{aligned} \quad (3.66)$$

Здесь  $A(\Psi)$  — огибающая вмятин на поверхности оболочки,  $\alpha_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) — корни уравнения

$$\alpha^3 + \delta^2 - \alpha^2 = 0.$$

Положительный вещественный параметр  $\delta^2$  должен удовлетворять ограничению

$$0 \leq \delta^2 < \frac{4}{27}, \quad (3.67)$$

из которого следует, что  $\alpha_i$  — вещественные числа. Их взаимное расположение на числовой оси соответствует неравенству

$$\alpha_1 \leq 0 \leq \alpha_2 < \alpha_3.$$

Модуль  $k$  функции Якоби  $\text{cn}(\Psi, k)$  и полного эллиптического интеграла первого рода  $K(k)$  фиксирован соотношениями

$$k^2 = \frac{\alpha_3 - \alpha_2}{\alpha_3 + |\alpha_1|}, \quad \frac{\pi R}{4d} \left[ \frac{3(\Theta^{11})^{(3)}(\alpha_3 + |\alpha_1|)}{\lambda' + 2\mu} \right]^{1/2} = K(k).$$

В приведенных формулах  $(\Theta^{11})^{(3)} > 0$ . Следовательно, оболочка с вмятинами воспринимает внешнее напряжение, которое по абсолютной величине меньше верхней критической нагрузки (3.58) по линейной теории.

Поле смещений (3.66) описывает полосу из ромбовидных вмятин, которая опоясывает цилиндрическую оболочку по винтовой линии с шагом  $\pi R$ . Центральная линия полосы образует угол  $\arctg 2 \approx 70^\circ$  с образующей оболочки (рис. 3.6).

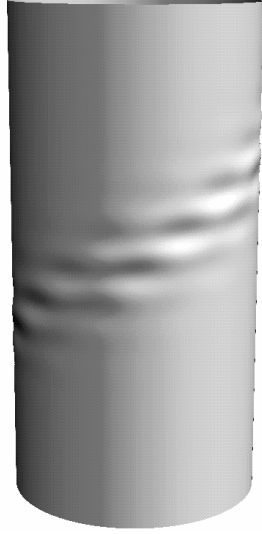


Рис. 3.6. Полоса из ромбовидных вмятин, описываемая решением (3.65), (3.66)

Оценим характерный размер  $l$  вмятин из условия  $r_0 \sim 1$ , необходимого для самосогласования предположений теории возмущений. Это дает

$$l \sim \sqrt{dR}, \quad \varepsilon \sim \sqrt{d/R}.$$

Согласно ограничению (3.67) параметр  $\delta^2$  мал, поэтому приближенное значение модуля эллиптических функций можно найти из уравнения

$$K(k) \simeq \frac{\pi R}{4d} \sqrt{\frac{3(\Theta^{11})^{(3)}}{\lambda' + 2\mu}}.$$

Огибающая  $A$  в направлении, перпендикулярном полосе из вмятин, хорошо аппроксимируется функцией

$$A \simeq \frac{(\lambda' + 2\mu)R}{\mu(\lambda' + \mu)d} (\Theta^{11})^{(3)} \operatorname{sech}^2 \left( \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15(\Theta^{11})^{(3)}}{\varepsilon^3(\lambda' + 2\mu)}} \frac{\varepsilon^{3/2}}{d} y \right),$$

где  $y$  — размерная координата в указанном направлении. Отсюда следует оценка характерного масштаба локализации вмятин,

$$d\varepsilon^{-3/2} \sim (d/R)^{1/4} R \sim l\varepsilon^{-1/2}.$$

При  $d/R \sim 0,01$  в пределах масштаба локализации изгибов содержится около трех вмятин. При этом оболочка с вмятинами воспринимает сжимающее напряжение  $-q^{(2)} + (\Theta^{11})^{(3)}$ , которое по абсолютной величине на десятки процентов меньше верхней критической нагрузки  $q^{(2)}$  по линейной теории. Нижняя критическая нагрузка, выдерживаемая оболочкой с вмятинами, может быть найдена из анализа устойчивости решения (3.66) системы (3.63) относительно малых двумерных возмущений.

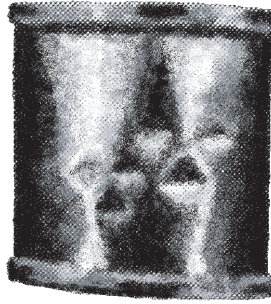


Рис. 3.7. Полоса из ромбовидных вмятин на поверхности деформированной оболочки при одноосном сжатии [1]

На рис. 3.7 представлена копия фотографии продольно сжатой оболочки с вмятинами [1], которая хорошо согласуется с решением (3.66).

При специальных начально-краевых условиях по медленным переменным  $\mathbf{X}$ ,  $T$  на поверхности продольно сжатой оболочки возможно формирование двумерных уединенных волн, которые движутся вдоль образующей.

Широкий класс волн изгиба поверхности оболочки дает подстановка

$$\begin{aligned} \varphi_1 = \varphi_2 &= f(X_1 + sT) \exp\left(i\frac{\varkappa}{2}X_2\right), \\ \chi &= -\frac{g}{\sigma}f^2(X_1 + sT) \exp(i\varkappa X_2), \end{aligned} \quad (3.68)$$

где  $f(X_1)$  — комплекснозначная функция, параметр  $\varkappa = 2n\varepsilon_1/\varepsilon^{3/2}$ ,  $n$  — целое число. Запишем функцию  $f$  через вещественные амплитуду  $A$  и фазу  $\Phi$ :

$$f = A \exp i\Phi.$$

Решениям типа (3.68) соответствуют следующие поперечные изгибы оболочки:

$$\begin{aligned} \bar{w}^{(1)} &= 4A \cos\left(\frac{r_0\xi_1}{2} + \Phi + \frac{\varkappa X_2}{2}\right) \cos\left(\frac{r_0\xi_2}{2}\right) - \\ &\quad - \frac{2g}{\sigma}A^2 \cos(r_0\xi_1 + 2\Phi + \varkappa X_2). \end{aligned} \quad (3.69)$$

Из законов сохранения (3.64) находим связь между функциями  $\Phi$  и  $A$ :

$$\partial_{X_1} \Phi = \frac{c_1}{A^2}, \quad (3.70)$$

где  $c_1$  — постоянная интегрирования.

При  $c_1 = 0$  система (3.63) сводится к уравнению (3.37) для расчета  $A$ , где

$$\alpha = -\frac{\sigma + s^2 \chi^2}{2s^2}, \quad \beta = \frac{g^2}{\sigma s^2},$$

$c$  — другая постоянная интегрирования.

Когда  $c_1 \neq 0$ , система (3.63) эквивалентна уравнению (3.44) для определения величины  $z = A^2$ , где

$$v_0 = \frac{c_1^2}{2}, \quad v_2 = \frac{\sigma + s^2 \chi^2}{8s^2}, \quad v_3 = -\frac{g^2}{4\sigma s^2},$$

$E$  — еще одна постоянная интегрирования.

Интересно, что уравнения (3.37), (3.44) появляются при анализе разных физических задач, связанных с одноосным нагружением образцов: при описании гофрировки трехслойной среды (гл. 2) и при обсуждении изгибов цилиндрической оболочки. Это свидетельствует о скрытой динамической симметрии подобных задач. Возможные типы решений указанных уравнений классифицированы в предыдущем разделе. Таким решениям в данном случае соответствуют двумерные нелинейные волны (3.69), среди которых наиболее интересны «светлые», «темные» и «серые» солитоны, движущиеся подобно частицам со скоростью  $s$  вдоль образующей оболочки на фоне структуры из ромбовидных вмятин.

Таким образом, в этой главе теоретически описаны начальные нелинейно-упругие стадии формоизменения продольно сжатых круговых оболочек вблизи порогов устойчивости их первоначальной формы.

Предложены специальные варианты редуцированной теории возмущений и новые модели для анализа процессов, связанных с образованием кольцевых складок и локализованных узоров из ромбовидных вмятин на поверхностях оболочек. Эти модели построены путем выделения в полных уравнениях нелинейной теории упругости взаимодействий тех неустойчивых мод деформации, которые, в первую очередь, определяют изменения формы оболочки. Сравнение двух близких задач (описание кольцевых складок и ромбовидных вмятин) показывает, что для теоретического описания разных сценариев формоизменения важны разные инварианты тензора деформаций в разложении упругой энергии среды. Предложенная схема нелинейной теории возмущений позволяет анализировать любые сценарии.

Для теоретического описания кольцевых складок на поверхности продольно сжатой оболочки важен учет не только геометрической нелинейности среды, проявляющейся в нелинейности тензора деформаций, но и нелинейных свойств материала, которые характеризуются



инвариантами высокого порядка в разложении упругой энергии среды. Такие инварианты не учитываются традиционной теорией оболочек.

В рамках полученных моделей аналитически описаны возможные солитоноподобные структуры из кольцевых складок и винтовые полосы из ромбовидных вмятин на поверхностях продольно сжатых оболочек. Им соответствуют экспериментально наблюдаемые узоры из вмятин на поверхностях продольно сжатых оболочек. Линейная теория оболочек не дает описания кольцевых складок, а лишь предсказывает шахматную структуру из ромбовидных вмятин, которая никогда не реализуется в экспериментах.

Двумерные узоры из неподвижных ромбовидных вмятин формируются на поверхностях оболочек при нагрузках, на десятки процентов меньших по величине в сравнении с критической нагрузкой линейной теории. Угол между винтовой полосой из ромбовидных вмятин и образующей оболочки правильно описывается предложенной теорией.

Найдены условия существования и явные решения для уединенных волн, распространяющихся вдоль оболочки на фоне структур из складок и вмятин. Поскольку уединенные волны образуются только на начальной стадии изменения формы оболочки, они могут быть использованы при диагностике напряженного состояния оболочки.

## Глава 4

# МОДЕЛИ ИЗГИБОВ ГИДРОСТАТИЧЕСКИ СЖАТОЙ ОБОЛОЧКИ ВБЛИЗИ ПОРОГА ЕЕ УСТОЙЧИВОСТИ

Немаловажный урок состоит в том, что точные решения все еще окружают нас со всех сторон и не всегда следует сразу устремляться на поиски малого  $\varepsilon$ .

*Дж. Уизем*

Круговая цилиндрическая оболочка, сжатая с внешней поверхности жидкостью высокого давления, при определенной величине давления теряет устойчивость формы и на ее поверхности появляются вытянутые вдоль образующей выпуклости и вмятины, правильно чередующиеся в поперечном сечении оболочки [1]. В этой главе в рамках нелинейной теории упругости методами, развитыми в главе 3, описана начальная стадия формоизменения гидростатически сжатой оболочки [43].

Особенность гидростатического давления  $p$  состоит в том, что оно всегда остается направленным по нормали к деформируемой поверхности. С учетом этого обстоятельства граничные условия на боковой поверхности  $\sigma$  оболочки приобретают вид [29, 31]

$$P^{i3} \Big|_{\sigma^+} = g^{ik} p \frac{\partial \det \|\mathbf{C}\|}{\partial C^k_3} \Big|_{\sigma^+}, \quad P^{i3} \Big|_{\sigma^-} = 0. \quad (4.1)$$

Здесь  $\sigma^+$  ( $\sigma^-$ ) — внешняя (внутренняя) часть боковой поверхности оболочки,

$$C_m^s = \delta_m^s + \nabla_m v^s,$$

$v^s$  — компоненты поля смещений относительно локального репера цилиндрической системы координат,  $\nabla_m$  — ковариантная производная. Выбор криволинейных координат и геометрия задачи те же, что и в главе 3. Нелинейные граничные условия (4.1) определяют дисперсию локальных изгибов оболочки, поэтому при построении упрощенной модели тщательно учитываются.

В разделе 4.1 редуктивная теория возмущений главы 1 модифицирована и применена для описания динамики изгибов оболочки. Показано, что первые порядки такой теории возмущений приводят к классической модели оболочек. Однако для длинных гидростатически сжатых оболочек традиционные нелинейные уравнения оболочек сводятся к линейным, поэтому оказываются недостаточными для описания вмятин на поверхностях оболочек. Взаимодействия, ответственные за образование вмятин, полностью проявятся лишь в следующих порядках теории возмущений.

Анализ высших приближений редуктивной теории возмущений упрощен в разделе 4.2 путем введения иерархии переменных для описания разных масштабных уровней деформации оболочки и выделения взаимодействий тех неустойчивых мод деформации, которые ответственны за образование выпуклостей и впадин на поверхности оболочки. Построены амплитудные уравнения для огибающей изгибов гидростатически сжатой оболочки вблизи порога устойчивости ее формы.

На основе амплитудных уравнений в разделе 4.3 найдены условия существования и явные выражения для пространственно локализованных возбуждений и узоров из вмятин на поверхности оболочки, которые предшествуют последующему пластическому ее формоизменению при увеличении давления.

Оболочки, деформированные жидкостью высокого давления, часто имеют протяженные участки вдоль образующей с неизменным поперечным сечением [21, 22]. Поэтому представление о характере гофрирования поперечного сечения оболочки может дать задача об изменении формы первоначально кругового кольца.

В разделе 4.4.1 в рамках подхода Коссера построена модель равновесных состояний кольца в условиях внешнего гидростатического сжатия.

В разделе 4.4.2 приведены результаты аналитических и численных исследований модели. Установлены зависимости внутренних напряжений, возникающих при деформации кольца, от внешнего давления. Определены допустимые диапазоны давлений, при которых реализуются те или иные конфигурации кольца.

В разделе 4.4.3 в рамках той же модели решена нелинейная краевая задача об изменении формы гидростатически сжатого кольца кольца при наличии ограничивающей жесткой связи — внутреннего стержня.

## 4.1. Редуктивная теория возмущений

Пусть  $l$  — характерный масштаб изгибов поверхности оболочки (и  $l \ll L$ , где  $L$  — длина оболочки),  $\tau_{ch} = l/\sqrt{\mu/\rho_0}$  — характерное время деформаций. Так же, как и в разделе 3.2, введем безразмерные переменные (3.7) и определим малые параметры (3.6).

В безразмерных переменных уравнения нелинейной теории упругости (3.3) примут вид (3.8).

Ограничимся рассмотрением сравнительно медленных процессов, удовлетворяющих оценке

$$\left| \frac{\partial_\tau v^i}{v^i} \right| = O(\varepsilon^2).$$

Для построения упрощенной модели более детальной информации о начальных условиях задачи не требуется. Пусть внешнее давление  $p$  таково, что  $p/\mu = O(\varepsilon^4)$ .

При сформулированных условиях уравнения (3.8) для оболочки можно свести к более простым. Для построения упрощенной модели решение уравнений (3.8) будем искать в форме

$$\begin{aligned} u &= \sum_{n=1}^{\infty} u^{(n)}(\xi_1, \xi_2, \eta, \tau), & v &= \sum_{n=1}^{\infty} v^{(n)}(\xi_1, \xi_2, \eta, \tau), \\ w &= w^{(0)}(\xi_1, \xi_2, \tau) + \sum_{n=2}^{\infty} w^{(n)}(\xi_1, \xi_2, \eta, \tau). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Здесь верхний индекс определяет порядок слагаемого по параметру малости  $\varepsilon$ . Формулы (3.1), (3.4), (4.2) приводят к разложениям тензоров  $E_{ij}$  и  $P^{ij}$ ,

$$P^{ij} = \sum_n (P^{ij})^{(n)}, \quad E_{ij} = \sum_n (E_{ij})^{(n)}. \quad (4.3)$$

После подстановки формул (4.3) в уравнения (3.8) и приравнивания слагаемых одного порядка малости по параметру  $\varepsilon$ , получим цепочку обыкновенных дифференциальных уравнений по «быстрой» переменной  $\eta$ , характеризующей неоднородность деформаций вдоль нормали к поверхности оболочки. Краевые условия, необходимые для их решения, следуют из разложений по параметру  $\varepsilon$  исходных граничных условий (4.1).

В первых порядках теории возмущений имеем краевые задачи

$$\begin{aligned} \partial_\eta (P^{\alpha 3})^{(s)} &= 0, & (P^{\alpha 3})^{(s)} \Big|_{\eta=\pm 1/2} &= 0, & s &= 1, 2, \\ \partial_\eta (P^{33})^{(n)} &= 0, & (P^{33})^{(n)} \Big|_{\eta=\pm 1/2} &= 0, & n &= 2, 3, \end{aligned} \quad (4.4)$$

которые имеют тривиальные решения

$$(P^{\alpha 3})^{(s)} \equiv 0, \quad (P^{33})^{(n)} \equiv 0.$$

Из них, используя формулы (3.4), вначале находим деформации

$$\begin{aligned} E_{\alpha 3}^{(s)} &= 0, \quad s = 1, 2, \\ E_{33}^{(n)} &= -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} E_{\alpha\alpha}^{(n)}, \quad n = 2, 3, \end{aligned} \quad (4.5)$$

и упрощаем выражения для компонент  $(P^{\alpha\beta})^{(n)}$  тензора Пиолы–Кирхгофа:

$$(P^{\alpha\beta})^{(n)} = \lambda' E_{\gamma\gamma}^{(n)} + 2\mu E_{\alpha\beta}^{(n)}, \quad n = 2, 3. \quad (4.6)$$

Здесь и далее греческие индексы принимают значения 1, 2. Эффективный модуль  $\lambda' = 2\mu\lambda/(\lambda + 2\mu)$  определяет напряжения, возникающие при изменении величины элемента поверхности оболочки.

Если равенства (4.5) записать в терминах полей смещений, то получим дифференциальные уравнения относительно переменной  $\eta$ , из которых легко найти зависимость от  $\eta$  функций  $u^{(s)}$ ,  $v^{(s)}$ ,  $w^{(n)}$ . Для построения традиционной нелинейной модели оболочек достаточно разрешить относительно смещений лишь первые из уравнений (4.4) с  $s = 1$ . Это дает

$$\begin{aligned} u^{(1)} &= -\varepsilon\eta\partial_{\xi_1}\tilde{w}^{(0)} + \tilde{u}^{(1)}(\xi, \tau), \\ v^{(1)} &= -\varepsilon\eta\partial_{\xi_2}\tilde{w}^{(0)} + \tilde{v}^{(1)}(\xi, \tau). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Не зависящие от  $\eta$  функции  $\tilde{u}^{(1)}$  и  $\tilde{v}^{(1)}$  появились в процессе интегрирования. Они будут конкретизированы следующими порядками теории возмущений. Как и ранее, все функции, не зависящие от  $\eta$ , будем отмечать тильдой, например  $w^{(0)} = \tilde{w}^{(0)}$ .

Формулы (4.5), (4.6), (4.7) позволяют выделить в явном виде зависимость от «быстрой» переменной  $\eta$  функций  $(P^{\alpha\beta})^{(2)}$ :

$$(P^{\alpha\beta})^{(2)} = \sigma_{\alpha\beta}^{(2)} - \varepsilon^2\eta [\lambda'\delta_{\alpha\beta}\Delta + 2\mu\partial_{\xi_\alpha}\partial_{\xi_\beta}] \tilde{w}^{(0)}, \quad \Delta = \partial_{\xi_1}^2 + \partial_{\xi_2}^2, \quad (4.8)$$

где  $\delta_{\alpha\beta}$  — символ Кронекера. Тензор

$$\sigma_{\alpha\beta}^{(2)} = \lambda'\varepsilon_{\gamma\gamma}^{(2)}\delta_{\alpha\beta} + 2\mu\varepsilon_{\alpha\beta}^{(2)}$$

описывает внутренние напряжения оболочки, вызванные ее «квазиплоскими» деформациями:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}^{(2)} &= \varepsilon\partial_{\xi_1}\tilde{u}^{(1)} + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \left( \partial_{\xi_1}\tilde{w}^{(0)} \right)^2, \\ \varepsilon_{22}^{(2)} &= \varepsilon\partial_{\xi_2}\tilde{v}^{(1)} + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \left( \partial_{\xi_2}\tilde{w}^{(0)} \right)^2 + \varepsilon_1\tilde{w}^{(0)}, \\ \varepsilon_{12}^{(2)} &= \frac{\varepsilon}{2} \left[ \partial_{\xi_1}\tilde{v}^{(1)} + \partial_{\xi_2}\tilde{u}^{(1)} + \varepsilon\partial_{\xi_1}\tilde{w}^{(0)}\partial_{\xi_2}\tilde{w}^{(0)} \right]. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Как и в случае пластины (см. главу 1), уравнения высших порядков теории возмущений для оболочки могут быть проинтегрированы только при выполнении условий разрешимости соответствующих краевых задач. Условия разрешимости получаются в результате интегрирова-

ния уравнений теории возмущений по толщине оболочки с учетом граничных условий на ее поверхности. Они дают алгебраические или дифференциальные связи между функциями, такими как  $\tilde{u}^{(1)}$  и  $\tilde{v}^{(1)}$ , которые были произвольными в первых порядках теории возмущений. Можно показать, что все условия разрешимости самосогласованны и непротиворечивы.

Проиллюстрируем роль условий разрешимости на примере краевой задачи 3-го порядка теории возмущений,

$$\partial_\eta (P^{\alpha 3})^{(3)} + \varepsilon \partial_{\xi_\beta} (P^{\alpha\beta})^{(2)} = 0, \quad (P^{\alpha 3})^{(3)} \Big|_{\eta=\pm 1/2} = 0. \quad (4.10)$$

Интегрируя уравнение (4.10) по толщине оболочки получим условия разрешимости задачи (4.10) в виде

$$\partial_{\xi_\beta} \langle P^{\alpha\beta} \rangle^{(2)} = 0. \quad (4.11)$$

Используя представление (4.8), нетрудно убедиться, что ограничения (4.11) сводятся к системе дифференциальных уравнений для расчета функций  $\tilde{u}^{(1)}$  и  $\tilde{v}^{(1)}$ :

$$\partial_{\xi_\beta} \sigma_{\alpha\beta}^{(2)} = 0. \quad (4.12)$$

При выполнении условий (4.12) краевая задача (4.10) имеет следующее решение:

$$(P^{\alpha 3})^{(3)} = \frac{\varepsilon^3}{2} (\lambda' + 2\mu) \left( \eta^2 - \frac{1}{4} \right) \Delta \partial_{\xi_\alpha} \tilde{w}^{(0)}.$$

Как видим, при интегрировании уравнений теории возмущений в первую очередь вычисляются функции  $(P^{ik})^{(n)}$ , которые в силу соотношений (3.4) связаны с производными  $(\partial\varphi/\partial E_{ik})^{(n)}$ , а через них с компонентами тензора деформаций  $E_{sp}^{(n)}$ . Поэтому по результатам предыдущих порядков теории возмущений после расчета  $(P^{ik})^{(n)}$  одновременно вычисляются функции  $(\partial\varphi/\partial E_{ik})^{(n)}$  и  $E_{sp}^{(n)}$ . Для построения упрощенных моделей оболочек этой информации часто оказывается достаточно. Не нужно вычислять все поля смещений до  $n$ -го порядка включительно. Указанная особенность теории возмущений чрезвычайно облегчает построение эффективных моделей.

Отметим также, что начиная с 3-го порядка теории возмущений

$$(P^{3\alpha})^{(m)} \neq (P^{\alpha 3})^{(m)}.$$

Однако, как следует из (3.4), компоненты  $(P^{3\alpha})^{(m)}$  всегда могут быть вычислены по известным функциям  $(P^{\alpha 3})^{(m)}$ , например,

$$(P^{3\alpha})^{(3)} = (P^{\alpha 3})^{(3)} + \varepsilon \partial_{\xi_\gamma} \tilde{w}^{(0)} (P^{\gamma\alpha})^{(2)}.$$

Уравнение для расчета  $\tilde{w}^{(0)}$  получим исходя из краевой задачи 4-го порядка теории возмущений:

$$\begin{aligned} \mu \varepsilon^2 \partial_\tau^2 \tilde{w}^{(0)} &= \varepsilon \partial_{\xi_\alpha} (P^{3\alpha})^{(3)} + \partial_\eta (P^{33})^{(4)} - \varepsilon_1 (P^{22})^{(2)}, \\ (P^{33})^{(4)} \Big|_{\eta=1/2} &= p, \quad (P^{33})^{(4)} \Big|_{\eta=-1/2} = 0. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Нетрудно проверить, что условие разрешимости задачи (4.13) дает дифференциальное уравнение

$$\begin{aligned} \mu \varepsilon^2 \partial_\tau \tilde{w}^{(0)} &= -\frac{1}{12} (\lambda' + 2\mu) \varepsilon^4 \Delta \Delta \tilde{w}^{(0)} + \\ &+ p - \varepsilon_1 \sigma_{22}^{(2)} + \varepsilon^2 \sigma_{\gamma\beta}^{(2)} \partial_{\xi_\gamma} \partial_{\xi_\beta} \tilde{w}^{(0)}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Уравнения (4.12), (4.14) образуют замкнутую систему для определения функций  $\tilde{u}^{(1)}$ ,  $\tilde{v}^{(1)}$ ,  $\tilde{w}^{(0)}$ , которая совпадает с традиционной нелинейной моделью оболочек [1, 27, 44]. Уравнения (4.12), (4.14) обычно записывают в иной форме, исключая из формул (4.9), (4.12), (4.14) поля смещений  $\tilde{u}^{(1)}$ ,  $\tilde{v}^{(1)}$  с помощью функции напряжений  $\Phi$ :

$$\sigma_{11}^{(2)} = \partial_{\xi_2}^2 \Phi, \quad \sigma_{22}^{(2)} = \partial_{\xi_1}^2 \Phi, \quad \sigma_{12}^{(2)} = -\partial_{\xi_1} \partial_{\xi_2} \Phi.$$

Таким образом, традиционная нелинейная модель оболочек представляет простейшую редукцию общих уравнений нелинейной теории упругости (3.3). Такая модель учитывает только геометрическую нелинейность задачи и не всегда достаточна для изучения нелинейно-упругой динамики оболочек. Так, у длинных гидростатически сжатых оболочек изгибы вдоль образующей слабо зависят от координаты  $\xi_1$ . В то же время, если в нелинейных уравнениях (4.12), (4.14) пренебречь зависимостью смещений от  $\xi_1$ , то они сведутся к линейным. Нелинейная динамика оболочек, сжатых жидкостью высокого давления, полностью проявится лишь в следующих порядках редуктивной теории возмущений и будет обусловлена не только геометрической, но и физической нелинейностью задачи, а также эффектами высшей пространственной дисперсии.

Для выхода за рамки «квазилинейного» приближения (4.12), (4.14) при построении модели изгибов оболочки необходимо использовать следующие (5-й и 6-й) порядки редуктивной теории возмущений. Процедура построения более общей динамической модели для гидростатически сжатой оболочки осуществляется по намеченной схеме и лишь деталями вычислений отличается от подробно изложенной в главе 1 при описании сильных изгибов пластины.

Вблизи порога устойчивости оболочки гофрировка ее поверхности осуществляется через преимущественные (нейтрально-устойчивые) линейные моды деформации. Это замечание является конструктивным, так как позволяет значительно упростить процедуру построения эффективных моделей для оболочек и сами модели. Для теоретического описания локальных деформаций оболочки удобен метод

многомасштабных разложений. С его помощью уравнения нелинейной теории упругости сводятся к упрощенным амплитудным уравнениям для огибающих вмятин на поверхности оболочки, которые учитывают специфику конкретной задачи.

## 4.2. Амплитудное уравнение

Конкретизируем разложение (4.2), учитывая геометрию изгибов поверхности гидростатически сжатой оболочки. Пусть вдоль дуги оболочки образуется  $n$  волн изгиба ее поверхности, тогда характерный масштаб  $l = R/n$ . Как и ранее, предполагаем  $\varepsilon = d/l = n d/R \ll 1$ ,  $\varepsilon_1 = d/R = O(\varepsilon^2)$ . Это означает, что мы рассматриваем случай, когда на поверхности оболочки образуется много продольных вмятин:  $n = O(1/\varepsilon)$ ,  $n > 3$ .

Деформации оболочки в окружном направлении и вдоль нормали к поверхности будем описывать прежними переменными  $\xi_2$  и  $\eta$ . Прогнбы оболочки вдоль образующей являются плавными, поэтому для их анализа введем более «медленную» координату  $X = \varepsilon y^1/l$ . Поскольку  $l/\varepsilon = R/n\varepsilon \sim R$ , переменная  $X$  уместна при описании оболочек, длина которых больше их радиуса. Далее будем обсуждать сравнительно медленные процессы, которые описываются безразмерным временем  $T = \varepsilon^2 t/\tau_{ch}$ . Выбор масштабных преобразований следует из анализа пространственно-временных откликов системы на внешнее возмущение, учитывает возможность баланса эффектов дисперсии и нелинейности [33] и будет пояснен далее.

Для построения амплитудного уравнения решение основных уравнений (3.8) будем искать в форме

$$\begin{aligned} u &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} u^{(n,m)}(X, T, \eta) \exp(im\xi_2), \\ v &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} v^{(n,m)}(X, T, \eta) \exp(im\xi_2), \\ w &= \tilde{w}^{(0,0)}(X, T) + \tilde{w}^{(0,1)}(X, T) \exp(i\xi_2) + \\ &\quad + \tilde{w}^{(0,-1)}(X, T) \exp(-i\xi_2) + \\ &\quad + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} w^{(n,m)}(X, T, \eta) \exp(im\xi_2). \end{aligned} \tag{4.15}$$

Здесь индекс  $n$  характеризует порядок малости слагаемого по параметру  $\varepsilon$ , целое число  $m$  определяет кратность гармоники. Связь волнового числа  $n/R$  преимущественной нейтрально-устойчивой моды с внешним давлением будет найдена в процессе построения модели. Переменные  $X, T$  описывают медленные модуляции основной гармоники, обусловленные ее взаимодействием с близкими неустойчивыми модами



деформации. Ввиду вещественности полей  $u$ ,  $v$ ,  $w$  коэффициенты разложений (4.15) должны удовлетворять условиям

$$u^{(n,m)} = [u^{(n,-m)}]^*, \quad v^{(n,m)} = [v^{(n,-m)}]^*, \quad w^{(n,m)} = [w^{(n,-m)}]^*.$$

Пусть концы оболочки сдерживаются связями так, что она не испытывает продольных смещений:

$$\partial_X u^{(1,0)} \Big|_{y^1=0,L} = 0. \quad (4.16)$$

Уравнения теории возмущений получаются при подстановке разложений (4.15) в уравнения (3.8) и граничные условия (4.1) после приравнивания слагаемых одного порядка малости по параметру  $\varepsilon$  с одинаковыми множителями  $\exp(im\xi_2)$ , поэтому уравнений теории возмущений будет больше, чем в предыдущем разделе.

После интегрирования уравнений теории возмущений по «быстрой» переменной  $\eta$  возникают функции от медленных переменных  $X$  и  $T$ . Как и в предыдущих главах, процедура построения упрощенной модели будет самосогласованной, если на некотором шаге условия разрешимости краевых задач теории возмущений приведут к замкнутой системе дифференциальных уравнений для расчета этих функций. В данном случае «замыкание» расчетов происходит в шестом порядке теории возмущений. Условия разрешимости дают также связь волнового числа нейтрально-устойчивой моды, ответственной за образование изгибов оболочки в окружном направлении, с внешним давлением, при котором начинается формоизменение оболочки.

Для построения упрощенной модели нет необходимости в вычислении полей смещений до шестого порядка включительно. Достаточно выявить зависимость от переменных  $\eta$  компонент  $u^{(1,m)}$ ,  $v^{(1,m)}$  ( $m = 0, 1, 2$ ),  $u^{(2,s)}$ ,  $v^{(2,s)}$  ( $s = 0, 1$ ),  $v^{(3,1)}$ ,  $w^{(2,p)}$  ( $p = 0, 1, 2$ ). Компоненты полей  $u$  и  $v$  находим интегрированием по  $\eta$  выражений для  $(P^{\alpha 3})^{(s,m)}$  ( $s = 1, 2, 3$ ), а поправки  $w^{(2,p)}$  — из уравнений  $(P^{33})^{(2,p)} = 0$ . Остальная информация извлекается из функций  $(P^{ij})^{(n,m)}$ , которые вычислить много проще.

Во втором порядке теории возмущений будут отличными от нуля лишь следующие компоненты тензоров  $E_{\alpha\beta}^{(2,m)}$ ,  $(P^{\alpha\beta})^{(2,m)}$ :

$$\begin{aligned} E_{22}^{(2,0)} &= \varepsilon_1 \tilde{w}^{(0,0)} + \varepsilon^2 \left| \tilde{w}^{(0,1)} \right|^2, & E_{21}^{(2,1)} &= \varepsilon^2 \eta \tilde{w}^{(0,1)}, \\ (P^{11})^{(2,k)} &= \lambda' E_{22}^{(2,k)}, & (P^{22})^{(2,k)} &= (\lambda' + 2\mu) E_{22}^{(2,k)}, \quad k = 0, 1. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Особенности расчетов проиллюстрируем на примере уравнений 4-го порядка теории возмущений:

$$\begin{aligned} i\varepsilon m (P^{32})^{(3,m)} + \partial_\eta (P^{33})^{(4,m)} - \varepsilon_1 (P^{22})^{(2,m)} &= 0 \\ (P^{33})^{(4,m)} \Big|_{\eta=1/2} &= p \delta_{m,0}, \quad (P^{33})^{(4,m)} \Big|_{\eta=-1/2} = 0. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Предыдущими порядками теории возмущений в уравнениях (4.18) выявлена зависимость от  $\eta$  всех функций, кроме  $(P^{33})^{(4,m)}$ .

Условие разрешимости задачи (4.18) при  $m = 0$  полностью определяет компоненту  $(P^{22})^{(2,0)}$ :

$$\langle P^{22} \rangle^{(2,0)} \equiv (P^{22})^{(2,0)} = p/\varepsilon_1, \quad (4.19)$$

а вместе с ней, согласно соотношениям (4.17), функции  $E_{22}^{(2,0)}$ ,  $(P^{11})^{(2,0)}$ ,  $w^{(0,0)}$ .

Из условия разрешимости задачи (4.18) при  $m = 1$  получаем связь волнового числа нейтрально-устойчивой линейной моды с внешним давлением,

$$p = -\frac{\varepsilon_1}{12}\varepsilon^2(\lambda' + 2\mu) \equiv -\frac{d^3 n^2}{12R^3}(\lambda' + 2\mu). \quad (4.20)$$

Формула (4.20) совпадает с определением «верхней» критической нагрузки в линейной теории оболочек [1]. Далее для определенности предполагаем, что внешнее давление удовлетворяет соотношению (4.20) с относительной погрешностью  $O(\varepsilon^2)$ , тогда

$$\langle P^{32} \rangle^{(3,1)} = O(\varepsilon^5).$$

При выполнении условий (4.19), (4.20) из уравнений (4.18) можно найти компоненты  $(P^{33})^{(4,m)}$ , а вместе с ними и функции  $(\partial\varphi/\partial E_{33})^{(4,m)}$  и  $E_{33}^{(4,m)}$ , которые входят в следующие порядки теории возмущений.

Не вдаваясь в детали расчетов, прокомментируем ключевые моменты последнего шага построения упрощенной модели. Редуктивная теория возмущений «замыкается» в упрощенную модель условиями разрешимости, которые имеют вид ( $s = 0, 1$ )

$$\begin{aligned} \mu\varepsilon^6 \partial_T^2 \tilde{w}^{(0,s)} = & \varepsilon^2 \partial_X \langle P^{31} \rangle^{(4,s)} + i\varepsilon \delta_{s1} \langle P^{32} \rangle^{(3,1)} + \\ & + i\varepsilon s \langle P^{32} \rangle^{(5,s)} - \varepsilon_1 \langle P^{22} \rangle^{(4,s)} - \varepsilon_1^2 \langle \eta P^{22} \rangle^{(2,s)} + \\ & + \varepsilon_1 \langle P^{33} \rangle^{(4,s)} + (P^{33})^{(6,s)} \Big|_{\eta=1/2}, \end{aligned} \quad (4.21)$$

где

$$(P^{33})^{(6,0)} \Big|_{\eta=1/2} = p\varepsilon_1 \tilde{w}^{(0,0)}, \quad (P^{33})^{(6,1)} \Big|_{\eta=1/2} = p\varepsilon^2 \tilde{w}^{(0,1)}/2.$$

При  $s = 0$  из уравнения (4.21) определяем компоненту  $\langle P^{22} \rangle^{(4,0)}$ . Важно, что явное выражение для  $\langle P^{22} \rangle^{(4,0)}$  не содержит других произвольных функций кроме  $\tilde{w}^{(0,1)}$ . Процедура определения  $\langle P^{22} \rangle^{(4,0)}$  повторяет вычисление  $\langle P^{22} \rangle^{(2,0)}$  на предыдущем шаге теории возмущений.

При  $s = 1$  правая часть равенства (4.21) содержит слагаемое  $\langle P^{32} \rangle^{(5,1)}$ , вычисление которого повторным использованием формулы (3.4) можно свести к расчету средних  $\langle P^{23} \rangle^{(5,1)}$ ,  $\langle P^{22} \rangle^{(4,1)}$ ,  $\langle P^{22} \rangle^{(4,2)}$  и  $\langle P^{21} \rangle^{(3,0)}$ . Средние величины  $\langle P^{22} \rangle^{(4,n)}$  ( $n = 1, 2$ ) определяются алгебраическими условиями разрешимости предыдущих краевых задач. Для функции  $\langle P^{21} \rangle^{(3,0)}$  условие разрешимости оказывается дифференциальным уравнением по переменной  $X$ , которое при краевых условиях (4.16) имеет тривиальное решение

$$\langle P^{21} \rangle^{(3,0)} = 0.$$

Функция  $(P^{23})^{(5,1)}$  находится путем интегрирования по  $\eta$  соответствующего уравнения теории возмущений. Замечательно, что все средние не содержат других произвольных функций кроме  $\tilde{w}^{(0,1)}$ . Отсутствие в уравнении (4.21) при  $s = 1$  функции  $\tilde{w}^{(2,1)}$ , принадлежащей следующему порядку теории возмущений, гарантировано условием разрешимости (4.20) предыдущего порядка теории возмущений.

В конечном счете условие разрешимости (4.21) ( $s = 1$ ) дает замкнутое дифференциальное уравнение эволюции поперечных изгибов  $\tilde{w}^{(0,1)}$  гидростатически сжатой оболочки:

$$\partial_T^2 \tilde{w}^{(0,1)} + a \tilde{w}^{(0,1)} \partial_T^2 \left| \tilde{w}^{(0,1)} \right|^2 = b \partial_X^2 \tilde{w}^{(0,1)} + c \tilde{w}^{(0,1)} - g \tilde{w}^{(0,1)} \left| \tilde{w}^{(0,1)} \right|^2, \quad (4.22)$$

где

$$a = \frac{\varepsilon^4}{\varepsilon_1^2}, \quad b = \frac{1}{3} \left( 1 + \frac{\lambda'}{2\mu} \right), \quad g = \frac{1}{4} \left( 1 + \frac{\lambda'}{2\mu} \right),$$

$$c = -\frac{1}{\varepsilon^4 \mu} \left[ \frac{p}{\varepsilon_1} + \frac{\varepsilon^2}{12} (\lambda' + 2\mu) \right] + \frac{1}{6} \left( 1 + \frac{\lambda'}{2\mu} \right) \left[ \frac{\varepsilon_1^2}{\varepsilon^4} + \frac{1}{6} \left( \frac{17}{10} + \frac{1}{\lambda' + 2\mu} \left\{ (A + 2B) \left[ 1 - \left( \frac{\lambda'}{2\mu} \right)^3 \right] + (B + C) \left[ 1 - \frac{\lambda'}{2\mu} \right]^3 \right\} \right) \right].$$

Упрощенная модель (4.22) пригодна для описания изгибов оболочки всюду за исключением узкой полоски вблизи ее концов.

### 4.3. Узоры из вмятин и компактоны

Упрощенная модель (4.22) имеет широкий класс точных решений:

$$\tilde{w}^{(0,1)} = A(X, T) \exp(i\Theta(X, T)),$$

которым соответствуют поперечные смещения оболочки следующего вида:

$$w = \frac{p}{\varepsilon_1^2(\lambda' + 2\mu)} - \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon_1} A^2(X, T) + 2A(X, T) \cos[\xi_2 + \Theta(X, T)]. \quad (4.23)$$

Здесь  $A$  и  $\Theta$  — вещественные функции.

Следствием амплитудного уравнения (4.22) является закон сохранения,

$$\partial_T [\partial_T \Theta A^2] = b \partial_X [\partial_X \Theta A^2],$$

которому можно удовлетворить подстановкой

$$\Theta = \omega T + \varphi(X), \quad A = A(X), \quad \partial_X \varphi = r/A^2, \quad r = \text{const}. \quad (4.24)$$

В общем случае при  $r \neq 0$  ограниченные решения модели записываются в терминах эллиптических функций и интегралов третьего рода. При частном выборе постоянных интегрирования результат выражается в элементарных функциях

$$\begin{aligned} A^2 &= A_0^2 [1 - \sin^2 B \operatorname{sech}^2 \Psi], \\ \Psi &= \sqrt{\frac{g}{2b}} X A_0 \sin B, \\ \varphi &= \arctg [\operatorname{tg} B \operatorname{th} \Psi] + \sqrt{\frac{g}{2b}} X A_0 \cos B, \end{aligned} \quad (4.25)$$

где  $B$  — вещественный параметр и

$$A_0^2 = \frac{2\tilde{c}}{g(2 + \cos^2 B)}, \quad \tilde{c} = c + \omega^2 > 0.$$

При  $\omega = 0$  формулы (4.23)–(4.25) описывают оболочку с вытянутыми вдоль образующей вмятинами, которые менее ярко выражены в области шириной порядка  $l [\varepsilon A_0 \sin B]^{-1} \sqrt{2b/g}$ , где амплитуды выпуклостей и впадин в поперечном сечении оболочки уменьшаются на величину  $2A_0 d \cos B$  начиная со значения  $2A_0 d$  (в исходных размерных переменных). При  $\omega \neq 0$  по поверхности оболочки с вмятинами бежит волна поперечных смещений.

Когда  $r = \omega = 0$ ,  $c > 0$ , имеем

$$A = \sqrt{\frac{2c}{g}} \sin B \operatorname{sn} \left[ X \sqrt{\frac{c}{b}} \cos B, k \right], \quad \Theta = \text{const}, \quad (4.26)$$

где вещественный параметр  $0 < B \leq \pi/4$  задает амплитуду и профиль огибающей изгибов оболочки вдоль образующей, модуль эллиптического синуса  $k = \operatorname{tg} B$ . Решению (4.23), (4.26) соответствует неподвижная структура из чередующихся вдоль образующей оболочки и в ее поперечном сечении выпуклостей и впадин (рис. 4.1).

Такие узоры из вмятин, по-видимому, могут реализоваться только при наличии подкрепляющих колец внутри оболочки (рис. 4.2) [1].

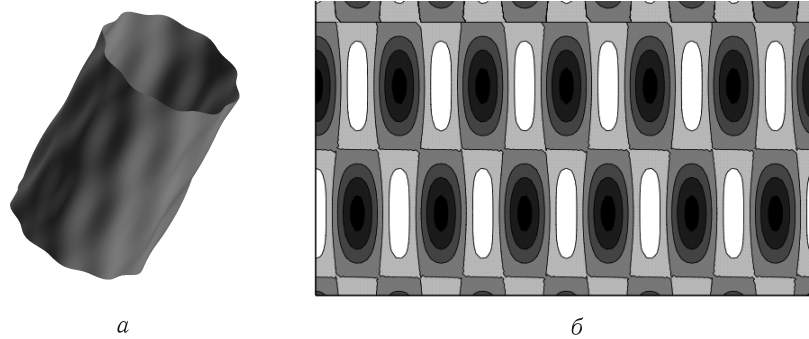


Рис. 4.1. Фрагмент оболочки с неподвижной структурой из чередующихся вмятин (а) и его развертка (б). На развертке изображены области с положительными (светлые тона) и отрицательными (темные тона) значениями компоненты  $w$

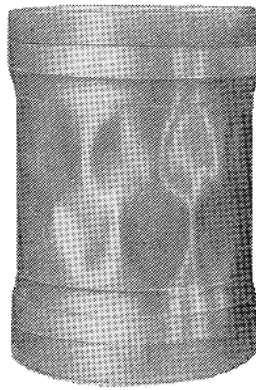


Рис. 4.2. Деформированная оболочка с чередующимися узорами на ее поверхности [1]

Обычно вдоль образующей оболочки формируется одна полуволна огибающей. Эта ситуация описывается формулами (4.23), (4.26) с параметром  $B$ , являющимся корнем уравнения

$$\frac{\varepsilon}{l} L \sqrt{\frac{c}{b}} \cos B = 2K \quad (k = \operatorname{tg} B),$$

где  $K(k)$  — полный эллиптический интеграл первого рода. Из неравенства  $c > 0$  следует, что оболочка с вмятинами выдерживает давления, которые по абсолютной величине меньше критической нагрузки линейной теории. При  $B \rightarrow \pi/4$  в центральной части оболочки амплитуда

оггибающей почти постоянна,

$$A(X) \simeq \sqrt{c/g},$$

а вблизи концов аппроксимируется выражением

$$A(\xi) \simeq \sqrt{\frac{c}{g}} \operatorname{th} \frac{\varepsilon}{l} \sqrt{\frac{c}{2b}} \xi, \quad 0 \leq \xi \leq \frac{l}{\varepsilon} \sqrt{\frac{2b}{c}},$$

где  $\xi = y^1$  или  $\xi = L - y^1$  (рис. 4.3). «Выполаживание» изгибов вдоль образующей у длинных оболочек наблюдается экспериментально и не может быть объяснено традиционной теорией оболочек.

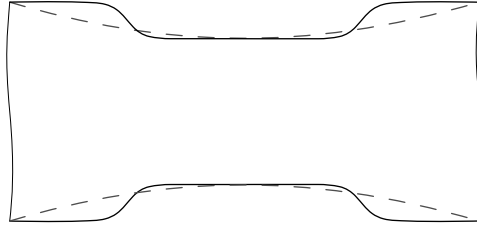


Рис. 4.3. Изгибы оболочки вдоль образующей по линейной (штриховая линия) и нелинейной (сплошная линия) теориям

Модель (4.22) допускает распространение нелинейных монохроматических волн вдоль оболочки с вмятинами. Соответствующие поперечные смещения оболочки описываются формулой (4.23), в которой следует положить

$$A(X, T) = A_0 \sin [\Omega T + kX], \quad \Theta = 0, \\ \Omega = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{a}}, \quad k^2 = \frac{g}{4ab} (1 - 2aA_0^2) + \frac{c}{b} > 0.$$

Здесь  $A_0$  — вещественный параметр.

Интересно, что после подстановки  $\tilde{w}^{(0,1)} = A(\zeta)$ ,  $\zeta = X \pm \sqrt{b}T$  и интегрирования по  $\zeta$  (постоянная интегрирования выбирается равной нулю) амплитудное уравнение (4.22) приобретает вид

$$A^2 \left[ (\partial_\zeta A)^2 + \frac{g}{4ab} A^2 - \frac{c}{2ab} \right] = 0. \quad (4.27)$$

Среди решений уравнения (4.27) имеются экзотические солитоны — «компактоны» [63]:

$$A(\zeta) = \sqrt{\frac{2c}{g}} \cos \left[ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{ab}} \zeta \right], \quad |\zeta| \leq \pi \sqrt{\frac{ab}{g}}. \quad (4.28)$$

Функция  $A(\zeta)$  обращается в нуль вне указанного интервала. Хотя ее производные разрывны на краях компактона, в уравнениях (4.22), (4.27) слагаемые с производными  $A^2$ ,  $(\partial_\zeta A)^2$  и  $A\partial_\zeta^2 A^2$  непрерывны всюду, включая края солитона. Поперечные изгибы оболочки, связанные

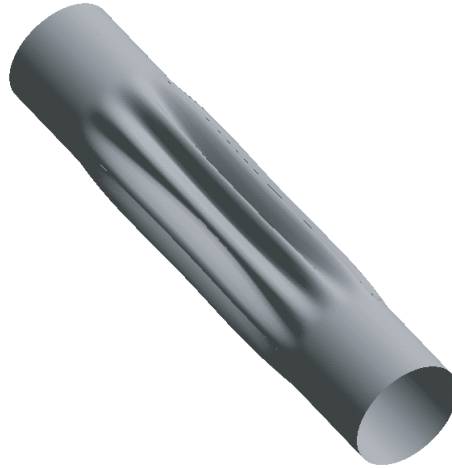


Рис. 4.4. Компактон на поверхности гидростатически сжатой оболочки

с компактоном, представлены на рис. 4.4. Ввиду своей структуры компактоны не взаимодействуют с другими солитонами до момента их столкновения. Они движутся вдоль образующей оболочки со скоростью  $l\varepsilon\sqrt{b}/\tau_{ch}$  (в исходных размерных переменных). Формирование компактонов — это проявление детального баланса эффектов нелинейности (высокого порядка) и эффектов нелинейной дисперсии. Поскольку компактоны образуются только вблизи порога устойчивости формы оболочки, они могут быть использованы для диагностики ее предкритического состояния.

#### 4.4. Гофрирование гибкого кольца в условиях внешнего гидростатического сжатия

Возможность управления развитием локальных неустойчивостей гидростатически сжатых оболочек была исследована экспериментально [21, 22]. Найдены диапазоны степеней деформации материала, внешних давлений и геометрических параметров оболочек, при которых первоначально круговые оболочки приобретают заданную жесткими связями форму поперечного сечения (круговую, квадратную, любую «зубчатую» (рис. 4.5)). Важно, что после изменения формы оболочки



Рис. 4.5. Заготовки коленвала (а) и рулевой колонки (б)

имеют протяженные участки вдоль образующей с почти постоянным поперечным сечением. С целью приблизиться к теоретическому описанию задачи рассмотрим цилиндрическую оболочку, длина которой настолько велика по сравнению с радиусом ее срединной поверхности, что распределение напряжений на достаточном удалении от концов не изменяется вдоль образующей. Тогда из соображений симметрии следует, что любое первоначально плоское поперечное сечение оболочки остается плоским, и, следовательно, продольная деформация средней части оболочки одинакова на каждой стадии изменения формы ее поперечного сечения [64, 65]. В этом случае представление о характере гофрирования поперечного сечения оболочки может дать задача об изменении формы первоначально кругового кольца единичной высоты.

В такой постановке уравнения, определяющие нелинейно-упругие изгибы тонкого кольца, совпадают с уравнениями, характеризующими изменение формы гибкого стержня, ось которого все время лежит в одной плоскости. Начиная с работ Эйлера теория стержней служит эталоном решения краевых задач для упругих систем при заданной нагрузке, рассмотрения вопросов устойчивости этих решений, а также поиска критериев, на основании которых среди нескольких форм равновесия системы следует выбирать форму, наблюдаемую экспериментально. Уместно напомнить некоторые результаты теории стержней, полезные для обсуждения задачи о формоизменении кольца.

Известно, что при изменении внешних напряжений одни формы стержней могут переходить в другие. Хотя некоторые формы равновесия стержней или колец неустойчивы, их можно стабилизировать, вводя подходящие подкрепляющие связи [1]. Именно такой метод использовался для управления формоизменением оболочек [21, 22]. Наиболее распространенный подход при анализе потери формы нагруженных стержней состоит в рассмотрении возможных статических равновесий стержней и изучении с помощью энергетических



вариационных принципов бифуркаций между ними (см. монографии [1, 65] и ссылки, приведенные там).

При быстром продольном нагружении стержня, когда скорость возрастания сжимающей силы достаточно велика, его элементы не успевают переместиться в направлении, нормальном к оси стержня. Благодаря этому сжимающее усилие может достигнуть первой критической величины и даже существенно превысить ее раньше, чем прогибы достигнут заметных значений. Поскольку в таком динамическом процессе сжимающая сила может пробежать не только первое, но и более высокие критические значения, то при этом следует ожидать появления высших форм потери устойчивости. Впервые такая возможность для стержней и колец была описана [66] в рамках линейной теории упругости. Стержень подвергался действию внезапно приложенной силы, которая затем оставалась постоянной. В общем случае время нарастания нагрузки должно быть меньше времени релаксации системы, но больше времени распространения упругих волн по стержню, чтобы не принимать во внимание волновые явления. Для выявления наблюдаемых форм стержня привлекался динамический критерий устойчивости, который состоял в следующем. При анализе динамики начальный прогиб стержня разлагался в ряд Фурье по формам статической потери устойчивости. Предполагалось, что реализуется форма стержня, амплитуда изменения которой обладает наибольшей скоростью нарастания при данной нагрузке. На поверхностях гидростатически сжатых оболочек также наблюдаются разное число выпуклостей и вмятин в зависимости от их геометрических и материальных параметров, величины внешнего давления [1, 21, 22].

При больших нагрузках локальные изгибы кольца или стержня определяются нелинейными уравнениями, поэтому одной и той же нагрузке может соответствовать несколько различных деформированных состояний. Число стационарных решений растет с ростом нагрузки, и они могут резко различаться. При этом одни равновесные формы кольца или стержня оказываются устойчивыми, а другие — нет (см. [1, 65, 67] и ссылки, приведенные там).

Были найдены [68, 69] нелинейные статические решения для закрученных стержней. Путем линеаризации полных динамических уравнений для стержней около возможных статических состояний выявлены области значений параметров задачи, при которых эти состояния будут неустойчивыми. Линеаризация дает лишь набор неустойчивостей и критерий выделения возможной формы стержня путем анализа наиболее нестабильных мод. По мере развития неустойчивости линейное приближение нарушается, становятся важными эффекты взаимодействия разных неустойчивых мод деформации. Нелинейные взаимодействия ведут к локализации изгибов и стабилизируют форму кольца или стержня. На примере закрученных стержней показано [69–71], что вблизи точек бифуркации возможен глобальный нелинейный

анализ динамики локальных деформаций и условий устойчивости формы стержней с помощью амплитудных уравнений.

Амплитудные уравнения для стержней получают методами редуцированной теории возмущений из полных трехмерных динамических уравнений нелинейной модели Кирхгофа. При этом отличие внешнего напряжения от его критического значения определяет порядок малости членов нелинейной теории возмущений и служит основанием для введения медленных переменных при описании разных масштабных уровней деформации. В рамках близкого подхода нами аналитически описаны малоамплитудные узоры из вмятин на поверхностях продольно и гидростатически сжатых оболочек (см. [42, 43] и разделы 3.2.1, 3.3.1, 4.3 этой книги).

В данном разделе изложены результаты работы [45], в которой в рамках подхода Коссера [65] проанализировано изменение формы тонкого гибкого кольца под действием внешнего гидростатического давления.

На основе предложенной модели теоретически описана начальная нелинейно-упругая стадия формоизменения кольца, связанная с образованием чередующихся выпуклостей и впадин в окружном направлении кольца. Для технологических приложений важно, что модель позволяет теоретически описать процессы, связанные с деформированием кольца в присутствии жестких связей, которые контролируют число и амплитуду выпуклостей и впадин в окружном направлении кольца и предотвращают образование жестких ребер на его поверхности.

**4.4.1. Формулировка модели.** Будем изучать плоские равновесные состояния первоначально кругового гибкого кольца единичной высоты, подверженного внешнему гидростатическому давлению (рис. 4.6). Пусть ось кольца направлена вдоль оси  $Oz$  декартовой системы координат. В недеформированном состоянии срединная линия кольца имеет радиус  $R$  (толщина кольца  $d \ll R$ ), а при изменении формы описывается кривой

$$\mathbf{r}(s) = (x(s), y(s), 0). \quad (4.29)$$

В качестве параметра  $s$  плоской кривой  $\mathbf{r}(s)$  выберем ее длину. Тогда единичный вектор касательной к кривой есть

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}. \quad (4.30)$$

Поскольку при изгибах тонкого кольца в главном приближении сохраняются расстояния между точками средней линии, имеем  $0 \leq s \leq 2\pi R$ .

Введем орт  $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$  оси кольца. Тогда орт внешней нормали к поверхности кольца есть

$$\mathbf{n} = [\boldsymbol{\tau} \times \mathbf{k}].$$

В подходе Коссера конфигурация кольца задается парой векторнозначных функций  $\mathbf{r}(s)$  и  $\mathbf{n}(s)$  [65].

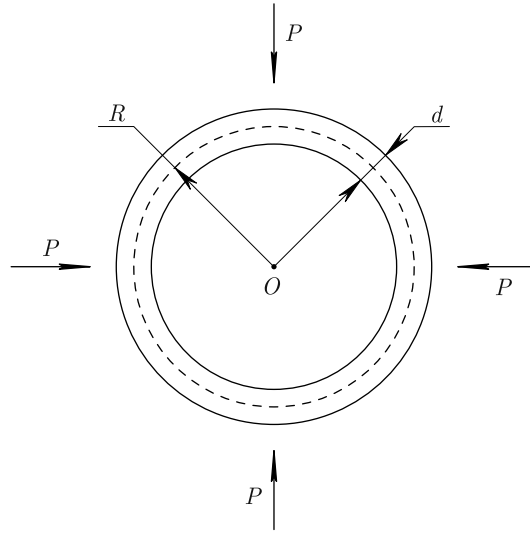


Рис. 4.6. Кольцо под действием гидростатического давления

Рассмотрим элемент кольца, заключенный в окружном направлении между радиус-векторами  $\mathbf{r}(s + ds)$  и  $\mathbf{r}(s)$  (рис. 4.7). Материал, расположенный в области  $\tilde{s} \geq s + ds$ , оказывает воздействие на выделенный элемент результирующей контактной силой  $\mathbf{q}(s + ds)$  и контактным моментом  $\mathbf{m}(s + ds) = m(s + ds)\mathbf{k}$ , а материал в области  $\tilde{s} \leq s$  — силой  $-\mathbf{q}(s)$  и моментом  $\mathbf{m}(s) = -m(s)\mathbf{k}$ . Внешнее давление всегда направлено по нормали к поверхности кольца. Это приводит к действию силы  $p\mathbf{n}ds$  на рассматриваемый элемент. В случае внешнего гидростатического сжатия  $p < 0$ .

При учете этих замечаний условия равновесия кольца сводятся к классическим уравнениям [65]

$$\frac{d\mathbf{q}}{ds} + p\mathbf{n} = 0, \quad \frac{d\mathbf{m}}{ds} + [\boldsymbol{\tau} \times \mathbf{q}] = 0. \quad (4.31)$$

Уравнения (4.31) одинаковы для плоскодеформированного и плосконапряженного состояний кольца.

Вектор контактной силы  $\mathbf{q}(s)$  лежит в плоскости  $xOy$  и потому допускает представление

$$\mathbf{q} = q_n \mathbf{n} + q_\tau \boldsymbol{\tau}. \quad (4.32)$$

Воспользуемся материальным уравнением Эйлера–Бернулли–Клебша [65], согласно которому момент сил, возникающий при гофрировании кольца, пропорционален изменению его кривизны  $\tilde{\varkappa}$ :

$$m = -\gamma \left( \tilde{\varkappa} + \frac{1}{R} \right), \quad (4.33)$$

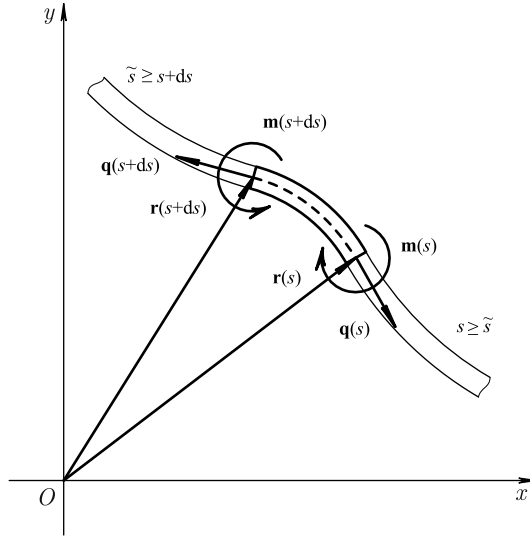


Рис. 4.7. Силы, действующие на элемент кольца

где  $\gamma$  — коэффициент пропорциональности. В линейной теории

$$\gamma = \frac{Ed^3}{12(1-\sigma^2)}, \quad (4.34)$$

$d$  — толщина кольца,  $E$  — модуль Юнга,  $\sigma$  — коэффициент Пуассона. Результаты теории упругости часто распространяют на упруго-пластическую область путем формальной замены модуля Юнга на касательный модуль [1]. Далее будем рассматривать  $\gamma$  как феноменологический параметр модели.

Учитывая формулы Френе,

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = \tilde{\boldsymbol{\kappa}}\mathbf{n}, \quad \frac{d\mathbf{n}}{ds} = -\tilde{\boldsymbol{\kappa}}\boldsymbol{\tau}, \quad (4.35)$$

из соотношений (4.31), (4.32) получаем замкнутую систему дифференциальных уравнений относительно функций  $q_n$ ,  $q_\tau$ ,  $\tilde{\boldsymbol{\kappa}}$ ,

$$\frac{dq_\tau}{ds} - q_n \tilde{\boldsymbol{\kappa}} = 0, \quad \frac{dq_n}{ds} + p + q_\tau \tilde{\boldsymbol{\kappa}} = 0, \quad \gamma \frac{d\tilde{\boldsymbol{\kappa}}}{ds} + q_n = 0.$$

Отсюда выражаем сдвиговую и тангенциальную силы через кривизну поперечного сечения кольца:

$$q_n = -\gamma \frac{d\tilde{\boldsymbol{\kappa}}}{ds}, \quad q_\tau = \gamma \left( Q - \frac{\tilde{\boldsymbol{\kappa}}^2}{2} \right).$$

Постоянная интегрирования  $Q$  будет определена далее.

Кривизна срединной линии кольца удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2 \tilde{\varkappa}}{ds^2} = Q \tilde{\varkappa} - \frac{|p|}{\gamma} - \frac{\tilde{\varkappa}^3}{2}. \quad (4.36)$$

Для дальнейшего анализа удобно перейти к безразмерным переменным

$$\theta = s/R, \quad \varkappa = R \tilde{\varkappa}, \quad q_0 = R^2 Q.$$

Тогда  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ .

В безразмерных переменных первый интеграл уравнения (4.36) примет вид

$$\left( \frac{d\varkappa}{d\theta} \right)^2 = q_0 \varkappa^2 - 2 \frac{|p| R^3}{\gamma} \varkappa - \frac{\varkappa^4}{4} + \frac{l_0}{4}, \quad (4.37)$$

где  $l_0$  — еще одна постоянная интегрирования.

Анализ показывает, что физически содержательные решения уравнения (4.37) получаются только тогда, когда полином четвертой степени в правой части равенства (4.37) имеет два вещественных корня  $a$  и  $b$  и два комплексно-сопряженных корня  $c = b_1 + ia_1$  и  $c^*$ . Корни полинома и параметры уравнения (4.37) связаны соотношениями

$$b_1 = -\frac{1}{2}(a+b), \quad l_0 = -ab|c|^2, \quad (4.38)$$

$$4q_0 = \frac{3}{4}(a+b)^2 - a_1^2 - ab,$$

$$8 \frac{R^3 |p|}{\gamma} = -(a+b) \left[ a_1^2 + \frac{1}{4}(a-b)^2 \right] > 0. \quad (4.39)$$

Пусть для определенности  $a > b$ . Учет соотношения (4.39) приводит к двойному неравенству

$$b < a < -b,$$

из которого следует, что параметр  $b$  всегда отрицателен. При этом число  $a$  может быть как отрицательным, так и положительным.

При сформулированных условиях общее решение уравнения (4.37) имеет вид [62]

$$\varkappa = \frac{aB(1 - \operatorname{cn}\chi) + bA(1 + \operatorname{cn}\chi)}{B(1 - \operatorname{cn}\chi) + A(1 + \operatorname{cn}\chi)}, \quad (4.40)$$

где

$$\chi = \frac{\theta}{2g}, \quad A^2 = (a - b_1)^2 + a_1^2, \\ B^2 = (b - b_1)^2 + a_1^2, \quad g = (AB)^{-1/2}.$$

Модуль  $k$  эллиптических функций Якоби определяется выражением

$$k^2 = \frac{(a-b)^2 - (A-B)^2}{4AB}, \quad 0 \leq k^2 \leq 1.$$

Кривизна срединной линии кольца должна быть одинаковой при  $\theta = 0$  и  $\theta = 2\pi$ . Это приводит к первому ограничению, налагаемому на параметры задачи:

$$\pi\sqrt{AB} = 4K(k)m. \quad (4.41)$$

Здесь  $K(k)$  — полный эллиптический интеграл первого рода, параметр  $m = 2, 3, \dots$  задает число выпуклостей и впадин в окружном направлении кольца.

Согласно выражению (4.40)  $\varkappa \in [b, a]$ . Точки, в которых  $\varkappa = a$ , соответствуют дну впадин, а точки, где  $\varkappa = b$ , определяют вершины выпуклостей гофрированного кольца.

В плоскости  $xOy$  единичные векторы  $\mathbf{n}$  и  $\boldsymbol{\tau}$  допускают параметризацию:

$$\mathbf{n} = (\cos \Phi(\theta), \sin \Phi(\theta)), \quad \boldsymbol{\tau} = (-\sin \Phi(\theta), \cos \Phi(\theta)),$$

и потому уравнения Френе (4.35) сводятся к уравнению для расчета фазы  $\Phi(\theta)$ ,

$$\frac{d\Phi}{d\theta} = -\varkappa(\theta). \quad (4.42)$$

Установлено, что при всех допустимых значениях параметров задачи решение уравнения (4.42)

$$\begin{aligned} \Phi(\theta) = & \left[ \frac{AB}{a+b} - \frac{aB+bA}{A+B} \right] \theta - \\ & - \frac{(A+B)^2}{2\sqrt{AB}(a+b)} \Pi \left( \frac{\theta\sqrt{AB}}{2}, \alpha^2, k \right) + \\ & + 2 \operatorname{arctg} \left[ \frac{a-b}{2\sqrt{AB}} \operatorname{sd} \left( \frac{\theta\sqrt{AB}}{2}, k \right) \right] \end{aligned} \quad (4.43)$$

обладает свойством  $\Phi(0) < \Phi(2\pi)$ . Здесь

$$\operatorname{sd}(x, k) = \frac{\operatorname{sn}(x, k)}{\operatorname{dn}(x, k)},$$

$\Pi(x, \alpha^2, k)$  — неполный эллиптический интеграл третьего рода [62] с модулем  $k$  и параметром

$$\alpha^2 = -\frac{(A-B)^2}{4AB}, \quad \alpha^2 < 0.$$

Постоянная, появляющаяся после интегрирования уравнения (4.42), определяет положение луча в плоскости  $xOy$ , от которого отсчитывается фаза  $\Phi(\theta)$ . В формуле (4.43) постоянная интегрирования выбрана так, что  $\Phi(\theta = 0) = 0$  и луч совпадает с осью  $Ox$  системы координат.

Функция  $\Phi(\theta)$  должна получать приращение  $2\pi$  при изменении переменной  $\theta$  от нуля до  $2\pi$ , чтобы кривая  $\mathbf{r}(\theta)$  не имела петель.

Это требование приводит ко второму ограничению, налагаемому на параметры задачи:

$$\frac{Ab + Ba}{A + B} + 1 + 2m [\Lambda(\beta, k) - 1] = 0, \quad (4.44)$$

где  $\Lambda(\beta, k)$  — лямбда-функция Хеймана [62],

$$\Lambda(\beta, k) = \frac{2}{\pi} [E(k)F(\beta, k') + K(k)E(\beta, k') - K(k)F(\beta, k')],$$

$$\beta = \arcsin \frac{2\sqrt{AB}}{A + B}, \quad k' = \sqrt{1 - k^2},$$

$F(\beta, k')$  и  $E(\beta, k')$  — неполные эллиптические интегралы первого и второго рода с модулем  $k'$ ,  $K(k)$  и  $E(k)$  — полные эллиптические интегралы первого и второго рода с модулем  $k$ .

Интегрирование уравнений (4.30), (4.42) дает форму срединной линии кольца,

$$x(\theta) = x_0 - R \int_0^\theta \sin \Phi(\theta') d\theta', \quad y(\theta) = y_0 + R \int_0^\theta \cos \Phi(\theta') d\theta'.$$

Условия

$$\int_0^{2\pi} x(\theta) d\theta = 0, \quad \int_0^{2\pi} y(\theta) d\theta = 0$$

определяют координаты точки пересечения оси кольца с плоскостью  $xOy$ ,

$$x_0 = \frac{R}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\theta \sin \Phi(\theta') d\theta' d\theta, \quad y_0 = -\frac{R}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\theta \cos \Phi(\theta') d\theta' d\theta.$$

Приближение линейной теории соответствует малому изменению кривизны кольца, когда параметры  $a$  и  $b$  близки друг к другу и к кривизне недеформированного кольца:

$$a = -1 + \varepsilon, \quad b = -1 - \varepsilon; \quad 0 < \varepsilon \ll 1.$$

Отсюда, согласно соотношениям (4.38), вытекает, что  $b_1 \approx 1$  и, следовательно,

$$c \approx 1 + ia_1, \quad A \approx B \approx \sqrt{4 + a_1^2}.$$

Тогда модуль эллиптических функций и интегралов  $k \approx 0$ . В свою очередь, это приводит к тому, что все определяющие соотношения разрешаются в элементарных функциях. Условие (4.44) удовлетворяется в линейном приближении тождественно, а ограничение (4.41) дает

$$A \approx B \approx \sqrt{4 + a_1^2} = 2m. \quad (4.45)$$

В линейном по  $\varepsilon$  приближении для кривизны кольца и фазы имеем

$$\varkappa \approx -1 - \varepsilon \cos m\theta, \quad \Phi \approx \theta + \frac{\varepsilon}{m} \sin m\theta.$$

Малоамплитудное гофрирование кольца описывается соотношением

$$\sqrt{x^2 + y^2} \approx R \left( 1 + \frac{\varepsilon \cos m\theta}{m^2 - 1} \right). \quad (4.46)$$

Согласно соотношениям (4.39), (4.45) вмятины (4.46) появляются на кольце, когда внешнее давление превышает пороговое значение, удовлетворяющее условию

$$|p|_{\Lambda} = \frac{\gamma(m^2 - 1)}{R^3}. \quad (4.47)$$

Если для  $\gamma$  использовать приближение (4.34), то модуль порогового давления (4.47) совпадет с критической нагрузкой по линейной теории [1].

При формоизменении гидростатически сжатых оболочек экспериментально наблюдались конфигурации как с малым, так и с большим числом выпуклостей и вмятин на их поверхностях [1, 21, 22].

В общем случае условия (4.39), (4.41), (4.44) образуют замкнутую систему уравнений для расчета неизвестных постоянных  $a$ ,  $b$ ,  $a_1$ . Параметры этой системы — число вмятин  $m$  в окружном направлении кольца и внешнее давление  $p$ .

Ввиду существенной нелинейности уравнений задача может быть решена только с привлечением методов приближенных вычислений. В следующих разделах приведены результаты расчетов на основе метода сопряженного градиента [72].

Уравнения нелинейной динамики тонкого кольца при его сильных изгибах нетрудно получить в рамках известного подхода [68, 73]. Положение материальных точек кольца будем описывать радиус-вектором

$$\mathbf{r}(s, \eta, t) = \mathbf{r}_0(s, t) + \eta \mathbf{n}(s, t),$$

где  $\mathbf{r}_0(s, t) = (x(s, t), y(s, t), 0)$  — срединная линия,  $0 \leq s < 2\pi R$  — ее натуральный параметр,  $|\eta| \leq d/2$ ,  $d$  — толщина кольца. Вектор нормали  $\mathbf{n}(s, t)$  и тангенциальный вектор  $\boldsymbol{\tau}(s, t)$  к плоской кривой  $\mathbf{r}_0(s, t)$  запишем в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{n}(s, t) &= (\cos \Phi(s, t), \sin \Phi(s, t), 0), \\ \boldsymbol{\tau}(s, t) &= \partial_s \mathbf{r}_0 = (-\sin \Phi(s, t), \cos \Phi(s, t), 0). \end{aligned} \quad (4.48)$$

Пусть  $\mathbf{f}(s, \eta, t)$  — плотность контактной силы на единицу площади в поперечном сечении кольца. Рассмотрим элемент кольца, расположенный между радиус-векторами  $\mathbf{r}_0(s + ds, t)$  и  $\mathbf{r}_0(s, t)$ . Материал, расположенный в области  $\tilde{s} \geq s$ , оказывает воздействие на поперечное сечение кольца с параметром  $s$  контактной силой  $\mathbf{q}(s, t)$  и контактным



моментом внутренних сил  $m\mathbf{k}$  относительно точки  $\mathbf{r}_0(s, t)$ , которые вычисляются по формулам [68, 73]

$$\mathbf{q}(s, t) = \int_{-d/2}^{d/2} \mathbf{f}(s, \eta, t) d\eta, \quad m\mathbf{k} = \int_{-d/2}^{d/2} \eta [\mathbf{n}(s, t) \times \mathbf{f}(s, \eta, t)] d\eta,$$

$$\mathbf{k} = (0, 0, 1).$$

Гидростатическое давление  $p(t)$  приводит к силе  $p(t)\mathbf{n}(s, t)ds$ , действующей на выделенный элемент кольца.

При сформулированных условиях законы сохранения импульса и момента импульса для элемента кольца сводятся к уравнениям

$$\rho A \partial_t^2 \mathbf{r}_0 = p\mathbf{n} + \partial_s \mathbf{q}, \quad \rho I [\mathbf{n} \times \partial_t^2 \mathbf{n}] = \mathbf{k} \partial_s m + [\partial_s \mathbf{r}_0 \times \mathbf{q}],$$

где  $\rho = \text{const}$  — плотность материала,  $A$  и  $I$  — площадь и момент инерции поперечного сечения кольца (для кольца единичной высоты и постоянной толщины  $A = d$ ,  $I = d^3/6$ ). Используя формулы (4.32), (4.33), (4.48), получаем замкнутую систему динамических уравнений для полей  $q_n$ ,  $q_\tau$ ,  $\Phi$ ,

$$\rho I \partial_t^2 \Phi - \gamma \partial_s^2 \Phi + q_n = 0,$$

$$\rho A \begin{pmatrix} \partial_t^2 \Phi \\ (\partial_t \Phi)^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \partial_s & -\partial_s \Phi \\ \partial_s \Phi & \partial_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_s q_n + p - q_\tau \partial_s \Phi \\ \partial_s q_\tau + q_n \partial_s \Phi \end{pmatrix} = \mathbf{0}. \quad (4.49)$$

Как и ранее, кривизна кольца  $\tilde{\varkappa}$  определяется соотношением

$$\tilde{\varkappa} = -\partial_s \Phi.$$

Далее приведены возможные равновесные формы кольца. Они выражаются в терминах эллиптических функций и интегралов. Линеаризованные вблизи каждого статического решения динамические уравнения (4.49) сводятся к неавтономной системе уравнений с коэффициентами, выражающимися через эллиптические функции. Исследование спектра такой задачи требует специального анализа. В то же время динамика локальных деформаций вблизи найденных равновесных форм кольца может быть исследована численными методами на основе модели (4.49).

**4.4.2. Изменение формы кольца в условиях внешнего гидростатического сжатия.** Численное моделирование позволяет классифицировать возможные типы гофрирований кольца и их связь с внешним давлением.

Напряжения сжатия в материале кольца вдоль направлений  $\boldsymbol{\tau}(\theta)$  определяются формулой

$$T = \frac{q_\tau}{d} = \frac{\gamma}{dR^2} \left( q_0 - \frac{1}{2} \varkappa^2 \right),$$

где  $d$  — толщина кольца. Расчеты показали, что материал кольца испытывает максимальное сжатие вблизи вершин выпуклостей:

$$|T|_{\max} = \frac{\gamma}{dR^2} \left| q_0 - \frac{1}{2}b^2 \right|.$$

Сдвиговые напряжения вдоль направлений  $\mathbf{n}(\theta)$

$$N = \frac{q_n}{d} = -\frac{\gamma}{dR^2} \frac{d\kappa}{d\theta}$$

максимальны там, где вторая производная от кривизны обращается в нуль. В этих точках  $\kappa$  является корнем  $\kappa_1 \in (b, a)$  уравнения

$$q_0\kappa - \frac{R^3}{\gamma}|p| - \frac{\kappa^3}{2} = 0.$$

Отсюда

$$|N|_{\max} = \frac{\gamma}{2dR^2} \sqrt{(a - \kappa_1)(\kappa_1 - b)} |\kappa_1 - c|.$$

Рассматриваемая модель пригодна для анализа изменений формы гибкого кольца до тех пор, пока какие-либо его участки не придут в соприкосновение. Когда два участка кольца смыкаются, природа их дальнейшего механического взаимодействия должна быть тщательно конкретизирована.

Выясним, при каких значениях  $|p|_*$  произойдет смыкание участков кольца. Пусть ось  $Ox$  декартовой системы координат проходит через вершину  $A$  выпуклости,  $O$  — центр кольца (рис. 4.8). Не ограничивая

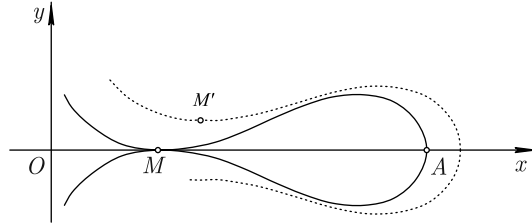


Рис. 4.8. Предельная конфигурация кольца

общности, можно считать, что в точке  $A$  параметр  $\theta = 0$ .

Поскольку нормаль  $\mathbf{n}$  к поверхности кольца сонаправлена оси  $Ox$ , фазовая функция  $\Phi(\theta)$  должна обращаться в нуль при  $\theta = 0$  (см. уравнение (4.42)). В решении (4.43) постоянная интегрирования выбрана так, что это условие выполняется.

Пусть смыкание участков кольца произошло в точке  $M$ , которая соответствует параметру  $\theta = \theta_M$  ( $0 < \theta_M < \pi/m$ ). В выбранной системе

отсчета ордината точки  $M$  равна нулю:

$$y(\theta_M) \equiv \int_0^{\theta_M} \cos \Phi(\theta) d\theta = 0, \quad (4.50)$$

а нормаль к срединной линии кольца в точке  $M$  параллельна оси  $Oy$ :

$$\Phi(\theta_M) = \frac{\pi}{2}. \quad (4.51)$$

Начиная с некоторого значения  $|p|$  на срединной линии кольца возникает локальный минимум в точке  $M'$  (см. рис. 4.8), нормаль  $\mathbf{n}(\theta_{M'})$  направлена параллельно оси  $Oy$ . Параметр  $\theta_{M'}$ , соответствующий точке  $M'$ , лежит на отрезке  $[\pi/2m, \pi/m]$ . Модуль внешнего давления  $|p|$  определяет конфигурацию кольца непрерывным образом, поэтому

$$\lim_{|p| \rightarrow |p|_*} M' = M.$$

Для нахождения модуля предельного давления  $|p|_*$ , уравнение (4.50) решалось методом деления отрезка пополам. На каждой итерации необходимо разрешить уравнения (4.39), (4.41), (4.44) относительно неизвестных параметров  $a, b, a_1$ , затем найти  $\theta_{M'}$  для конфигурации, определяемой найденными параметрами, численно разрешив уравнение (4.51) на отрезке  $[\pi/2m, \pi/m]$  относительно  $\theta_{M'}$  и, наконец, оценить  $y(\theta_{M'})$  в рамках этого метода.

Диапазоны значений  $|p|$  для каждого числа вмятин  $m$ , при которых существуют конфигурации кольца, приведены на рис. 4.9.

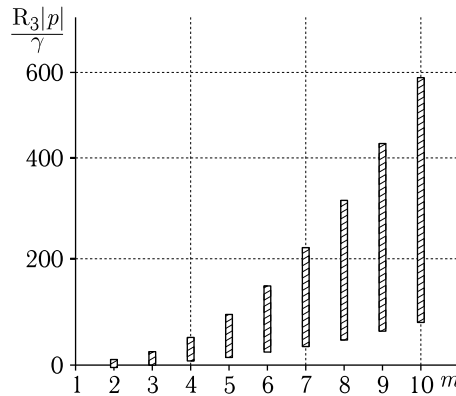


Рис. 4.9. Диапазоны допустимого внешнего давления  $p$  для нескольких значений  $m$

Давлениям, при которых выполняется условие  $a = 0$ , соответствуют конфигурации деформированного кольца, напоминающие правильные многоугольники (рис. 4.10). Хотя эти безразмерные давления близки

к  $R^3|p|_{\Lambda}/\gamma$ , линейная теория не дает конфигураций типа правильных многоугольников. Образование плоских граней на поверхностях гидростатически сжатых оболочек наблюдалось экспериментально [1, 22]. С ростом давления выпучивания кольца становятся ярко выраженными (рис. 4.11)

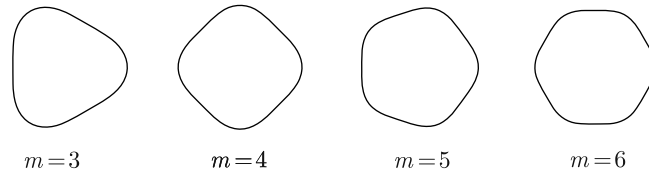


Рис. 4.10. Конфигурации деформированного кольца с плоскими гранями для различных значений параметра  $m$

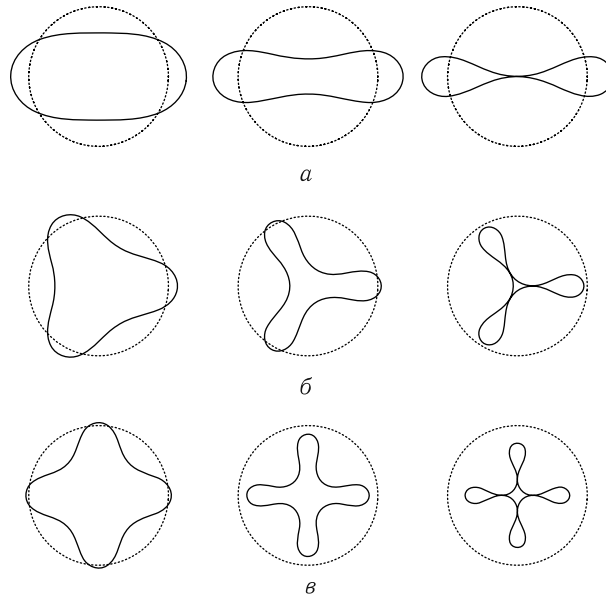


Рис. 4.11. Конфигурации деформированного кольца относительно его исходного состояния при различных значениях внешнего давления для  $m = 2$  (а),  $m = 3$  (б) и  $m = 4$  (в)

Важно, что вблизи выпуклостей деформированного кольца интенсивность напряжений может возрасти настолько, что начнется пластическое течение материала, и приближение нелинейной теории упругости будет нарушено. Критерий течения выражается неравенством

$$\max [|T|, |N|] \geq \sigma_s,$$

где  $\sigma_s$  — предел текучести материала. Численные расчеты показывают, что при сравнительно небольших давлениях, когда гофрирование кольца мало, наибольшим оказывается напряжение  $|T|$ . Этот результат согласуется с расчетом, приведенным [64, 74] при обсуждении пластического течения материала гидростатически сжатой трубы. В то же время при больших изгибах кольца имеем  $|N|_{\max} > |T|_{\max}$ . Иными словами, пластическое течение материала оболочек при сильном гофрировании их поверхностей, в первую очередь, обусловлено напряжением  $|N|_{\max}$ . Зависимости от давления сжимающего и касательного напряжений приведены на рис. 4.12. Анализ показывает, что с ростом давления области локализации напряжений  $|N|_{\max}$  и  $|T|_{\max}$  сближаются. Когда локальные напряжения достигают предела текучести, на боковой поверхности оболочки возникают параллельные образующей жесткие ребра [21, 22].

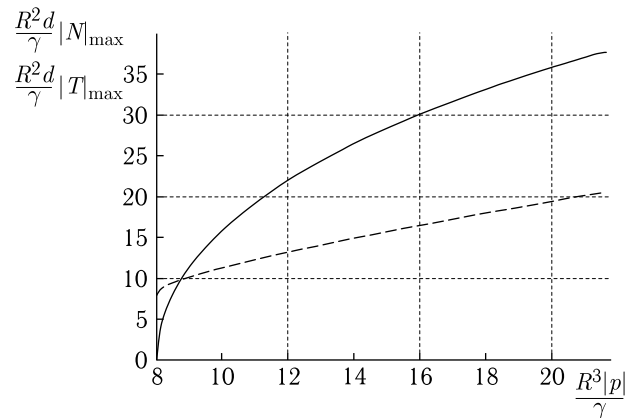


Рис. 4.12. Зависимости сжимающего  $|N|_{\max}$  (сплошная линия) и тангенциального  $|T|_{\max}$  (штриховая линия) напряжений от величины внешнего давления  $p$  при  $m = 3$

**4.4.3. Изменение формы кольца на жестком стержне.** Поместим внутрь кольца жесткий стержень-оправку радиуса  $r < R + d/2$ . На рис. 4.13, а изображен момент касания деформированного кольца с жестким стержнем (общая ось кольца и стержня проходит через точку  $O$ ). Длина кривой  $AB$  от вершины выпуклости до дна вмятины равна  $\pi R/m$ . Пусть вершине  $A$  соответствует значение  $\theta_A = 0$ , тогда в точке  $B$  натуральный параметр плоской кривой (4.29)  $s_B = \pi R/m$ , что соответствует безразмерному параметру  $\theta_B = \pi/m$ .

При дальнейшем росте давления кольцо начинает огибать жесткий стержень и приобретает форму, представленную на рис. 4.13, б. Точка касания кольца и оправки смещается из положения  $B$  в положение  $C$ ,

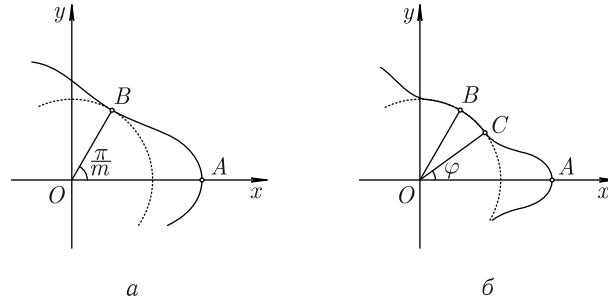


Рис. 4.13. Схема изменения формы кольца на жестком стержне: момент касания кольцом стержня (а) и огибание кольца вокруг него (б)

$\varphi$  — угол между лучами  $Ox$  и  $OC$ . Точке  $C$  соответствует натуральный параметр

$$s_C = r\varphi + \frac{\pi}{m}(R - r)$$

кривой (4.29) или безразмерный параметр

$$\theta_C = \eta\varphi + \frac{\pi}{m}(1 - \eta), \quad \eta = \frac{r}{R}.$$

Как и ранее, при расчете функции  $\Phi(\theta)$  постоянную интегрирования выбираем так, чтобы выполнялось условие  $\Phi(\theta = 0) = 0$ . Этот выбор соответствует формуле (4.43) и ее интегральному представлению

$$\Phi(\theta) = - \int_0^{\theta} \varkappa(\theta') d\theta'.$$

Схема дальнейших расчетов отличается от обсуждавшейся ранее: постоянные  $a$ ,  $b$ ,  $a_1$ ,  $\varphi$  определяются другими уравнениями.

Из условия совпадения касательного вектора  $\boldsymbol{\tau}$  к поверхности кольца с касательным вектором к поверхности жесткого стержня имеем

$$- \int_0^{\theta_C} \varkappa(\theta') d\theta' = \varphi. \quad (4.52)$$

Координаты точек линии  $AB$  находятся интегрированием уравнений (4.30), (4.42):

$$x(\theta) = R \int_{\theta}^{\theta_C} \sin \Phi(\theta') d\theta' + r \cos \varphi, \quad y(\theta) = R \int_0^{\theta} \cos \Phi(\theta') d\theta'.$$

В точке касания кольца с оправкой их ординаты совпадают (для простоты пренебрегаем толщиной кольца). Это требование равносильно

уравнению

$$\int_0^{\theta_C} \cos \Phi(\theta') d\theta' = \eta \sin \varphi. \quad (4.53)$$

Там, где кольцо огибает стержень, вдоль направления  $\mathbf{n}$  внешнее давление скомпенсировано реакцией оправки. Поэтому в материале оболочки в точке  $C$  имеем

$$q_n = \frac{\gamma}{R^2} \frac{d\kappa}{d\theta} \Big|_{\theta=\theta_C} = 0.$$

Иными словами, точка  $C$  соответствует минимуму кривизны кривой (4.29):

$$\kappa(\theta_C) = a.$$

Это приводит к третьему уравнению для расчета параметров задачи,

$$\frac{\pi}{m}(1 - \eta) + \eta \varphi = \frac{4K(k)}{\sqrt{AB}}. \quad (4.54)$$

Уравнения (4.39), (4.52), (4.53), (4.54) определяют параметры  $a$ ,  $b$ ,  $a_1$ ,  $\varphi$  как функции от  $p$  и  $m$ .

При  $\varphi = \pi/m$  ( $r = R$ ) условия (4.52), (4.54) сводятся к определяющим соотношениям (4.44), (4.41) для кольца в отсутствии оправки. На рис. 4.14 приведены решения, иллюстрирующие изменение формы кольца на жестком стержне при разных значениях  $R^3|p|/\gamma$ . Крайняя правая часть рис. 4.14 соответствует предельному случаю.

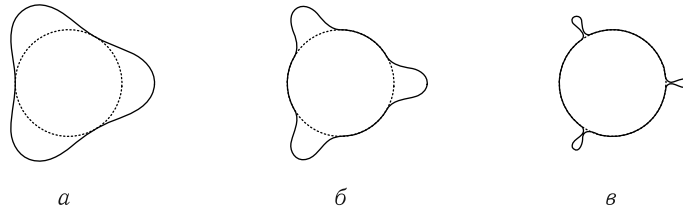


Рис. 4.14. Изменение формы кольца на жестком стержне при разных значениях внешнего давления ( $m = 3$ ,  $r/R = 0,7$ ): состояние касания ( $a$ ), огибание кольцом стержня при дальнейшем увеличении давления ( $б$ ), предельное состояние ( $в$ )

Если радиусы стержня и кольца удовлетворяют соотношению

$$\pi(R - r) \sim 2md, \quad (4.55)$$

то возможно образование лишь малоамплитудных складок на кольце в окружном направлении с амплитудой  $\sim d/2$ . В экспериментальных работах [21, 22] по изменению формы оболочек обычно  $m = 3, 4$ . Малоамплитудные складки устраняются в процессе

пластического течения материала, которое начнется, когда в результате роста внешнего давления напряжения вблизи вершины выпуклостей превысят предел текучести материала. Формула (4.55) согласуется с экспериментальными данными [21, 22].

В то же время когда различие радиусов оправки и кольца велико, то, как и ранее, на боковой поверхности кольца образуются жесткие ребра (крайняя правая часть рис. 4.14), которые не устраняются даже при дальнейшем росте давления.

Для предотвращения образования ребер в экспериментах [21, 22] оболочку с внутренним жестким стержнем помещали в цилиндрический контейнер радиуса  $R_1 > R + d/2$ . Уменьшение радиуса  $R_1$  внешней жесткой связи ведет к увеличению числа волн на поверхности оболочки и уменьшению их амплитуды. Волны малой амплитуды полностью устранялись после пластического течения материала. В результате путем гидростатического сжатия трубных заготовок были получены [21, 22] цилиндрические изделия с переменным поперечным сечением по длине.

Главной задачей этой главы было теоретическое описание начальной стадии формоизменения гидростатически сжатой оболочки, связанное с образованием на ее поверхности вытянутых вдоль образующей выпуклостей и вмятин, правильно чередующихся в поперечном сечении оболочки. Для этого построены две упрощенные модели, одна из которых описывает локализацию изгибов вдоль образующей оболочки, а другая — гофрировку ее поперечного сечения вдали от концов.

Модель динамики продольных изгибов оболочки вблизи порога устойчивости ее формы построена в рамках нелинейной теории упругости. Итоговые уравнения модели являются результатом редуктивной теории возмущений, которая в первых порядках приводит к классической модели оболочек. Показано, что для длинной оболочки традиционные уравнения нелинейной теории оболочек сводятся к линейным и потому недостаточны для анализа локализации изгибов вдоль образующей оболочки. Путем введения иерархии переменных для описания разных масштабных уровней деформации из высших порядков теории возмущений выделены взаимодействия, ответственные за образование продольных вмятин на поверхности оболочки, и получено амплитудное уравнение для огибающей вмятин.

С помощью амплитудного уравнения теоретически описаны неподвижные структуры из чередующихся вдоль образующей оболочки и в окружном направлении выпуклостей и впадин. Частный случай найденного решения, когда вдоль образующей оболочки формируется одна полуволна огибающей, описывает «выполаживание» изгибов вблизи концов оболочки, что наблюдается экспериментально, но не может быть объяснено традиционной теорией оболочек.

Кроме того, модель позволила предсказать и аналитически описать новые типы солитонов с компактным носителем — компактоны,



которые образуются только на начальной стадии формоизменения гидростатически сжатой оболочки. Компактоны перемещаются вдоль образующей оболочки с постоянной скоростью и не взаимодействуют с другими структурами до момента столкновения с ними.

В рамках подхода Коссера решена задача о формоизменении тонкого гибкого кольца под действием внешнего гидростатического давления, которая дает представление о характере гофрирования поперечного сечения оболочки вдали от ее концов. Предложенная модель позволяет получить зависимость кривизны деформированного кольца от внешнего давления. По известной кривизне форма кольца восстанавливается методами дифференциальной геометрии.

Найдены условия, при которых осуществляются конфигурации деформированного кольца, напоминающие правильные многоугольники. Образование плоских граней на поверхностях гидростатически сжатых оболочек наблюдалось экспериментально. Традиционная теория оболочек не дает их описания.

На примере решения задачи о формоизменении кольца вокруг жесткого стержня показано, что путем введения жестких связей можно управлять числом и амплитудой выпуклостей и впадин в окружном направлении оболочки и предотвращать образование жестких ребер на ее поверхности.

## Заключение

То, что сегодня наука, —  
завтра техника.

*Эдвард Теллер*

В монографии развит метод анализа начальной стадии формоизменения нагруженных пластин и оболочек. Метод универсален, его отличительная особенность и привлекательность состоит в том, что он избегает гипотез о роли тех или иных инвариантов в разложении упругой энергии среды, предположений о распределении деформаций по толщине пластины или оболочки. Любые априорные гипотезы нарушают граничные условия на развитых поверхностях деформируемых образцов, не позволяют правильно учесть взаимосвязь продольных и поперечных мод деформации материала, нелинейную по своей природе локализацию деформаций, проявляющуюся, например, в образовании узоров из вмятин на поверхностях пластин и оболочек. Построенные в рамках предложенного подхода новые нелинейные модели корректно учитывают основные взаимодействия и особенности каждой задачи и в то же время допускают точные решения.

Это позволило изучить новые физические объекты (солитоноподобные волны деформации, узоры из вмятин на поверхностях пластин и оболочек) и новые явления (гофрирование сильно нагруженных слоев среды, локализация деформаций вблизи порогов неустойчивости формы нагруженных образцов). Полученные результаты уточняют выводы линейной теории и в большей степени соответствуют данным экспериментов. Их следует учитывать при расчетах оболочек. Особые солитоны, образующиеся вблизи порогов неустойчивости формы рассмотренных систем, могут быть полезны для диагностики предкритического состояния элементов конструкций.

Образование при определенных условиях на поверхностях гидростатически сжатых оболочек плоских граней указывает на возможность создания новых высокоэффективных энерго- и материалосберегающих технологий получения методом гидростатического сжатия из трубных заготовок изделий с заданной формой поперечного сечения. Предложенные модели позволили описать изменение сечения оболочки при наличии жестких связей. Для технологических приложений важно, что посредством выбора жестких связей удастся управлять развитием локальных неустойчивостей и формоизменением оболочек в условиях их сжатия жидкостью высокого давления.

К настоящему времени экспериментальные исследования в значительной мере опередили теоретические расчеты. В работах [21, 22] описана созданная установка для пластического деформирования цилиндрических оболочек жидкостью высокого давления (до 1500 МПа) в широком диапазоне степеней деформации. Конструкция установки

---

позволяет не только проводить научные исследования, но и получать конкретные изделия. Она может быть принята за основу при разработке опытно-промышленного оборудования для изготовления полых изделий сложной формы. Экспериментально найдены технологические режимы, позволяющие управлять пластическим течением оболочки и получать заданную инструментом конечную форму изделия, устраняя нежелательные складки и узоры из вмятин, возникающие на ранних стадиях деформирования. В этой книге мы постарались приблизиться к теоретическому описанию таких процессов.

## Приложение А

### ЭФФЕКТИВНАЯ ЭНЕРГИЯ ТОНКОЙ ПЛАСТИНЫ

Приведем разложения по параметрам  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  энергии пластины и виртуальной работы внешних сил, необходимые для вывода эффективных граничных условий по боковым граням пластины (см. п. 1.3).

Кинетическая  $K$  и потенциальная  $U$  энергии пластины имеют следующие разложения :

$$K = \sum_{m=4}^{\infty} K^{(m)}, \quad U = \sum_{m=4}^{\infty} U^{(m)},$$

где верхний индекс  $m$  указывает общий порядок слагаемого по параметрам  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  с учетом оценки  $\varepsilon_1 \sim \varepsilon_2$ .

Первые члены в разложении кинетической энергии

$$K^{(m)} = \frac{l^2 d \varepsilon_1^2 \mu}{2} \iint_D \left[ \partial_{\tau_1} \tilde{u}_3^{(\cdot)} \partial_{\tau_1} \tilde{u}_3^{(\cdot)} \right]^{(m-4)} d\xi_1 d\xi_2, \quad m = 4, 5, \quad (\text{A.1})$$

$$\begin{aligned} K^{(6)} = & \frac{l^2 d \varepsilon_1^2 \mu}{2} \iint_D \left[ \frac{\varepsilon_2^2}{12} \left\{ \frac{\lambda'}{2\mu} \partial_{\tau_1} \tilde{u}_3^{(0)} \partial_{\tau_1} \Delta \tilde{u}_3^{(0)} + \left( \partial_{\tau_1} \partial_{\alpha} \tilde{u}_3^{(0)} \right)^2 \right\} + \right. \\ & \left. + \left[ \partial_{\tau_1} \tilde{u}_3^{(\cdot)} \partial_{\tau_1} \tilde{u}_3^{(\cdot)} \right]^{(2)} + \left[ \partial_{\tau_1} \tilde{u}_{\alpha}^{(1)} \right]^{(2)} \right] d\xi_1 d\xi_2. \quad (\text{A.2}) \end{aligned}$$

Для прямоугольной пластины со сторонами  $2l_1, 2l_2$  область интегрирования

$$D = \{ |\xi_1| \leq l_1, |\xi_2| \leq l_2 \}.$$

Слагаемые  $U^{(m)}$  ( $m = 4, 5$ ) в разложении потенциальной энергии суть

$$\begin{aligned} U^{(m)} = & l^2 d \iint_D \left[ \frac{1}{2} \left( \varepsilon_{\alpha\beta}^{(\cdot)} \sigma_{\alpha\beta}^{(\cdot)} \right)^{(m)} + \right. \\ & + \frac{(\varepsilon_1 \varepsilon_2)^2}{24} \left( \partial_{\alpha} \partial_{\beta} \tilde{u}_3^{(\cdot)} \hat{L}_{\alpha\beta} \tilde{u}_3^{(\cdot)} \right)^{(m-4)} - \\ & \left. - \rho_0 a \left( \tilde{u}_3^{(\cdot)} \langle P_3^{(\cdot)} \rangle \right)^{(m)} \right] d\xi_1 d\xi_2, \quad m = 4, 5. \quad (\text{A.3}) \end{aligned}$$

Для  $U^{(6)}$  найдено, что

$$\begin{aligned}
 U^{(6)} = l^2 d \int \int_D & \left\{ \frac{\mu}{60} \left[ \varepsilon_1 \varepsilon_2^2 \left( 1 + \frac{\lambda'}{2\mu} \right) \partial_\alpha \Delta \tilde{u}_3^{(0)} \right]^2 + \right. \\
 & + (\varepsilon_1 \varepsilon_2)^2 \left[ \tilde{b}_2 \varepsilon_{\gamma\gamma}^{(2)} \left( \Delta \tilde{u}_3^{(0)} \right)^2 + \tilde{b}_1 \varepsilon_{\gamma\gamma}^{(2)} \left( \partial_\alpha \partial_\beta \tilde{u}_3^{(0)} \right)^2 + \right. \\
 & + \tilde{c} \Delta \tilde{u}_3^{(0)} \partial_\alpha \partial_\beta \tilde{u}_3^{(0)} \varepsilon_{\alpha\beta}^{(2)} \left. \right] - \frac{\varepsilon_1^3 \varepsilon_2^2}{12} \partial_\alpha \partial_\beta \tilde{u}_3^{(0)} \partial_\gamma \tilde{u}_3^{(0)} \widehat{L}_{\alpha\beta} \tilde{u}_\gamma^{(1)} + \\
 & + \frac{(\varepsilon_1 \varepsilon_2^2)^2}{24} \left[ \frac{2}{5} + \frac{9}{40} \frac{\lambda'}{\mu} \right] \partial_\alpha \partial_\beta \tilde{u}_3^{(0)} \Delta \widehat{L}_{\alpha\beta} \tilde{u}_3^{(0)} - \\
 & - \frac{(\varepsilon_1^2 \varepsilon_2)^2}{24} \left( \partial_\gamma \tilde{u}_3^{(0)} \right)^2 \partial_\alpha \partial_\beta \tilde{u}_3^{(0)} \widehat{L}_{\alpha\beta} \tilde{u}_3^{(0)} + \\
 & + \frac{\varepsilon_2^2 \lambda'}{48\mu} \sigma_{\alpha\beta}^{(2)} \partial_\alpha \partial_\beta \varepsilon_{\gamma\gamma}^{(2)} + a_1 \varepsilon_{\gamma\gamma}^{(2)} \left( \varepsilon_{\alpha\beta}^{(2)} \right)^2 + \frac{a_2}{3} \left( \varepsilon_{\gamma\gamma}^{(2)} \right)^3 - \\
 & - a \rho_0 \left[ \left( \tilde{u}_3^{(\cdot)} \langle P_3^{(\cdot)} \rangle \right)^{(6)} + \tilde{u}_\alpha^{(1)} \langle P_\alpha^{(5)} \rangle - \right. \\
 & - \varepsilon_2 \partial_\alpha \tilde{u}_3^{(0)} \langle \eta P_\alpha^{(5)} \rangle + \frac{\lambda'}{4\mu} \varepsilon_2^2 \Delta \tilde{u}_3^{(0)} \langle \eta^2 P_3^{(4)} \rangle - \\
 & \left. - \langle \eta P_3^{(4)} \rangle \left\{ \frac{\lambda'}{2\mu} \varepsilon_2 \partial_\alpha \tilde{u}_\alpha^{(1)} + \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\lambda'}{2\mu} \right) \varepsilon_1 \varepsilon_2 \left( \partial_\alpha \tilde{u}_3^{(0)} \right)^2 \right\} \right] + \\
 & \left. + \frac{1}{2} \left( \varepsilon_{\alpha\beta}^{(\cdot)} \sigma_{\alpha\beta}^{(\cdot)} \right)^{(6)} + \frac{(\varepsilon_1 \varepsilon_2)^2}{24} \left( \partial_\beta \partial_\alpha \tilde{u}_3^{(\cdot)} \widehat{L}_{\alpha\beta} \tilde{u}_3^{(\cdot)} \right)^{(2)} \right\} d\xi_1 d\xi_2. \quad (\text{A.4})
 \end{aligned}$$

Как показано в первой главе, в представлении (1.4) для энергий пластины можно пренебречь слагаемыми  $\varphi_{n \geq 4}$ . Это означает, что в исходных (3+1)-мерных уравнениях нелинейной теории упругости остаются пять феноменологических постоянных:  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $A$ ,  $B$ ,  $C$ . Представления (A.1)–(A.4) приводят к важному заключению. В эффективной (2+1)-мерной модели пять постоянных объединяются в четыре независимых модуля упругости:  $\lambda'$ ,  $\mu$ ,  $a_1$ ,  $a_2$ .

Виртуальную работу внешних сил можно записать в форме

$$\delta A = \sum_{m=4}^{\infty} \left[ \delta A_s^{(m)} + \delta A_l^{(m)} \right],$$

где  $\delta A_s$  — часть работы, связанная со смещением развитых поверхностей пластины ( $\eta = \pm 1/2$ ),  $\delta A_l$  — работа по смещению боковых граней пластины.

Нетрудно убедиться, что

$$\begin{aligned}\delta A_s^{(m)} &= al^2 \int \int_D \left( \delta \tilde{u}_3^{(\cdot)} [T_{33}^{\text{ext}}]^{(\cdot)} \right)^{(m)} \Big| d\xi_1 d\xi_2, \quad m = 4, 5, \\ \delta A_s^{(6)} &= al^2 \int \int_D \left\{ \left[ \delta \tilde{u}_3^{(\cdot)} P_{33}^{(\cdot)} \right]^{(6)} + \delta \tilde{u}_1^{(1)} [T_{\alpha 3}^{\text{ext}}]^{(5)} \right\} \Big| d\xi_1 d\xi_2, \\ \delta A_l^{(m)} &= -l^2 d\varepsilon_1 \oint_\gamma \left\langle \left( [T_{\gamma\alpha}^{\text{ext}}]^{(\cdot)} \delta \tilde{u}_\alpha^{(\cdot)} \right)^{(m-1)} \right\rangle e_{\beta\gamma} d\xi_\beta, \quad m = 4, 5, \\ \delta A_l^{(6)} &= -l^2 d\varepsilon_1 \oint_\gamma \left\langle \left( [T_{\gamma\alpha}^{\text{ext}}]^{(\cdot)} \delta \tilde{u}_\alpha^{(\cdot)} \right)^{(5)} + \right. \\ &\quad \left. + \delta \tilde{u}_\alpha^{(1)} \left\{ \left( 1 - \frac{\lambda'}{2\mu} \right) \eta_{\rho\rho}^{(2)} [T_{\alpha\gamma}^{\text{ext}}]^{(2)} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \varepsilon_1 [T_{\alpha\sigma}^{\text{ext}}]^{(2)} \left( \partial_\sigma \tilde{u}_\gamma^{(1)} + \varepsilon_1^2 \partial_\sigma \tilde{u}_3^{(0)} \partial_\gamma \tilde{u}_3^{(0)} \right) \right\} + \right. \\ &\quad \left. + \delta \tilde{u}_3^{(0)} \left( [T_{3\gamma}^{\text{ext}}]^{(5)} + \varepsilon_1 \partial_\gamma \tilde{u}_3^{(0)} [T_{33}^{\text{ext}}]^{(4)} \right) \right\rangle e_{\beta\gamma} d\xi_\beta.\end{aligned}$$

В этих формулах для сокращения записи использовано обозначение (1.42). В двух последних из них интегрирование производится вдоль контура  $\gamma$ , ограничивающего область  $D$ . Обход  $\gamma$  осуществляется против часовой стрелки,  $e_{\alpha\beta}$  — антисимметричный тензор,

$$e_{\alpha\beta} = -e_{\beta\alpha}, \quad e_{12} = 1.$$

Можно показать, что приведенные в первой главе уравнения теории возмущений получаются в результате варьирования по полям  $\tilde{u}_3^{(k)}$  и  $\tilde{u}_\alpha^{(k)}$  соотношений типа

$$\delta S^{(m)} + \int_{t_0}^t \delta A^{(m)} dt' = 0, \quad m = 4, 5, 6,$$

где

$$\delta S^{(m)} = \int_{t_0}^t \left[ \delta K^{(m)} - \delta U^{(m)} \right] dt'.$$

В частности, в отсутствие внешнего нагружения на развитых поверхностях пластины имеем

$$\mu \varepsilon_1 \varepsilon_2 \partial_{\tau_1}^2 \tilde{u}_\alpha^{(1)} = - \frac{\delta U^{(6)}}{\delta \tilde{u}_\alpha^{(1)}},$$

$$\mu \varepsilon_1 \varepsilon_2 \left[ \partial_{\tau_1}^2 \tilde{u}_3^{(3)} - \frac{\varepsilon_2^2}{12} \left( 1 - \frac{\lambda'}{2\mu} \right) \partial_{\tau_1}^2 \Delta \tilde{u}_3^{(0)} \right] = - \frac{\delta U^{(6)}}{\delta \tilde{u}_3^{(0)}}.$$

При сопоставлении этих уравнений с уравнениями (1.50) и (1.57) оказываются полезными тождества

$$\begin{aligned} \hat{L}_{\alpha\beta} \left[ \partial_\alpha \partial_\beta \tilde{u}_3^{(0)} \partial_\sigma \tilde{u}_3^{(0)} \right] &= (\lambda' + 2\mu) \left[ \partial_\beta \left\{ \partial_\sigma \tilde{u}_3^{(0)} \Delta \partial_\beta \tilde{u}_3^{(0)} \right\} + \right. \\ &\quad \left. + \partial_\beta \left\{ \Delta \tilde{u}_3^{(0)} \partial_\sigma \partial_\beta \tilde{u}_3^{(0)} \right\} \right] + \mu \partial_\sigma \left[ \left( \partial_\alpha \partial_\beta \tilde{u}_3^{(0)} \right)^2 - \left( \Delta \tilde{u}_3^{(0)} \right)^2 \right], \\ \partial_\alpha \partial_\gamma \tilde{u}_3^{(0)} \varepsilon_{\gamma\beta}^{(2)} + \varepsilon_{\alpha\gamma}^{(2)} \partial_\gamma \partial_\beta \tilde{u}_3^{(0)} - \Delta \tilde{u}_3^{(0)} \varepsilon_{\alpha\beta}^{(2)} + \varepsilon_{\gamma\gamma}^{(2)} \partial_\alpha \partial_\beta \tilde{u}_3^{(0)} &= \\ &= \delta_{\alpha\beta} \left[ \partial_\sigma \partial_\gamma \tilde{u}_3^{(0)} \varepsilon_{\sigma\gamma}^{(2)} - \Delta \tilde{u}_3^{(0)} \varepsilon_{\gamma\gamma}^{(2)} \right]. \end{aligned}$$

## Приложение Б

### РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ПОЛУБЕЗГРАНИЧНОЙ СРЕДЫ ПРИ НАЛИЧИИ МАССОВЫХ СИЛ

В главе 2 при анализе динамики трехслойной среды изгибы пластины предполагаются медленными, а реакции подложек — квазистатическими. Теория возмущений для нелинейно-упругих подложек сводится к последовательности статических краевых задач линейной теории упругости, в которые время входит как параметр. Изложим схему их решения.

При рассмотрении подложек используются безразмерные переменные  $\xi_i$  и поля  $\bar{v}_i$  ( $i = 1, 3$ ). В определяющих уравнениях для подложек

$$\partial_j \check{P}_{ij} = 0$$

разобьем тензор Пиолы–Кирхгофа  $\check{P}_{ij}$  на линейную по полям  $\bar{v}_i$ ,

$$L_{ij} = \varepsilon_1 \check{\lambda}_{ijkl} \partial_k \bar{v}_l,$$

и нелинейную  $\pi_{ij}$  части,

$$\check{P}_{ij} = L_{ij} + \pi_{ij}.$$

Компоненты тензора  $L_{ij}$  суть

$$\begin{aligned} L_{11} &= \varepsilon_1 \left[ (\check{\lambda} + 2\check{\mu}) \partial_1 \bar{v}_1 + \check{\lambda} \partial_3 \bar{v}_3 \right], \\ L_{13} &= L_{31} = \varepsilon_1 \check{\mu} (\partial_1 \bar{v}_3 + \partial_3 \bar{v}_1), \\ L_{33} &= \varepsilon_1 \left[ \check{\lambda} \partial_1 \bar{v}_1 + (\check{\lambda} + 2\check{\mu}) \partial_3 \bar{v}_3 \right]. \end{aligned}$$

В результате уравнения для подложек приобретают вид

$$\left[ \widehat{\mathbf{H}}(\partial_3, \partial_1) \mathbf{v} \right]_i \equiv \check{\lambda}_{ijkl} \partial_j \partial_k \bar{v}_l = -\frac{\partial_j \pi_{ij}}{\varepsilon_1}, \quad (\text{Б.1})$$

где  $\mathbf{v}^T = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3)$ .

Будем искать решения системы (Б.1) в форме

$$\bar{v}_i = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{v}_i^{(n)}, \quad \pi_{ij} = \sum_{n=2}^{\infty} \pi_{ij}^{(n)}. \quad (\text{Б.2})$$



Здесь верхний индекс указывает порядок слагаемых по параметру  $\varepsilon_1$ , компоненты  $\pi_{ij}^{(n)}$  выражаются через поля  $\bar{v}_i^{(k)}$  с  $k < n$ . После подстановки (Б.2) в (Б.1) получается цепочка линейных уравнений

$$\begin{pmatrix} \partial_3^2 + (\gamma + 1)(\gamma - 1)^{-1}\partial_1^2 & 2(\gamma - 1)^{-1}\partial_1\partial_3 \\ 2(\gamma + 1)^{-1}\partial_1\partial_3 & \partial_3^2 + (\gamma + 1)^{-1}(\gamma - 1)\partial_1^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{v}_1 \\ \bar{v}_3 \end{pmatrix}^{(n)} = \begin{pmatrix} f_3 \\ f_4 \end{pmatrix}^{(n)}, \quad (\text{Б.3})$$

где

$$\gamma = (\check{\lambda} + 3\check{\mu}) / (\check{\lambda} + \check{\mu}), \quad 1 \leq \gamma \leq 3.$$

Удобно представить уравнения (Б.3) в виде эквивалентной матричной системы

$$\partial_3 \mathbf{w}^{(n)} = \widehat{\mathbf{L}}(-i\partial_1) \mathbf{w}^{(n)} + \mathbf{f}^{(n)}. \quad (\text{Б.4})$$

Компоненты векторов  $\mathbf{w}^{(n)}$  и  $\mathbf{f}^{(n)}$  суть

$$\begin{aligned} w_1^{(n)} &= \bar{v}_1^{(n)}, & w_2^{(n)} &= \bar{v}_3^{(n)}, & w_3^{(n)} &= \partial_3 \bar{v}_1^{(n)}, & w_4^{(n)} &= \partial_3 \bar{v}_3^{(n)}, \\ f_1^{(n)} &= f_2^{(n)} = 0, & f_3^{(n)} &= -\frac{\partial_i \pi_{1i}^{(n+1)}}{\varepsilon_1 \check{\mu}}, & f_4^{(n)} &= -\frac{\partial_i \pi_{3i}^{(n+1)}}{\varepsilon_1 (\check{\lambda} + 2\check{\mu})}. \end{aligned}$$

Далее опускаем верхний индекс у полей  $\bar{v}_i$ ,  $\pi_{ij}$  и т. д. Матричный оператор  $\widehat{\mathbf{L}}(-i\partial_1)$  имеет вид

$$\widehat{\mathbf{L}}(-i\partial_1) = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{E} \\ -\mathbf{d}_1 \mathbf{d}_2^{-1} \partial_1^2 & -2\boldsymbol{\sigma}_1 \mathbf{d}_2 \partial_1 \end{pmatrix},$$

где  $\mathbf{E}$  — единичная  $2 \times 2$ -матрица,  $\boldsymbol{\sigma}_1$  — матрица Паули:

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$\mathbf{d}_1$  и  $\mathbf{d}_2$  — диагональные матрицы,

$$\mathbf{d}_1 = \begin{pmatrix} (\gamma - 1)^{-1} & 0 \\ 0 & (\gamma + 1)^{-1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{d}_2 = \begin{pmatrix} (\gamma + 1)^{-1} & 0 \\ 0 & (\gamma - 1)^{-1} \end{pmatrix}.$$

Пусть  $\mathbf{w}, \mathbf{f} \rightarrow 0$  при  $|\xi_1| \rightarrow \infty$ . Тогда при интегрировании системы (Б.4) оказывается полезным преобразование Фурье полей  $\mathbf{w}$  и  $\mathbf{f}$  по переменной  $\xi_1$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{w}(\xi_1, \xi_3) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(ik\xi_1) \mathbf{w}(k, \xi_3) dk, \\ \mathbf{w}(k, \xi_3) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-ik\xi_1) \mathbf{w}(\xi_1, \xi_3) d\xi_1. \end{aligned}$$

Для фурье-образа  $\mathbf{w}(k, \xi_3)$  имеем систему обыкновенных линейных дифференциальных уравнений. После преобразования Фурье оператор  $\hat{\mathbf{H}}(\partial_3, \partial_1)$  в (Б.1) заменяется на  $\hat{\mathbf{H}}(\partial_3, ik)$  ( $\hat{\mathbf{H}}(\partial_3, ik_0) \equiv \hat{\mathbf{H}}_l$ , см. (2.62)), а система (Б.4) принимает вид

$$\partial_3 \mathbf{w}(k, \xi_3) = \mathbf{L}(k) \mathbf{w}(k, \xi_3) + \mathbf{f}(k, \xi_3). \quad (\text{Б.5})$$

Поскольку собственные значения матрицы

$$\mathbf{L}(k) = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{E} \\ k^2 \mathbf{d}_1 \mathbf{d}_2^{-1} & -2ik \boldsymbol{\sigma}_1 \mathbf{d}_2 \end{pmatrix}$$

кратны двум и равны  $\pm|k|$ , с помощью невырожденного преобразования  $\mathbf{T}$  матрица  $\mathbf{L}$  приводится к блочно-диагональной форме Жордана:

$$\mathbf{L}_J \equiv \mathbf{T}^{-1} \mathbf{L}(k) \mathbf{T} = \begin{pmatrix} |k| \mathbf{E} + \mathbf{n} & 0 \\ 0 & -|k| \mathbf{E} + \mathbf{n} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{n} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{Б.6})$$

Приведем явный вид матриц  $\mathbf{T}$  и  $\mathbf{T}^{-1}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \begin{pmatrix} \mathbf{a} & -\boldsymbol{\sigma}_3 \mathbf{a} \boldsymbol{\sigma}_3 \\ \boldsymbol{\sigma}_3 \mathbf{b} \boldsymbol{\sigma}_3 & \mathbf{b} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a} = c \begin{pmatrix} i\sigma & i\gamma/k \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{b} &= c \begin{pmatrix} ik & -i\sigma(\gamma+1) \\ -|k| & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma = \text{sign } k; \\ \mathbf{T}^{-1} &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha} & \boldsymbol{\sigma}_3 \boldsymbol{\beta} \boldsymbol{\sigma}_3 \\ -\boldsymbol{\sigma}_3 \boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{\sigma}_3 & \boldsymbol{\beta} \end{pmatrix}, \\ \boldsymbol{\alpha} &= \frac{1}{2c} \begin{pmatrix} i\sigma(\gamma-1)^{-1} & 1 \\ -ik(\gamma-1)^{-1} & -|k|(\gamma+1)^{-1} \end{pmatrix}, \\ \boldsymbol{\beta} &= \frac{1}{2c} \begin{pmatrix} 0 & -\gamma|k|^{-1}(\gamma-1)^{-1} \\ i\sigma(\gamma+1)^{-1} & -(\gamma-1)^{-1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Постоянная  $c$  выбрана так, чтобы выполнялось условие  $\det \mathbf{T} = 1$ :

$$-4c^4(\gamma^2 - 1) = 1.$$

Решение линейных краевых задач упрощает использование функции Грина безграничной среды  $\mathbf{G}^{(v)}(k, \xi_3 - \xi'_3)$ . Матричная функция  $\mathbf{G}^{(v)}(k, \xi)$  представляет убывающее на бесконечности сингулярное решение уравнения

$$(\partial_\xi - \mathbf{L}(k)) \mathbf{G}^{(v)}(k, \xi) = \mathbf{I} \delta(\xi),$$

где

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} \mathbf{E} & 0 \\ 0 & \mathbf{E} \end{pmatrix}.$$

Граничные условия для функции  $\mathbf{G}^{(v)}(k, \xi)$  суть

$$\mathbf{G}^{(v)} \Big|_{\xi=+0} - \mathbf{G}^{(v)} \Big|_{\xi=-0} = \mathbf{I}, \quad \mathbf{G}^{(v)} \rightarrow 0, \quad |\xi| \rightarrow \infty.$$

Учитывая тождество

$$\exp(\mathbf{L}_J \xi) = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & 0 \\ 0 & \mathbf{A} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{|k|\xi} \mathbf{E} & 0 \\ 0 & e^{-|k|\xi} \mathbf{E} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & \xi \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

находим следующее представление для функции Грина:

$$\mathbf{G}^{(v)}(k, \xi) = \exp(-|k\xi|) \mathbf{T} \begin{pmatrix} \mathbf{A} & 0 \\ 0 & \mathbf{A} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\Theta(-\xi) \mathbf{E} & 0 \\ 0 & \Theta(\xi) \mathbf{E} \end{pmatrix} \mathbf{T}^{-1}, \quad (\text{Б.7})$$

где  $\Theta(\xi)$  — ступенчатая функция Хевисайда:

$$\Theta(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi > 0 \\ 0, & \xi \leq 0 \end{cases}.$$

Из представлений (Б.6), (Б.7) следует коммутативность матриц  $\mathbf{L}$  и  $\mathbf{G}^{(v)}$ .

Выпишем  $\mathbf{G}^{(v)}$  в форме, удобной для расчетов:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}^{(v)}(k, \xi) &= \exp(-|k\xi|) \begin{pmatrix} \mathbf{G}_1 & \mathbf{G}_2 \\ \mathbf{G}_3 & \mathbf{G}_4 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{G}_1 &= \frac{1}{2} [\text{sign } \xi \mathbf{E} - i\sigma\sigma_1 \mathbf{d}_1 - |k| \mathbf{B} \mathbf{d}_1], \quad \mathbf{B} = \xi \sigma_3 + i\sigma|\xi| \sigma_1, \\ \mathbf{G}_2 &= \frac{1}{2} \left[ -\frac{\gamma}{|k|} \mathbf{d}_2 + \text{sign } \xi \mathbf{B} \mathbf{d}_2 \right], \\ \mathbf{G}_3 &= \frac{1}{2} [-\gamma|k| \mathbf{d}_1 + k^2 \text{sign } \xi \mathbf{B} \mathbf{d}_1], \\ \mathbf{G}_4 &= \frac{1}{2} [\text{sign } \xi \mathbf{E} + i\sigma\sigma_1 \mathbf{d}_2 - |k| \mathbf{B} \mathbf{d}_2]. \end{aligned}$$

Решения системы (Б.5) при произвольных внешних источниках могут быть найдены с помощью функции  $\mathbf{G}^{(v)}$ . Так, для безграничной среды решение  $\mathbf{w}^{(v)}(k, \xi_3)$  системы (Б.5), убывающее на бесконечности ( $\mathbf{w}^{(v)}(k, \xi_3) \rightarrow 0$  при  $|\xi_3| \rightarrow \infty$ ), имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{w}^{(v)}(k, \xi_3) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{G}^{(v)}(k, \xi_3 - \xi'_3) \mathbf{f}(k, \xi'_3) d\xi'_3 = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-|k(\xi_3 - \xi'_3)|) \mathbf{f}_{(3,4)}(k, \xi_3, \xi'_3) d\xi'_3. \end{aligned}$$

Векторная функция  $\mathbf{f}_{(3,4)}(k, \xi_3, \xi'_3)$  определяется соотношением

$$\mathbf{f}_{(3,4)}(k, \xi_3, \xi'_3) = \begin{pmatrix} f_3(\gamma + 1)^{-1} [|\xi| - \gamma/|k|] + i\sigma\xi(\gamma - 1)^{-1} f_4 \\ -f_4(\gamma - 1)^{-1} [|\xi| + \gamma/|k|] + i\sigma\xi(\gamma + 1)^{-1} f_3 \\ f_3 [\text{sign } \xi - |k|\xi(\gamma + 1)^{-1}] + if_4(\gamma - 1)^{-1} [\sigma - k|\xi|] \\ f_4 [\text{sign } \xi + |k|\xi(\gamma - 1)^{-1}] + if_3(\gamma + 1)^{-1} [\sigma - k|\xi|] \end{pmatrix}. \quad (\text{Б.8})$$

В формуле (Б.8)

$$\xi = \xi_3 - \xi'_3, \quad f_s = f_s(k, \xi'_3), \quad s = 3, 4.$$

Решение  $\mathbf{w}^{(v)}(\xi_1, \xi_3)$  в пространстве координат  $\xi_1, \xi_3$  находится с помощью обратного преобразования Фурье:

$$\begin{aligned} \mathbf{w}^{(v)}(\xi_1, \xi_3) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{G}^{(v)}(\xi_1 - \xi'_1, \xi_3 - \xi'_3) \mathbf{f}(\xi'_1, \xi'_3) d\xi'_1 d\xi'_3, \\ \mathbf{G}^{(v)}(\xi_1, \xi_3) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{G}^{(v)}(k, \xi_3) \exp(ik\xi_1) dk, \\ \mathbf{f}(\xi_1, \xi_3) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(ik\xi_1) \mathbf{f}(k, \xi_3) dk. \end{aligned}$$

Матричная функция  $\mathbf{G}^{(v)}$  полезна и при рассмотрении задач в полубезграничной среде. Дело в том, что решение  $\mathbf{w}$  любой краевой задачи в полупространстве можно представить в виде суммы уже найденного решения  $\mathbf{w}^{(v)}$  неоднородного уравнения (Б.4) и решения однородной системы (Б.4), специально подобранных так, чтобы удовлетворить необходимым условиям на границе полупространства.

Общее решение однородной системы (Б.5) имеет вид

$$\mathbf{w}_s = \mathbf{T} \exp(\mathbf{L}_J \xi_3) \mathbf{c}. \quad (\text{Б.9})$$

Здесь  $\mathbf{c}$  — произвольный постоянный вектор.

Выберем  $\mathbf{c}$  так, чтобы получить решения следующих краевых задач для верхнего ( $\xi_3^> = \xi_3 - d/2l \geq 0$ ) и нижнего ( $\xi_3^< = \xi_3 + d/2l \leq 0$ ) полупространств:

$$\mathbf{w} \rightarrow 0, \quad \left| \xi_3^{\geq} \right| \rightarrow \infty; \quad w_2 \Big|_{\xi_3^{\geq}=0} = \bar{v}_3 \Big|_{\xi_3^{\geq}=0}, \quad w_3 \Big|_{\xi_3^{\geq}=0} = \partial_3 \bar{v}_1 \Big|_{\xi_3^{\geq}=0},$$

где  $\bar{v}_3 \Big|_{\xi_3^{\geq}=0}$  и  $\partial_3 \bar{v}_1 \Big|_{\xi_3^{\geq}=0}$  — заданные на границах полупространств функции. Решения таких краевых задач необходимы при построении модели изгибов пластины.

Для фурье-образа  $\mathbf{w}(k, \xi_3)$  окончательный результат имеет вид

$$\mathbf{w}(k, \xi_3) = \Theta(\xi_3^{\geq}) \mathbf{w}_s^> + \Theta(-\xi_3^{\geq}) \mathbf{w}_s^< + \mathbf{w}^{\geq}(k, \xi_3). \quad (\text{Б.10})$$

Здесь

$$\begin{aligned} \mathbf{w}^{\geq}(k, \xi_3) &= \frac{1}{2} \int_{\Gamma^{\geq}} \exp(-|k(\xi_3 - \xi'_3)|) \mathbf{f}_{(3,4)}(k, \xi_3, \xi'_3) d\xi'_3, \\ \mathbf{w}_s^{\geq} &= \begin{pmatrix} -i \operatorname{sign} \xi_3^{\geq} \left[ \sigma \nu^{\geq} + \mu^{\geq} \left( \sigma \left| \xi_3^{\geq} \right| - \gamma/k \right) \right] \\ \nu^{\geq} + \left| \xi_3^{\geq} \right| \mu^{\geq} \\ ik\nu^{\geq} + i\mu^{\geq} \left( k \left| \xi_3^{\geq} \right| - (\gamma + 1)\sigma \right) \\ \operatorname{sign} \xi_3^{\geq} \left[ -|k|\nu^{\geq} + \mu^{\geq} \left( 1 - \left| k\xi_3^{\geq} \right| \right) \right] \end{pmatrix} \exp\left(-\left| k\xi_3^{\geq} \right|\right), \\ \mu^{\geq} &= i\sigma(\gamma + 1)^{-1} \left[ \partial_3 \bar{v}_1 - w_3^{\geq} - ik(\bar{v}_3 - w_2^{\geq}) \right] \Big|_{\xi_3 = \pm d/2l}, \\ \nu^{\geq} &= \left[ \bar{v}_3 - w_2^{\geq} \right] \Big|_{\xi_3 = \pm d/2l}. \end{aligned}$$

Для верхнего полупространства  $\Gamma^> = \{\xi'_3 - d/2l \geq 0\}$ , для нижнего полупространства  $\Gamma^< = \{\xi'_3 + d/2l \leq 0\}$ .

В главе 2 формулы (Б.9), (Б.10) использованы при расчете смещений  $\mathbf{v}^{(0,1)}$  и  $\mathbf{v}^{(1,2)}$  (см. п. 2.3.2).

## Приложение В

### РАСЧЕТ ПОСТОЯННОЙ КОСВЕННОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПОПЕРЕЧНЫХ МОД

В главе 2 при построении теории возмущений для тонкой пластины в эффективные уравнения вошел коэффициент  $g_s^{(4)}$ , который представляет интегральную характеристику нелинейно-упругих полупространств и связан с поверхностными силами, действующими на пластину со стороны подложек.

Приведем зависимость этого коэффициента от материальных параметров среды и волнового числа  $k_0$ :

$$\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 g_s^{(4)}}{2} = 4(\varepsilon_1 |k_0|)^3 (\check{\lambda} + \check{\mu}) \frac{(\gamma - 1)}{(\gamma + 1)^3} \left[ Q - \frac{5}{4}(\gamma - 1)^2 + 2\gamma \right] + \int_{\Gamma \cong} \frac{(\partial_3 \mathbf{p} \cdot \mathbf{b}) - i k_0 (\mathbf{p} \cdot \mathbf{a})}{|\tilde{u}_3^{(0,1)}|^2 \tilde{u}_3^{(0,1)}} d\xi_3,$$

где

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma \cong} [(\partial_3 \mathbf{p} \cdot \mathbf{b}) - i k_0 (\mathbf{p} \cdot \mathbf{a})] d\xi_3 = & \\ = 2 \frac{(\check{\lambda} + \check{\mu})}{(\gamma + 1)^5} (|k_0| \varepsilon_1)^3 |\tilde{u}_3^{(0,1)}|^2 \tilde{u}_3^{(0,1)} & \left[ 2 \{ 4Q + 3\alpha_1^2 - 6\beta_1 \} + \right. \\ + \{ 15 + 4Q(4 + \alpha_1) + 2\alpha_1(13 + 3\alpha_1) - 6\beta_1 \} & (\gamma - 1) + \\ + 2 \{ 19 + Q(3 - 2\alpha_2 + \alpha_1) + 2\alpha_2(1 + \alpha_1) + & \\ + \alpha_1(11 + \alpha_1) - 2(\beta_1 + \beta_2) \} & (\gamma - 1)^2 + \\ + 2 \{ 13 + 4\alpha_1 + \alpha_2(2 - Q + 2\alpha_1) - (\beta_2 + \beta_1) \} & (\gamma - 1)^3 + \\ + \{ 2(6 + \alpha_2(3 + 2\alpha_2)) - 3\beta_1 - 2\beta_2 - 4\beta_3 \} & (\gamma - 1)^4 - \\ & \left. - \left\{ 2 + 4\alpha_2 + \frac{3}{2}\beta_1 + \beta_2 + 2\beta_3 \right\} (\gamma - 1)^5 \right] \end{aligned}$$

и

$$\beta_1 = \frac{\check{H}}{\check{\lambda} + \check{\mu}}, \quad \beta_2 = \frac{\check{F} + 2\check{M}}{\check{\lambda} + \check{\mu}}, \quad \beta_3 = \frac{2\check{M} + \check{N}}{\check{\lambda} + \check{\mu}}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 g_s^{(4)}}{2} = & 2 \frac{\check{\lambda} + \check{\mu}}{(\gamma + 1)^2} (|k_0| \varepsilon_1)^3 \left[ 2 \{4Q + 3\alpha_1^2 - 6\beta_1\} + \right. \\ & + \{31 + 4Q(6 + \alpha_1) + 2\alpha_1(13 + 3\alpha_1) - 6\beta_1\} (\gamma - 1) + \\ & + 2 \{35 + Q(7 - 2\alpha_2 + \alpha_1) + 2\alpha_2(1 + \alpha_1) + \\ & + \alpha_1(11 + \alpha_1) - 2(\beta_1 + \beta_2)\} (\gamma - 1)^2 + \\ & + 2 \{18 + Q + 4\alpha_1 + \alpha_2(2 - Q + 2\alpha_1) - (\beta_1 + \beta_2)\} (\gamma - 1)^3 + \\ & + \{2(3 + \alpha_2(3 + 2\alpha_2)) - 3\beta_1 - 2\beta_2 - 4\beta_3\} (\gamma - 1)^4 - \\ & \left. - \left\{ \frac{9}{2} + 4\alpha_2 + \frac{3}{2}\beta_1 + \beta_2 + 2\beta_3 \right\} (\gamma - 1)^5 \right]. \end{aligned}$$

## Список литературы

1. *Вольмир А.С.* Устойчивость упругих систем. — М.: Физматгиз, 1963. — 879 с.
2. *Григолюк Э.И., Селезов И.Т.* Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек. Механика твердых деформируемых тел. Т.5. — М.: ВИНТИ, 1973. — 272 с.
3. *Товстик П.Е.* Устойчивость тонких оболочек: Асимптотические методы. — М.: Наука. Физматлит, 1995. — 320 с.
4. *Коссович Л.Ю.* Нестационарные задачи теории упругих тонких оболочек. — Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1986. — 176 с.
5. *Томпсон М.Т., Хант Дж.У.* Потеря устойчивости и выпучивание конструкций: теория и практика. — М.: Наука, 1991. — 412 с.
6. *Погорелов А.В.* Геометрические методы в нелинейной теории упругих оболочек. — М.: Наука, 1967. — 280 с.
7. *Григолюк Э.И., Мамай В.И.* Нелинейное деформирование тонкостенных конструкций. — М.: Наука, 1997. — 272 с.
8. *Березин Ю.А.* Моделирование нелинейных волновых процессов. — Новосибирск: Наука, 1982. — 160 с.
9. *Агамиров В.Л.* Динамические задачи нелинейной теории оболочек. — М.: Наука, 1990. — 272 с.
10. *Якушев В.Л.* Нелинейные деформации и устойчивость тонких оболочек. — М.: Наука, 2004. — 276 с.
11. *Samsonov A.M.* Strain solitons in solids and how to construct them. — Chapman & Hall / CRC, 2001. — 230 p.
12. *Ерофеев В.И., Кажяев В.В., Семерикова Н.П.* Волны в стержнях. Дисперсия. Диссипация. Нелинейность. — М.: Физматлит, 2002. — 208 с.
13. *Энгельбрехт Ю.К., Нигул У.К.* Нелинейные волны деформации. — М.: Наука, 1981. — 256 с.
14. *Порубов А.В.* Локализация нелинейных волн деформации. Асимптотические и численные методы исследования. — М.: Физматлит, 2009. — 208 с.
15. *Землянухин А.И., Могилевич Л.И.* Нелинейные волны в цилиндрических оболочках: солитоны, симметрии, эволюция. — Саратов: Сарат. гос. техн. ун-т, 1999. — 132 с.
16. *Куликовский А.Г., Свешникова Е.И.* Нелинейные волны в упругих средах. — М.: Московский лицей, 1998. — 412 с.
17. *Кившарь Ю.С., Сыркин Е.С.* Сдвиговые солитоны в упругой пластине // Акустический журнал. 1991. Т. 37, вып. 1. С. 104–109.
18. *Ковалев А.С., Майер А.П., Соколова Е.С., Экль К.* Солитоны в упругих пластинах // Физика низких температур. 2002. Т. 28, № 10. С. 1092–1102.
19. *Руденко О.В.* Гигантские нелинейности структурно-неоднородных сред и основы методов нелинейной акустической диагностики // УФН. 2006. Т. 176, № 1. С. 77–95.



20. Зайцев В.Ю., Назаров В.Е., Таланов В.И. «Неклассические» проявления микроструктурно-обусловленной нелинейности: новые возможности для акустической диагностики // УФН. 2006. Т. 176, № 1. С. 97–102.
21. Каменецкий Б.И., Талуц Г.Г., Обухов В.А. Исследование процесса пластической деформации цилиндрических оболочек из металлических материалов жидкостью высокого давления // ФММ. 1996. Т. 81, № 3. С. 159–167.
22. Каменецкий Б.И., Киселев В.В. Исследование процессов пластической деформации цилиндрических оболочек жидкостью высокого давления // Кузнечно-штамповочное производство. 2007. № 7. С. 11–17.
23. Timoshenko S.P., Woinowsky-Krieger S. Theory of plates and shell, 2 ed. — New York, Toronto, London: McGraw–Hill, 1959. — 580 p;  
Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. — М.: Наука, 1963. — 635 с.
24. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. — М.: Наука, 1976. — 512 с.
25. Новожилов В.В. Теория тонких оболочек. — Л.: Судпромгиз, 1962. — 431 с.
26. Love A.E.H. A Treatise on the mathematical theory of elasticity. — Cambridge: Univ. Press, 1927;  
Ляв А. Математическая теория упругости. Пер. с англ. — М., Л.: ОНТИ, 1935. — 674 с.
27. Муштары Х.М. Нелинейная теория оболочек. — М.: Наука, 1990. — 223 с.
28. Новожилов В.В., Финкельштейн Р.М. О погрешности гипотез Кирхгофа в теории оболочек // ПММ. 1943. Т. 7, вып. 5. С. 331–340.
29. Murnaghan F.D. Finite deformation of an elastic solid. — New York: John Wiley & sons, inc., London: Chapman & Hall, Limited, 1951. — 140 p.
30. Гольденблат И.И. Нелинейные проблемы теории упругости. — М.: Наука, 1969. — 336 с.
31. Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. — М.: Наука, 1980. — 512 с.
32. Черных К.Ф. Нелинейная упругость (теория и приложения). — СПб.: «Соло», 2004. — 420 с.
33. Dodd R.K., Eilbeck J.C., Gibbon J.D., Morris H.C. Solitons and nonlinear wave equations. — L: Acad. Press, 1982.  
Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х. Солитоны и нелинейные волновые уравнения. Пер. с англ. — М.: Мир, 1988. — 694 с.
34. Киселев В.В., Долгих Д.В. Эффективная модель двумерной нелинейно-упругой динамики тонкой пластины. — Препринт / ИФМ УрО РАН. № 26/50(02). — Екатеринбург, 2001. — 32 с.
35. Долгих Д.В., Киселев В.В. Двумерная модель динамики сильных изгибов нелинейно-упругой пластины // ПММ. 2003. Т. 67, вып. 2. С. 300–314;  
Dolgikh D.V., Kiselev V.V. A two-dimensional model of the dynamics of sharp bending of a non-linearly elastic plate // J. Appl. Math. Mech. 2003. V. 67, No. 2. P. 269–282.
36. Сокуринская Е.В. Некоторые точные решения задачи о нелинейных упругих волнах в пластине // Письма в ЖТФ. 1994. Т. 20, вып. 3. С. 36–41.

37. Киселев В.В., Долгих Д.В. Нелинейно-упругая динамика трехслойной среды: солитоны поперечной гофрировки. — Препринт / ИФМ УрО РАН. № 126(02). — Екатеринбург, 2002. — 40 с.
38. Долгих Д.В., Киселев В.В. Солитоны поперечной гофрировки в трехслойной нелинейно-упругой среде // ПММ. 2004. Т. 68, № 6. С. 1049–1066;  
*Dolgikh D.V., Kiselev V.V. Transverse corrugation solitons in a three-layered non-linearly elastic medium // J. Appl. Math. Mech. 2004. V. 68. P. 947–962.*
39. Губернаторов В.В., Соколов Б.К., Гервасьева И.В., Владимиров Л.Р. О формировании полосовых структур в структурно-однородных материалах при деформации // Физ. мезомеханика. 1999. Т. 2, вып. 1–2. С. 157–162.
40. Панин В.Е. Физическая мезомеханика поверхностных слоев твердых тел // Физ. мезомех. 1999. Т. 2, вып. 6. С. 5–23.
41. Porubov A.V., Samsonov A.M. Long non-linear strain waves in layered elastic half-space // Int. J. Non-Linear Mechanics. 1995. V. 30, No. 6. P. 861–877.
42. Долгих Д.В., Киселев В.В. Узоры из вмятин на поверхности продольно сжатой нелинейно-упругой цилиндрической оболочки // ПММ. 2007. Т. 71, № 3. С. 500–525;  
*Dolgikh D.V., Kiselev V.V. Dent patterns on the surface of a longitudinally compressed, non-linear elastic cylindrical shell // J. Appl. Math. Mech. 2007. V. 71. P. 453–476.*
43. Киселев В.В., Долгих Д.В. Модель изгибов гидростатически сжатой оболочки вблизи порога ее устойчивости // ПМТФ. 2007. Т. 48, № 6. С. 124–134;  
*Kiselev V.V., Dolgikh D.V. Model of bending of a hydrostatically compressed shell near its stability threshold // J. Appl. Math. Tech. Phys. 2007. V. 48, No. 6. P. 878–886.*
44. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. — М.: Наука, 1972. — 432 с.
45. Долгих Д.В., Киселев В.В. Гофрирование гибкого кольца в условиях внешнего гидростатического сжатия // ПММ. 2010. Т. 74, № 2. С. 285–298;  
*Dolgikh D.V., Kiselev V.V. Corrugating of a flexible ring under an external hydrostatic pressure // J. Appl. Math. Mech. 2010. V. 74, No. 2. P. 204–213.*
46. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория упругости. — М.: Наука, 1987. — 246 с.
47. Гольденблат И.И. Некоторые вопросы механики деформируемых сред. — М.: Гостехиздат, 1955. — 271 с.
48. Францевич И.Н., Воронов Ф.Ф., Бакута С.А. Упругие постоянные и модули упругости металлов и неметаллов. Справочник под ред. Францевича И.Н. — Киев: Наукова думка, 1982. — 286 с.
49. Лаврентьев М.А., Ишлинский А.Ю. Динамические формы потери устойчивости упругих систем // ДАН СССР. 1949. Т. 64, № 6. С. 779–782.
50. Найфе А. Методы возмущений. — М.: Мир, 1976. — 456 с.
51. Калякин Л.А. Асимптотический анализ модели авторезонанса // ДАН. 2001. Т. 378, № 5. С. 594–597.

52. *Киселев В.В.* Слабонелинейные солитоноподобные возбуждения в двумерной модели мартенситного перехода // ФТТ. 1994. Т. 36, № 11. С. 3321–3331.
53. *Kiseliev V.V.* Solitons in the vicinity of a martensitic phase transition // J. Am. Ceram. Soc. 2000. V. 118. P. 601–608.
54. *Самсонов А.М., Дрейден Г.В., Порубов А.В., Семенова И.В.* Генерация и наблюдение солитона продольной деформации в пластине // Письма в ЖТФ. 1996. Т. 22, вып. 21. С. 61–68.
55. *Порубов А.В., Самсонов А.М.* Уточнение модели распространения продольных волн деформации в нелинейно-упругом стержне // Письма в ЖТФ. 1993. Т. 19, вып. 12. С. 26–29.
56. *Самсонов А.М.* Эволюция солитона в нелинейно упругом стержне переменного сечения // ДАН СССР. 1984. Т. 277, № 2. С. 332–335.
57. *Самсонов А.М., Сокуринская Е.В.* О возможности возбуждения солитона продольной деформации в нелинейно-упругом стержне // ЖТФ. 1988. Т. 58, вып. 8. С. 1632–1634.
58. *Дрейден Г.В., Порубов А.В., Самсонов А.М., Семенова И.В.* Отражение солитона продольной деформации от торца нелинейно-упругого стержня // ЖТФ. 2001. Т. 71, вып. 5. С. 1–8.
59. *Ахиезер Н.И.* Элементы теории эллиптических функций. — М.: Наука, 1970. — 304 с.
60. *Johnson P.A., Xiaojing Jia.* Nonlinear dynamics, granular media and dynamic earthquake triggering // Nature. 2005. V. 437, No. 7. P. 871–874.
61. *Ablowitz M.J., Segur H.* Solitons and the inverse scattering transform. — Philadelphia: SIAM, 1981;  
*Абловиц М., Сигур Х.* Солитоны и метод обратной задачи. Пер. с англ. — М.: Мир, 1987. — 478 с.
62. *Byrd P.F., Friedman M.D.* Handbook of elliptic integrals for engineers and scientists. — Berlin, etc.: Springer, 1971. — 358 p.
63. *Rosenau P., Hyman J.M.* Compactons: Solitons with finite wavelengh // Phys. Rev. Lett. 1993. V. 70, No. 5. P. 564–567.
64. *Hill R.* The mathematical theory of plasticity. — Oxford: At the Clarendon press, 1950;  
*Хилл Р.* Математическая теория пластичности. Пер. с англ. — М.: ГИТТЛ, 1956. — 407 с.
65. *Antman, Stuart S.* Nonlinear problems of elasticity. — New York: Springer-Verlag, 1995. — 752 p.
66. *Лаврентьев М.А., Ишлинский А.Ю.* Динамические формы потери устойчивости упругих систем // ДАН СССР. 1949. Т. 64, № 6. С. 779–782.
67. *Ворович И.И.* Неединственность и устойчивость нелинейной механики сплошной среды. Некоторые математические проблемы // Успехи механики. 2006. № 1. С. 121–154.
68. *Goriely A., Tabor M.* Nonlinear dynamics of filaments I. Dynamical instabilities // Physica D. 1997. V. 105. P. 20–44.

- 
69. *Goriely A., Tabor M.* Nonlinear dynamics of filaments II. Nonlinear analysis // *Physica D.* 1997. V. 105. P. 45–61.
  70. *Lega J., Goriely A.* Pulses, fronts and oscillations of an elastic rod // *Physica D.* 1999. V. 132. P. 373–391.
  71. *Lafortune S., Lega J.* Instability of local deformations of an elastic rod // *Physica D.* 2003. V. 182. P. 103–124.
  72. *Максимов Ю.Я., Филипповская Е.А.* Алгоритмы решения задач нелинейного программирования. — М.: МИФИ, 1982. — 52 с.
  73. *Coleman B.D., Dill E.H.* Flexure waves in elastic rods // *J. Acoust. Soc. Am.* 1992. V. 91, No. 5. P. 2663–2673.
  74. *Качанов Л.М.* Основы теории пластичности. — М.: Наука, 1969. — 420 с.