

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
УРАЛЬСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ ФИЗИКИ МЕТАЛЛОВ

А.Б. Борисов, В.В. Киселев

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ, СОЛИТОНЫ И ЛОКАЛИЗОВАННЫЕ СТРУКТУРЫ В МАГНЕТИКАХ

Т. 2. ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ СОЛИТОНЫ,
ДВУМЕРНЫЕ И ТРЕХМЕРНЫЕ «УЗОРЫ»

ЕКАТЕРИНБУРГ, 2011

УДК 538.221+517.9

Борисов А. Б., Киселев В. В. **Нелинейные волны, солитоны и локализованные структуры в магнетиках. Т. 2. Топологические солитоны, двумерные и трехмерные «узоры».** Екатеринбург: УрО РАН, 2011.

Монография содержит изложение теории дву- и трехмерных солитонов и локализованных структур в магнитных средах. Прямые методы интегрирования, а именно специальные подстановки, метод Хироты, преобразования Бэклунда, процедура «одевания», используются для построения и анализа пространственно неоднородных решений типичных моделей ферро- и антиферромагнетиков. С их помощью аналитически описаны вихревые солитоны и решетки из солитонных вихрей на фоне не только однородного основного состояния магнитной среды, но и полосовой доменной структуры или нелинейной спиновой волны. Исследованы кольцевые волны в магнетиках, спиральные мезоструктуры обменного происхождения, солитонные состояния вблизи магнитных дисклинаций, проявляющие макроскопическое квантование энергии. Для решения нелинейных краевых задач, связанных с вычислением полей топологических дефектов, предложены специальные варианты спектрального преобразования, новые приемы интегрирования нелинейных уравнений, основанные на методах дифференциальной геометрии. В рамках рассматриваемых моделей это позволило найти решения, описывающие «мишени» из кольцевых доменов, спиральные диполи, состоящие из отрезков доменных границ со спиральным закручиванием вблизи концов, струнные конфигурации из отрезков доменных стенок, в том числе на фоне полосовой доменной структуры, трехмерные дефекты типа нитевидных геликоидально-вихревых структур и т. д. Изложены результаты численного моделирования трехмерных солитонов в легкоосном ферромагнетике с ненулевым инвариантом Хопфа и конечной энергией, внутренняя структура которых представляет собой зацепления вихревых колец.

Решение конкретных задач сопровождается обсуждением универсальных методических приемов, полным анализом внутренней структуры различных нелинейных возбуждений и структур. Это делает книгу полезной как для квалифицированных научных работников – физиков-теоретиков и специалистов, интересующихся проблемами физики магнитных явлений, так и для студентов старших курсов университетов.

Ответственный редактор

доктор физ.-мат. наук **А.П. Танкеев**

Рецензент

доктор физ.-мат. наук **Ю.Н. Скрыбин**



ISBN 978-5-7691-2232-3

© ИФМ УрО РАН, 2011 г.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Но живут, живут в N-измереньях
Вихри воль, циклоны мыслей, те,
Кем смешны мы с нашим
детским зреньем
С нашим шагом по одной черте.

В. Брюсов

Одна из главных особенностей развития современной теоретической физики – успешное проникновение в область существенно нелинейных явлений и процессов. Классический пример нелинейной среды и интересный объект фундаментальных исследований – магнетики. Магнетики разнообразны по структуре и свойствам, обладают множеством нелинейных образований и возбуждений, которыми сравнительно легко можно управлять посредством внешних полей. Поэтому магнитные материалы находят широкое применение в микроэлектронике, вычислительной технике, разных приборах и устройствах. Несмотря на кажущуюся простоту феноменологического выражения для энергии магнетиков, условие постоянства длины векторов намагниченности подрешеток делает задачи теоретического описания больших отклонений намагниченности от основного состояния существенно нелинейными. Магнитные материалы представляют собой хорошие модельные системы, исследование которых привело к развитию нетрадиционных методов теоретической физики. Полученные в этой области результаты в значительной мере сформировали представления о таких новых структурных единицах нелинейной физики твердого тела, как солитоны и топологические дефекты.

Солитоны – это пространственно локализованные частицеподобные волны, которые восстанавливают свою форму даже после взаимодействия с другими солитонами или нелинейными волнами. В нелинейной физике их роль подобна роли квазичастиц в линейной теории. В отличие от квазичастиц солитоны несут информацию о структуре и динамике нелинейной среды, определяют кинетические, термодинамические, магнитные, механические и другие свойства конденсированных сред в условиях значительного внешнего

воздействия на систему. При сильных внешних возмущениях без предсказания и анализа солитонных состояний невозможна успешная интерпретация экспериментальных данных. На основе метода обратной задачи рассеяния (ОЗР) и его модификаций выполнены детальные исследования квазиодномерной динамики сильно нелинейных магнитных возбуждений. Свойства таких состояний не могут быть получены ни в каком конечном порядке традиционной теории возмущений.

При сильных внешних воздействиях физические свойства конденсированных сред определяются не только солитонами, но и нелинейными топологическими дефектами. В континуальной теории топологические дефекты описываются полями с особенностями, которые нельзя устранить, не разрушая упорядоченного состояния в большом объеме вещества. Топологические дефекты существенно нелинейны по внутренней природе и происхождению. Они играют решающую роль в формировании пластических и прочностных свойств кристаллов, магнитных, структурных, неоднородных сверхпроводящих состояний и фазовых переходов. Нелинейные дефекты в конденсированных средах в отличие от дефектов линейной теории упругости богаче по внутренней структуре, обладают специфическими особенностями взаимодействия.

Для современного этапа развития физики нелинейных явлений характерны следующие тенденции. Повышение «мерности» задач и переход к реальным системам, привлечение интегрируемых моделей для изучения нелинейной физики сложных систем, развитие специальных методов теоретического описания сильно нелинейных объектов. Все методы, на основе которых в настоящее время возможно аналитическое описание нелинейных состояний, сталкиваются со значительными трудностями при их распространении на задачи, связанные с расчетом полей многомерных солитонов и дефектов. В этой монографии излагаются некоторые пути преодоления указанных трудностей, а также результаты, достигнутые при теоретическом описании дву- и трехмерных солитонов и топологических дефектов в магнетиках.

В главе 1 в обменном приближении рассмотрены двумерные нелинейные возбуждения и структуры в ферро- и антиферромагнетиках. Показано, что кольцевые солитоноподобные волны в ферро- и антиферромагнетиках, а также статические распределения намагниченности вокруг радиально-симметричных магнитных включений в ферромагнетиках могут быть аналитически описаны и подробно исследованы с помощью одной из наиболее эффективных модифи-

каций метода обратной задачи рассеяния – процедуры «одевания». В этой же главе обсуждаются типичные свойства двумерных вихрей в ферромагнетиках при наличии не только обменных, но магнитостатических взаимодействий, а также энергии кристаллографической анизотропии. Приведены аргументы Деррика, ограничивающие возможность существования статических конфигураций с конечной энергией в ферромагнетиках. Показано, что своеобразие динамики двумерных магнитных вихрей находит естественное объяснение при использовании законов сохранения, но только при условии изменения формы записи законов сохранения с учетом топологических свойств вихрей. Изложены результаты работ Белавина и Полякова по теоретическому описанию двумерных вихрей в гейзенберговском ферромагнетике. Методом «одевания» аналитически описаны двумерные солитоноподобные возбуждения на фоне магнитных дисклинаций в изотропных антиферромагнетиках.

Показано, что учет топологических свойств дисклинаций приводит к макроскопическому квантованию энергии таких солитонов. Предложена процедура интегрирования двухмерной модели гейзенберговского ферромагнетика, основанная на свойствах конформной симметрии уравнений Ландау – Лифшица. С ее помощью описан большой класс сингулярных нелинейных дефектов, в том числе двумерные конфигурации типа магнитных «мишеней», спиралей и спиральных вихрей. Сингулярные мезодефекты главы 1 имеют обменное происхождение и в конечном счете обусловлены изменениями микроструктуры и (или) материальных параметров магнитоупорядоченной среды на расстояниях порядка межатомного. С помощью компьютерного моделирования исследованы физические причины образования локализованных структур в двумерной решетке гейзенберговского ферромагнетика.

В главах 2–5 развиваются методы, на основе которых оказалось возможным полное аналитическое описание нелинейных дефектов в конденсированных средах в рамках двумерной модели типа Френкеля – Конторовой (эллиптическое уравнение sine-Gordon). В магнетиках такие дефекты формируются при учете не только обменных взаимодействий, но и кристаллографической магнитной анизотропии. Модель имеет большое число экспериментальных реализаций и описывает многообразие магнитных дефектов не только на фоне однородного основного состояния ферро- и антиферромагнетиков. Она дает упрощенное описание тонкой структуры отдельной доменной границы в этих материалах, а также топологических дефектов в несоизмеримых (полосовых доменных) структурах. В пос-

леднем случае солитоны и дефекты тесно связаны между собой. При наличии несоизмеримой фазы или полосовых доменов основное состояние среды представляет собой сверхструктуру, которую можно охарактеризовать одномерной решеткой 2π -кинков (солитонов). Дефекты в решетке солитонов определяют основные физические свойства подобных систем. Вследствие существенной нелинейности не только модели и самих дефектов, но и основного состояния теоретическое описание подобных конфигураций вызывает значительные трудности и ранее проведено не было.

В главе 2 для построения решений рассматриваемой модели привлекаются так называемые прямые методы интегрирования: метод Хироты, подстановка Лэмба, преобразования Бэклунда. Они достаточно просты и хорошо зарекомендовали себя при построении солитонных решений близкого по форме записи гиперболического уравнения sine-Gordon. Последнее широко используется для исследования различных одномерных волн, в том числе в магнетиках. Эллиптическое уравнение sine-Gordon менее изучено и описывает не волновые процессы, а двумерные дефекты. Прямыми методами построены его решения, которые являются аналогами солитонов. Оказалось, что они описывают магнитные вихри и периодические структуры из вихрей на однородном фоне или на фоне полосовой доменной структуры. Ядро любого вихревого солитона формируется в результате ортогонального пересечения двух 2π -кинков (доменных границ). После пересечения доменные стенки изменяют свою киральность. Прямые методы позволили аналитически описать динамику солитонных вихрей и разрушение решеток из солитонных вихрей нелинейными волнами.

Установлено, что все солитоноподобные вихри имеют сравнительно большой топологический заряд, поэтому в главе 3 развит вариант обратной задачи рассеяния, пригодный для изучения «несолитонных» дефектов с меньшими топологическими зарядами, а значит, и меньшей энергией. При построении обратной задачи рассеяния заданы асимптотические условия на бесконечности по одной из пространственных переменных, которые учитывают наличие несоизмеримой (полосовой доменной) структуры или нелинейной волны специального вида. Частным случаем является асимптотика типа одиночного 2π -кинка. Последний тип краевых условий соответствует задачам описания тонкой структуры доменной стенки в ферро- и антиферромагнетиках.

В главе 4 с помощью ОЗР решены нелинейные краевые задачи, связанные с вычислением полей «несолитонных» вихревых дипо-

лей в несоизмеримой фазе или полосовой доменной структуре магнетиков. Диполи занимают особое место среди вихревых конфигураций, так как имеют пространственно локализованные поля и потому меньшую энергию. «Несолитонные» вихревые диполи представляют собой струнные конфигурации, образованные из отрезков доменных границ (солитонных линий), вставленных в полосовую доменную структуру (решетку солитонов). Рассмотрены диполи, которые занимают симметричное положение на фоне солитонной сверхструктуры. Свойства симметрии позволили свести расчет полей двумерных существенно нелинейных объектов к решению одномерных линейных интегральных уравнений с известными ядрами. Показано, что в главном приближении асимптотика поля диполя определяется двумя эффектами: двумерной деформацией одномерной решетки солитонов, собственным полем струнной конфигурации. В этой же главе в рамках рассматриваемой модели решена задача о расчете поля доменной стенки с блоховской линией. Перечисленные результаты могут найти приложения не только при описании магнитных систем. В качестве примера показано, что найденные решения дают распределение джозефсоновских токов в плоском туннельном контакте, индуцированное проникновением абрикосовской вихревой нити из сверхпроводящих электродов в область туннельного барьера.

В главе 5 на основе модификации развитой процедуры исследованы «несолитонные» нелинейные дефекты в конденсированных средах, по топологическим свойствам аналогичные дефектам линейной теории упругости: дислокационным и дисклинационным диполям, трещинам, точечным дефектам т. д. В магнетиках они являются праобразами магнитных дисклинаций, гантелеобразных доменов, спиральных вихревых диполей – отрезков доменных границ со спиральным закручиванием вблизи концов, «мишеней» из кольцевых доменов и т. д. Для расчета полей дефектов предложен упрощенный подход, который позволяет сравнительно легко воспроизвести результаты, известные для симметричных вихревых диполей и структур типа «мишени», дает аналитическое описание новых дефектов, не обладающих симметрией. С его помощью теоретически описаны внутреннее строение различных «несолитонных» дефектов на фоне однородного состояния среды и при наличии полосовой доменной структуры, особенности взаимодействия нелинейных дефектов друг с другом и с плоскопараллельной доменной структурой.

В главе 6 изучен широкий класс решений трехмерных статических уравнений Ландау – Лифшица изотропного ферромагнетика, а

также модели главного кирального поля на группе $SU(2)$, которая является универсальной моделью для многоподрешеточных антиферромагнетиков. Специальными подстановками исходные уравнения моделей сведены к уравнениям с простой геометрической интерпретацией. Предложена новая процедура интегрирования трехмерных дифференциальных уравнений в частных производных, основанная на методах дифференциальной геометрии. С ее помощью в обменном приближении аналитически описаны новые типы пространственных магнитных структур и текстур в ферро- и антиферромагнетиках, включающие нелокализованные текстуры и локализованные мезодефекты типа ферро- и антиферромагнитных «мишеней», магнитных источников, нитевидных геликоидально-вихревых структур. Изложены результаты численного моделирования трехмерных топологических солитонов в «легкоосном» ферромагнетике с ненулевым инвариантом Хопфа и конечной энергией, внутренняя структура которых представляет собой зацепления вихревых колец.

В книге приведены цитаты и афоризмы, иногда шуточные, многих выдающихся людей. Это отвечает ее демократическому стилю. Хотя мы присоединяемся к словам Джорджа Бернарда Шоу: «Демократия – это когда власти уже не назначаются безнравственным меньшинством, а выбираются безграмотным большинством»; Альбера Камю: «Демократия – это не власть большинства, а защита меньшинства»; Аристотеля: «Крайняя демократия – та же тирания, только разделенная среди многих».

Отметим, что одним из мотивов написания книги было снижение уровня математического и физического образования в университетах и вузах. Нежелание правящей элиты заниматься просвещением нации до революции 1917 г. отмечалась многими. Приведем слова Л.Н. Толстого из письма к А.М Калмыковой (Ясная Поляна, 31 августа 1896 г. Собр. соч. В 22 т. Т. 19. М.: Художественная литература, 1984. С. 364): «Сила правительства держится на невежестве народа, и оно знает это, и потому всегда будет бороться против просвещения. Пора нам понять это... Так, например, хоть бы в данном случае, правительство, как у нас (да и везде), держащееся на невежестве народа, никогда не позволит истинно просвещать его. Оно разрешает всякого рода мнимопросветительные учреждения, контролируемые им, – школы, гимназии, университеты, академии, всякого рода комитеты и съезды и подцензурные издания до тех пор, пока эти учреждения и издания служат его целям, т. е. одурают народ, или, по крайней мере, не мешают одурению его; но при всякой

попытке этих учреждений или изданий пошатнуть то, на чем зиждется власть правительства, т. е. невежество народа, правительство преспокойно, не отдавая никому отчета, почему оно поступает так, а не иначе, произносит свое “veto”...». К сожалению, такая же тенденция возрождается в настоящее время. «Все это делается не по невежеству, а, как мне объяснили мои американские коллеги, сознательно, просто по экономическим причинам: приобретение населением культуры (например склонности читать книги) плохо влияет на покупательную способность в их обществе потребителей, и вместо того чтобы ежедневно покупать новые стиральные машины или автомобили, испорченные культурой граждане начинают интересоваться стихами или музыкой, картинами и теоремами и не приносят хозяевам общества ожидаемого дохода». «Вот к этому-то состоянию общества наши реформаторы и стремятся привести Россию, традиции которой совершенно противоположны. Наши школьники и сегодня хотят настоящих научных знаний, вечных истин, без понимания которых человек остается рабом. Но сверху на них сыплется антинаучная мракобесная болтовня...» (Речь академика В.И. Арнольда на парламентских слушаниях в Государственной думе // Известия, 2002. 6 дек.). Хотя он же констатирует: «Россия отстает от мировой обскурантистской тенденции подавления науки, культуры и образования: наши школьники по-прежнему понимают, почему $1/2 + 1/3 = 5/6$ (а не $2/5$, как думают во многих других местах)...» (Арнольд В.И. Математика у нас все еще престижна // «Эхо планеты», 2008. 4 июля); «До сих пор уничтожение культуры, науки и образования (в частности математики и математического образования) в России идет медленнее, чем в более цивилизованных странах (Арнольд В.И. Антинаучная революция и математика // Вестн. РАН, 1999. Т. 69, № 6. С. 553–558).

Мы старались сделать изложение материала доступным для широкого круга читателей. Нам не хотелось, чтобы мнение читателей совпало с рецензией выдающихся математиков на работы Н.И. Лобачевского. К.Ф. Гаусс писал, что «их можно уподобить запутанному лесу, через который нельзя найти дороги, не изучив предварительно каждого дерева». По мнению М.В. Остроградского: «Автор, по-видимому, задался целью писать таким образом, чтобы его нельзя было понять. Он достиг этой цели; большая часть книги осталась столь же неизвестной для меня, как если бы я никогда не видал ее...» (цит. по: Гнеденко Б.В. Михаил Васильевич Остроградский (Очерк научной и педагогической деятельности) // Новое в жизни, науке, технике. Сер. Математика, кибернетика, 1984. № 5. С. 45).

В то же время содержание монографии неизбежно отражает нашу научную деятельность и предпочтения. Поэтому мы невольно увлеклись, а это привело к пугающему разрастанию рукописи, хотя еще А. Эйнштейн предупреждал: «Наука не является и никогда не будет являться законченной книгой. Каждый важный успех приносит новые вопросы. Всякое развитие обнаруживает со временем все новые и более глубокие трудности».

Авторы признательны научному редактору проф. А.П. Танкееву, внимательно прочитавшему рукопись и сделавшему ряд полезных замечаний. Все численные расчеты трехмерных магнитных хопфионов в главе 6 и построение их рисунков выполнены Ф.Н. Рыбаковым. Кроме того, мы благодарны ему за полезные советы по содержанию этой главы. Большую помощь при оформлении книги оказал Д.В. Долгих.

СВЕТЛОЙ ПАМЯТИ УШЕДШИХ ОТ НАС
РОДИТЕЛЕЙ, УЧИТЕЛЕЙ И ДРУЗЕЙ

Глава 1

**ДВУМЕРНЫЕ МАГНИТНЫЕ СТРУКТУРЫ И СОЛИТОНЫ
В ФЕРРО- И АНТИФЕРРОМАГНЕТИКАХ
В ОБМЕННОМ ПРИБЛИЖЕНИИ**

Книга обязательно должна будить
воображение, – продолжил Паркала, –
иначе это не книга, а дурной учебник.

*А. Стругацкий, Б. Стругацкий.
Полдень, XXII век*

В последние десятилетия вызывают повышенный интерес солитоны, вихри и другие нелинейные возбуждения в низкоразмерных магнетиках [1–5]. Многие исследователи отмечали важную роль вихрей при описании магнитных топологических фазовых переходов (см., например: [4–7]). Коллективные возбуждения в низкоразмерных магнетиках представляют не только академический интерес. К настоящему времени синтезирован большой класс квазидно- и квазидвумерных ферромагнетиков, где магнитное взаимодействие внутри кристаллографических плоскостей намного сильнее такового между плоскостями. Данные материалы включают слоистые магнетики, интеркалированные соединения графита, купратные плоскости в высокотемпературных сверхпроводниках [8].

Экспериментально установлено, что в тонких магнитных пленках с сильной перпендикулярной анизотропией типа «легкая ось» под действием гармонического или монополярного импульсного магнитного поля при определенных условиях происходит самоорганизация распределений намагниченности. Из лабиринтной доменной структуры формируются новые структуры – ведущие центры типа «мишень», спиральные домены и доменные структуры с высокой степенью трансляционной и ориентационной упорядоченности [2–14], наблюдаемые с помощью магнитооптического эффекта Кер-

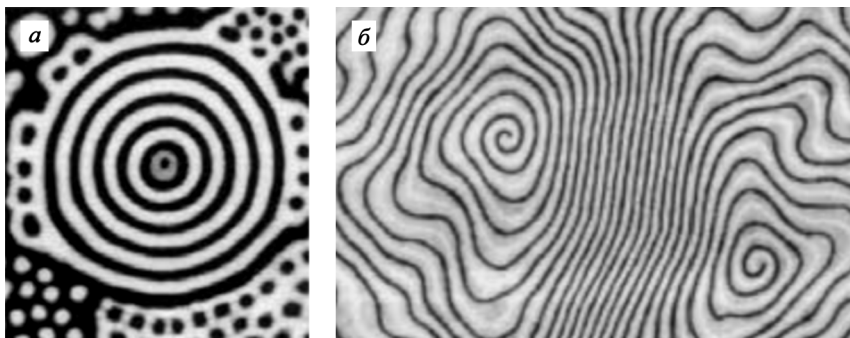


Рис. 1.1. Магнитная «мишень» (а) и спиральные структуры (б) в ферромагнитной пленке

ра (рис. 1.1). Описанный процесс был интерпретирован как образование из лабиринтной доменной структуры динамических магнитных структур, аналогичных диссипативным структурам в распределенных активных средах [15, 16].

Напомним, что в пассивной среде энергия переносится самой волной; при этом среда поглощает энергию, но не может пополнить ее запас. В противоположность этому активные среды характеризуются непрерывным потоком энергии и вещества от источника к каждому физически малому элементу среды и диссипацией энергии. Когда элементы непрерывной среды локально связаны между собой, возникают нелинейные волновые процессы принципиально нового типа, коренным образом отличающиеся от традиционных линейных волновых процессов. Сложные конфигурации, образованные такими волнами в форме стационарных или зависящих от времени пространственных структур, служат проявлениями процессов самоорганизации в активных средах. Формирование упорядоченных структур в средах, через каждый элемент которых протекают потоки энергии и вещества, наблюдается в широком классе систем как живой, так и неживой природы. Наглядные примеры самоорганизации в неживой природе – возникновение спиральных и кольцевых автоволн около ведущих центров в реакции Белоусова – Жаботинского (рис. 1.2), появление спиральных галактик и циклонов (рис. 1.3). В жизнедеятельности многоклеточных организмов процессы, связанные с созданием диссипативных структур и распространением автоволн, играют чрезвычайно важную роль. Так, автоволны определяют ритм сердечной деятельности, обработку информации в коре головного мозга.

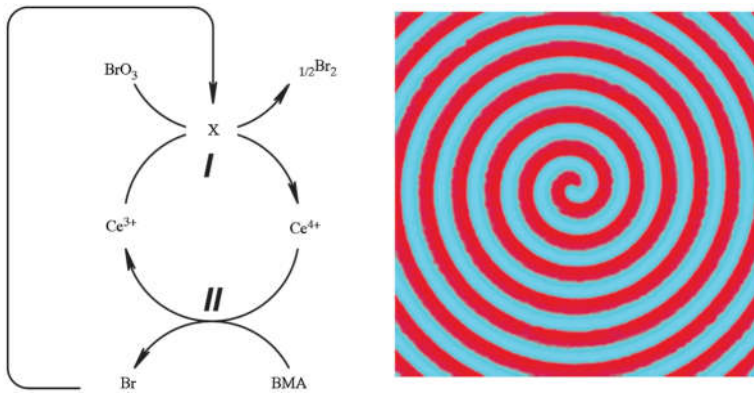


Рис. 1.2. Реакция Белоусова – Жаботинского

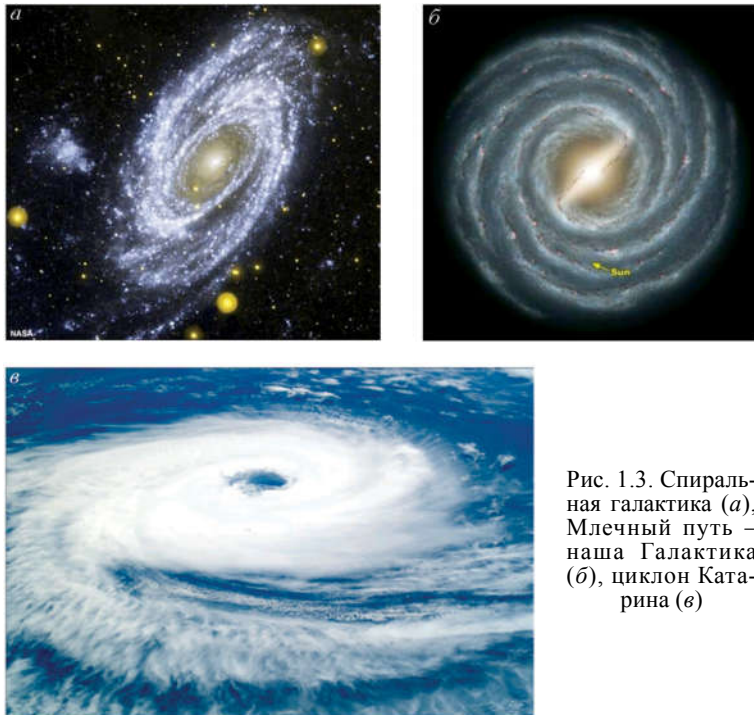


Рис. 1.3. Спиральная галактика (а), Млечный путь – наша Галактика (б), циклон Катрина (в)

Отличительными особенностями самоорганизации, наблюдаемой в магнитных пленках являются статическая устойчивость и существенная нелинейность возникающих структур. Магнитные структуры не исчезают, как в активных средах, после выключения поля накачки – время жизни мишеней и спиральных доменов на несколько порядков превышает период магнитного поля. Хотя магнитные спирали и кольцевые домены по способу образования близки к автоволнам в активных средах, при столкновениях они не гасят друг друга, подобно автоволнам в живых организмах и растворах химических реагентов или волнам горения, а деформируются, обтекают препятствия, стремятся сохранить свою индивидуальность (см. рис 1.1, б) и этим напоминают солитоны. В отсутствие притока энергии элементы магнитной среды пассивны, однако для каждого из них, как и для системы в целом, существуют метастабильные состояния с локальными минимумами энергии. Поэтому сложные стационарные структуры в магнетиках одновременно можно считать дефектами основного состояния среды. Итак, магнитные структуры типа «мишеней», спиральных доменов – это дефекты магнитоупорядоченной среды, которые порождаются накачкой энергии в среду и после отключения накачки релаксируют к термодинамически равновесному состоянию за достаточно длительное время.

Читателям, интересующимся математическими и прикладными аспектами вихревой тематики в нелинейной физике, рекомендуем обратиться к превосходной монографии [17]. Напомним некоторые данные, полезные для дальнейшего обсуждения. К настоящему времени наиболее полно исследованы стационарные и автоволновые структуры конденсированных сред в рамках модели Гинзбурга – Ландау:

$$\partial_t \Psi = \Psi + (\beta + ib)\Delta\Psi - (\gamma + ic)\Psi |\Psi|^2.$$

Здесь комплексный параметр порядка $\Psi = \rho \exp(i\Phi)$ зависит от безразмерных пространственно-временных координат; Δ – оператор Лапласа; b, c, β, γ – вещественные параметры. Коэффициенты $\beta, \gamma > 0$ соответствуют линейному и нелинейному затуханию, а постоянные b и c характеризуют линейную дисперсию и нелинейный сдвиг частоты. Интересной и важной структурой, описываемой такими моделями при $b = c = \partial_t \Psi = 0$, является стационарный вихрь. Двумерная вихревая конфигурация определяется подстановкой $\rho = \rho(r)$, $\Phi = q\varphi$, где r, φ – полярные координаты, $q = \pm 1, \pm 2, \dots$, и решением модели с

граничными условиями: $\rho(r=0) = 0$, $\rho(r=\infty) = 1$. При обходе вокруг вихревой нити (точки $r=0$) фаза Φ получает приращение, кратное 2π , однако поле Ψ , через которое выражаются наблюдаемые величины, остается однозначным. В теории сверхтекучести поле Ψ – это волновая функция конденсата слабонеидеального бозе-газа. Вихревые нити формируются при определенной скорости вращения сосуда со сверхтекучей жидкостью [18]. Вихри с $q \neq \pm 1$ термодинамически неустойчивы и распадаются на q вихрей с единичным зарядом. В теории сверхпроводимости Ψ – волновая функция конденсата куперовских пар [18, 19]. Вихревым решениям соответствуют стационарные сверхпроводящие токи, которые окружают и экранируют нити внешнего магнитного поля в толще сверхпроводников второго рода.

Нетривиальными динамическими структурами, наблюдаемыми во многих автоколебательных активных средах, являются N -заходные спиральные волны. Им отвечают решения вида $\rho = \rho(r)$, $\Phi = N\varphi - \omega t + f(r)$. На больших расстояниях от центра спирали $\rho(r) \approx \text{const}$, $f(r) \rightarrow kr$ при $r \rightarrow \infty$ и линии постоянной фазы Φ имеют форму архимедовой спирали. Частота вращения спирали $\omega = c/\gamma + (b - c\beta/\gamma)k^2$ зависит от параметров b , c , β , γ модели. Вблизи центра спирали амплитуда волны $\rho(r)$ уменьшается и обращается в нуль при $r=0$. Вид функций $\rho(r)$, $f(r)$ определяется численными методами [15, 17, 20, 21]. В рамках близкого подхода в ферромагнетиках с одноосной анизотропией описаны малоамплитудные нелинейные волны спиральной формы, показана принципиальная возможность их стабилизации [22].

В работе [23] с учетом энергии магнитной анизотропии и магнитостатических взаимодействий построена приближенная теория стационарных спиральных доменных структур в ферромагнитной пленке при наличии внешнего магнитного поля. Найдены области устойчивости спиральных структур. Концентрические кольцевые и спиральные домены в окрестности точки фазового перехода теоретически исследованы в [14].

В этой главе изложены результаты работ, в которых метод «одевания» применен для интегрирования моделей, описывающих в обменном приближении радиально-симметричные солитоны и структуры в ферро- и антиферромагнетиках (см. п. 1.1). Рассмотрены топологические двумерные солитоны, для которых параметр порядка (намагниченность или вектор антиферромагнетизма для ферро- и антиферромагнетика соответственно) не может быть переведен в основное состояние каким-либо непрерывным преобразованием.

Показано, что топологические свойства определяют особенности динамики двумерных магнитных вихрей и приводят к макроскопическому квантованию энергии солитоноподобных структур на фоне магнитных дисклинаций в антиферромагнетиках (см. п. 1.2, п. 1.3). В пункте 1.4 свойство конформной инвариантности двумерной модели изотропного ферромагнетика использовано для построения решений, соответствующих нелинейным магнитным дефектам – «мишеням», спиральям, спиральным вихрям. Отметим, что формирование таких мезообъектов возможно уже в основном обменном приближении и связано с изменениями микроструктуры и материальных параметров среды на расстояниях порядка межатомных. В п. 1.5 с помощью численных методов исследованы физические причины возникновения логарифмических и других спиральных структур в 2D-решеточной модели гейзенберговского ферромагнетика.

1.1. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА «ОДЕВАНИЯ» К АНАЛИЗУ ЦИЛИНДРИЧЕСКИ-СИММЕТРИЧНЫХ СОЛИТОНОВ В МАГНИТНЫХ СРЕДАХ

На свете есть вещи поважнее самых прекрасных открытий – это знание метода, которым они были сделаны.

Г. Лейбниц

1.1.1. Основные модели и U – V -пары для них

Трехмерные модели теории магнетизма в общем случае не являются интегрируемыми. В то же время обменные взаимодействия допускают формирование всевозможных радиально-симметричных магнитных солитонов, которые могут быть исследованы методом обратной задачи рассеяния или его модификациями. В частности, в рамках модели Ландау – Лифшица в [24] проанализированы кольцевые волны намагниченности в гейзенберговском ферромагнетике (эти результаты изложены в [25]). В настоящем разделе изложены результаты работы [26], которые позволяют исследовать другие цилиндрически-симметричные возбуждения в магнитных средах. Уравнения динамики рассматриваемых сред

учитывают только обменные взаимодействия и допускают следующую универсальную форму записи:

$$\partial_t(\partial_t g g^{-1}) - \partial_r(\partial_r g g^{-1}) - \frac{1}{r} \partial_r g g^{-1} = 0, \quad (1.1.1)$$

где поле $g(r, t)$ – матричная 2×2 функция от переменных r, t . Ось симметрии распределения намагниченности совмещена с осью Oz декартовой системы координат $Oxyz$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ – радиальная координата аксиально симметричного поля, t – время.

В силу тождества

$$\text{Sp}(\partial_\mu g g^{-1}) = \partial_\mu \ln[\det \|g\|], \quad (1.1.2)$$

где $\partial_0 \equiv \partial_t$, $\partial_1 \equiv \partial_r$, $\mu = 0, 1$, следствием уравнения (1.1.1) будет равенство

$$\left(\partial_t^2 - \partial_r^2 - \frac{1}{r} \partial_r \right) \ln[\det \|g\|] = 0.$$

Поэтому, если $\tilde{g}(r, t)$ – некоторое решение модели (1.1.1) с $\det \|\tilde{g}\| \neq 0$, то

$$g = \tilde{g} \det^{-1/2} \|\tilde{g}\| \quad (1.1.3)$$

также будет ее решением. Далее воспользуемся этим замечанием для построения решений модели (1.1.1) с $\det \|g\| = 1$.

Уравнение (1.1.1) совместимо с разными ограничениями на поле $g(r, t)$, которые редуцируют его к физически содержательным моделям теории магнетизма. Например, в рамках подхода Андреева – Волкова – Марченко – Желтухина модель (1.1.1) при $g^{-1} = g^+$, $\det \|g\| = 1$ ($g \in SU(2)$) описывает аксиально-симметричные волны намагниченности в неупорядоченном ферритмагнетике или недисипативном спиновом стекле [25]. Локальные повороты трех взаимно ортогональных векторов обменной структуры характеризуются матрицей $D \in SO(3)$ ($D^T D = I, \det \|D\| = 1$), которая определяется формулой

$$g^+ \sigma_p g = \sigma_k D_{kp}. \quad (1.1.4)$$

Здесь σ_i – матрицы Паули:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \sigma_k \sigma_j = \delta_{kj} I + i \varepsilon_{kjp} \sigma_p,$$

ε_{kjp} – абсолютно антисимметричный единичный тензор ($\varepsilon_{123} = 1$).

При $g^{-1} = g^+$, $\det \|g\| = 1$ матрица $(\partial_\mu g) g^+$ является бесследовой (см. формулу (1.1.2)) и потому допускает представление

$$\partial_\mu g g^+ = \frac{i}{2} \sigma_k \omega_{k,\mu}. \quad (1.1.5)$$

В терминах форм Картана $\omega_{k,\mu}$ уравнения киральной модели $SU(2)$ (1.1.1) принимают вид

$$\partial_t \omega_{k,0} - \left(\partial_r + \frac{1}{r} \right) \omega_{k,1} = 0. \quad (1.1.6)$$

Для того чтобы поле $g(r, t)$ можно было выразить через поля $(\partial_\mu g) g^+$ (или формы Картана), необходимо и достаточно выполнения условий интегрируемости:

$$\partial_0 \omega_{s,1} - \partial_1 \omega_{s,0} + \varepsilon_{snp} \omega_{n,0} \omega_{p,1} = 0. \quad (1.1.7)$$

Компоненты намагниченности среды дает формула [25]:

$$M_k = -\hbar \gamma D_{kn} \omega_{n,0}, \quad (1.1.8)$$

где \hbar – постоянная Планка, γ – магнитомеханическое отношение. Во всех соотношениях с помощью масштабных преобразований мы устранили лишние множители и перешли к безразмерным переменным. В них фазовая скорость линейных спин-волновых мод принята равной единице.

Киральная $SU(2)$ модель описывает пространственно локализованные возбуждения в спиновом стекле, если ограничится рассмотрением ее решений с нулевой намагниченностью (1.1.8) при $r \rightarrow \infty$. Решения той же модели с асимптотическим поведением $\mathbf{M} \rightarrow \text{const}$ при $r \rightarrow \infty$ соответствуют локализованным возбуждениям неупорядоченного ферромагнетика [25].

Другая интересная модель получается, когда поле $g(r, t)$ принимает значения в проективном пространстве RP^1 . В этом случае $g^{-1} = g$ и матрица g допускает представление

$$g = \sigma_k I_k,$$

где \mathbf{I} – вещественный вектор, удовлетворяющий условию $\mathbf{I}^2 = 1$. В результате (1.1.1) переходит в уравнение, описывающее аксиально-симметричные волны в изотропном антиферромагнетике:

$$\left[\mathbf{I} \times \left(\partial_t^2 - \partial_r^2 - \frac{1}{r} \partial_r \right) \mathbf{I} \right] = 0, \quad \mathbf{I}^2 = 1, \quad (1.1.9)$$

где \mathbf{I} – вектор антиферромагнетизма. Процедура перехода от уравнений Ландау – Лифшица для намагниченностей двух подрешеточно-го антиферромагнетика к модели (1.1.9) описана в [25, 27].

В настоящем разделе покажем, что модели (1.1.1), (1.1.9) являются интегрируемыми, и проанализируем некоторые из их солитонных состояний.

Как отмечалось в [25], комплексные масштабные преобразования не нарушают свойства интегрируемости моделей, хотя изменяют тип основных уравнений и, следовательно, характер их решений. Интересно и важно, что формальная замена

$$t \rightarrow z, \quad r \rightarrow ir, \quad \mathbf{I} \rightarrow \mathbf{S}$$

переводит уравнение (1.1.9) в уравнение Ландау – Лифшица:

$$\left[\mathbf{S} \times \left(\partial_z^2 + \partial_r^2 + \frac{1}{r} \partial_r \right) \mathbf{S} \right] = 0, \quad \mathbf{S}^2 = 1, \quad (1.1.10)$$

которое в обменном приближении описывает статические радиально-симметричные распределения намагниченности $\mathbf{S}(r, t)$ в гейзенберговском ферромагнетике. Как и ранее, ось Oz декартовой системы координат совмещена с осью симметрии распределения, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ – радиальная координата. Далее обсудим решения этого уравнения.

В заключение подраздела методом из работы [28] (см. также [25]) покажем, как двумерные модели (1.1.1), (1.1.9), (1.1.10) и необходимые для их интегрирования U - V -пары можно получить из следующей одномерной интегрируемой модели [29]:

$$\partial_t (\partial_t g g^{-1}) - \partial_r (\partial_r g g^{-1}) = 0. \quad (1.1.11)$$

Здесь $g(r, t)$ – двумерная матричная функция от переменных r, t ; r – пространственная координата вдоль направления распространения поля g ; t – время.

В теории магнетизма модели типа (1.1.11) интересны сами по себе. При ограничениях на поле $g(r, t)$, которые перечислены, они сводятся к уравнениям квазиодномерной динамики, либо неупорядоченного ферромагнетика, либо спинового стекла, либо изотропного антиферромагнетика [25]. После комплексных преобразований уравнение динамики антиферромагнетика в свою очередь переходит в уравнение Ландау – Лифшица для расчета двумерных статистических распределений намагниченности в ферро- и антиферромагнетиках, которое обсудим отдельно.

Одномерная нелинейная модель (1.1.11) эквивалентна условию совместности следующей линейной системы [25, 29]:

$$\begin{aligned} \partial_r \chi &= U\chi, & \partial_t \chi &= V\chi; \\ U &= \frac{1}{2}(\gamma \partial_t g g^{-1} + \delta \partial_r g g^{-1}), & V &= \frac{1}{2}(\delta \partial_t g g^{-1} + \gamma \partial_r g g^{-1}). \end{aligned} \quad (1.1.12)$$

В (1.1.12) не зависящие от переменных r, t коэффициенты γ и δ связаны алгебраическим соотношением

$$(\delta - 1)^2 - \gamma^2 = 1, \quad (1.1.13)$$

которое допускает униформизацию рациональными функциями параметра λ :

$$\delta = \frac{2}{1 - \lambda^2}, \quad \gamma = \frac{2\lambda}{1 - \lambda^2}.$$

Чтобы получить новые интегрируемые модели, будем считать, что, хотя коэффициенты γ и δ в представлении (1.1.12) связаны равенством (1.1.13), они не являются постоянными, а зависят от координат r, t . Тогда условие совместности системы (1.1.12) примет вид

$$\gamma \left[\partial_t (\partial_t g g^{-1}) - \partial_r (\partial_r g g^{-1}) \right] + (\partial_t \gamma - \partial_r \delta) \partial_t g g^{-1} + (\partial_t \delta - \partial_r \gamma) \partial_r g g^{-1} = 0.$$

Если функции γ и δ подчинить уравнениям

$$\partial_t \gamma - \partial_r \delta = \mu \gamma, \quad \partial_t \delta - \partial_r \gamma = \nu \gamma, \quad (1.1.14)$$

то получим

$$\partial_t(\partial_t g g^{-1}) - \partial_r(\partial_r g g^{-1}) + \mu(\partial_t g g^{-1}) + v(\partial_r g g^{-1}) = 0. \quad (1.1.15)$$

Разрешим связь (1.1.13), полагая

$$\delta - 1 = \text{ch } \varphi, \quad \gamma = \text{sh } \varphi. \quad (1.1.16)$$

Тогда система (1.1.14) определит эволюцию параметра φ :

$$\partial_r \varphi = \frac{1}{2} [\mu (\text{ch } 2\varphi - 1) - v \text{sh } 2\varphi], \quad \partial_t \varphi = \frac{1}{2} [\mu \text{sh } 2\varphi - v (\text{ch } 2\varphi - 1)]. \quad (1.1.17)$$

Функции $\mu(r, t)$ и $v(r, t)$ не могут быть произвольными. Условие интегрируемости системы (1.1.17) ($\partial_r \partial_t \varphi = \partial_t \partial_r \varphi$) приводит к уравнениям

$$\partial_r \mu + \partial_t v = 0, \quad \partial_r v + \partial_t \mu + \mu^2 - v^2 = 0,$$

которые имеют общее решение

$$\mu = \frac{\partial_\xi \alpha + \partial_\eta \beta}{\alpha + \beta}, \quad v = \frac{\partial_\eta \beta - \partial_\xi \alpha}{\alpha + \beta}. \quad (1.1.18)$$

Здесь $\alpha = \alpha(\xi)$ и $\beta = \beta(\eta)$ – произвольные функции от переменных $\xi = t + r$ и $\eta = t - r$ соответственно.

Учитывая явный вид μ и v в (1.1.18), из (1.1.17) находим движущийся спектральный параметр φ :

$$\varphi = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{u + \beta(\eta)}{u - \alpha(\xi)} \right). \quad (1.1.19)$$

Константа интегрирования u играет роль нового постоянного спектрального параметра. Коэффициенты γ и δ (1.1.16) нетрудно выразить через функцию

$$\text{th } \varphi / 2 = -2(\alpha + \beta)^{-1} [\alpha - \beta - u + \sqrt{(u + \beta)(u - \alpha)}].$$

В конечном счете мы получили целый класс новых интегрируемых уравнений (1.1.15), (1.1.18) вместе с U - V -парами для них (1.1.12), (1.1.16), (1.1.19). При $\alpha = \xi$, $\beta = -\eta$ этот класс включает интересующую нас универсальную модель (1.1.1). Для модели

(1.1.1) вспомогательная линейная система (1.1.12) содержит коэффициенты

$$\gamma = \frac{2\rho(u)r}{\rho^2 - r^2}, \quad \delta = \frac{2r^2}{r^2 - \rho(u)}. \quad (1.1.20)$$

Спектральный параметр u определен на двулистной римановой поверхности Γ функции $\rho(u) = t - u + \sqrt{(u-t)^2 - r^2}$, имеющей точки ветвления при $u = t + r$ и $u = t - r$.

Функция $\rho(u)$ удовлетворяет соотношениям

$$\rho^2 + r^2 = 2(t-u)\rho, \quad \rho^2 - r^2 = 2\rho\sqrt{(u-t)^2 - r^2}, \quad (1.1.21)$$

с помощью которых (1.1.20) можно переписать в форме

$$\gamma = \frac{r}{\sqrt{(u-t)^2 - r^2}}, \quad \delta = 1 + \frac{u-t}{\sqrt{(u-t)^2 - r^2}}, \quad (1.1.22)$$

удобной для проверки связей

$$\begin{aligned} (\delta - 1)^2 - \gamma^2 &= 1, & \partial_r \delta &= \partial_t \gamma = \frac{r(u-t)}{[(u-t)^2 - r^2]^{3/2}}, \\ \partial_t \delta &= \frac{r^2}{[(u-t)^2 - r^2]^{3/2}}, & \partial_r \gamma &= \frac{(u-t)^2}{[(u-t)^2 - r^2]^{3/2}} = \partial_t \delta + \frac{1}{r} \gamma. \end{aligned} \quad (1.1.23)$$

Следствием формул (1.1.20) – (1.1.23) оказываются полезные тождества

$$(\partial_t \pm \partial_r)(\gamma \mp \delta) \equiv (\partial_t \pm \partial_r) \left(\frac{2r}{\rho \mp r} \right) = \pm \left[\frac{1}{\rho - r} + \frac{1}{\rho + r} \right].$$

Пусть операция τ состоит в смене листов римановой поверхности, т. е. в изменении на противоположный знак перед квадратным корнем в выражении для $\rho(u)$:

$$\rho(\tau(u)) = t - u - \sqrt{(u-t)^2 - r^2} = r^2/\rho(u). \quad (1.1.24)$$

Бесконечно удаленную точку на верхнем листе римановой поверхности снабдим индексом «+», а сам лист фиксируем условием

$$\rho(u) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad u \rightarrow \infty^+. \quad (1.1.25)$$

Тогда в силу (1.1.24) на нижнем листе римановой поверхности

$$\rho(u) \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad u \rightarrow \infty^- \quad (1.1.26)$$

и, следовательно, $\gamma(u), \delta(u) \rightarrow 0$ при $u \rightarrow \infty^-$ (см. формулу (1.1.20)). Поэтому на решения линейной системы (1.1.12) можно наложить условие нормировки

$$\chi(u = \infty^-) = I. \quad (1.1.27)$$

Далее считаем, что при операции комплексного сопряжения функция $\rho(u)$ преобразуется по правилу

$$\rho^*(u^*) = \rho(u). \quad (1.1.28)$$

Чтобы для интегрирования модели (1.1.1) применить метод «одевания», нужно знать некоторое частное решение g_0 уравнений (1.1.1) и соответствующее решение χ_0 вспомогательной системы (1.1.12). Новые решения линейной системы (1.1.12) будем искать в виде:

$$\chi = \Psi \chi_0. \quad (1.1.29)$$

Те из них, что характеризуются функцией $\Psi(u)$, рациональной на римановой поверхности Γ , назовем солитонными. Название оправдывается тем, что рациональные на Γ функции $\Psi(u)$ приводят к новым решениям исходной нелинейной модели (1.1.1) со свойствами солитонов.

Построение солитонных состояний модели (1.1.1) сводится к алгебраическим вычислениям, различным для полей g , лежащих в разных пространствах ($g \in SU(2)$ или $g \in RP^1$).

1.1.2. Кольцевые волны намагниченности в неупорядоченных ферромагнетиках и спиновых стеклах

Опишем процедуру построения мультисолитонных решений модели (1.1.1) в случае $g \in SU(2)$. Непосредственно из представления (1.1.12) следует, что при $g^{-1} = g^+$ решения $\chi^+(u^*)$ и $\chi^{-1}(u)$

вспомогательной системы (1.1.12) можно выбрать совпадающими:

$$\chi^+(u^*) = \chi^{-1}(u), \quad (1.1.30)$$

а поле $g(r, t)$ – выразить через значение матричной функции $\chi(r, t, u)$:

$$g(r, t) = \chi(r, t, u = \infty^+).$$

В соответствии со сказанным ранее специальные унитарные решения модели (1.1.1) ($g^{-1} = g^+$, $\det \|g\| = 1$) определяем формулой

$$g(r, t) = \chi(r, t, u = \infty^+) \det^{-1/2} [\chi(r, t, u = \infty^+)]. \quad (1.1.31)$$

Пусть $g_0 \in SU(2)$ и χ_0 – затравочные решения уравнений (1.1.1), (1.1.12). Представим новое решение вспомогательной системы (1.1.12) в форме (1.1.29). Рациональная на римановой поверхности функция $\Psi(u)$ солитонных состояний должна удовлетворять ограничениям, которые следуют из (1.1.27) – (1.1.30):

$$\Psi(u)\Psi^+(u^*) = I, \quad \Psi(u = \infty^-) = I. \quad (1.1.32)$$

Построение такой функции аналогично решению задачи Римана с нулями в комплексной плоскости [25, 30]. Для полноты изложения напомним основные этапы расчетов и не будем останавливаться на деталях.

Пусть для определенности $\Psi(u)$ имеет конечное число N простых нулей, расположенных в точках $u = v_i$ римановой поверхности функции $\rho(u) = t - u + \sqrt{(u-t)^2 - r^2}$. В этих точках $\rho(v_i) = \mu_i$, $i = 1, 2, \dots, N$.

Существо унитарности матрицы $\Psi(u)$ обеспечивает выполнение ограничения $g^{-1} = g^+$ на решения модели (1.1.1). Кроме того, из первого уравнения (1.1.32) следует, что нули функции $\Psi(u)$ должны совпадать с полюсами $\Psi^+(u^*)$, а полюсы и нули функций $\Psi(u)$ и $\Psi^+(u^*)$ должны располагаться в тех точках \tilde{v}_i римановой поверхности Γ , где $\rho(\tilde{v}_i) = \mu_i^*$, $i = 1, 2, \dots, N$. Учитывая эти замечания, решение задачи (1.1.32) будем искать в виде

$$\Psi^+(u^*) = I + \sum_{j=1}^N \frac{R_j}{\rho(u) - \mu_j}, \quad \Psi(u) = I + \sum_{i=1}^N \frac{R_i^+}{\rho(u) - \mu_i^*}. \quad (1.1.33)$$

Требование отсутствия полюсов в левой части равенства $\Psi(u)\Psi^+(u^*) = I$ приводит к N независимым уравнениям:

$$R_i^+ \Psi^+(u^*)|_{u=\bar{v}_i} = 0, \quad (1.1.34)$$

которые имеют нетривиальное решение только для вырожденных матриц R_i . Запишем компоненты этих матриц в форме

$$(R_i)_{ab} = (m_i)_a (X_i)_b, \quad a, b = 1, 2.$$

Тогда уравнения (1.1.34) сведутся к системе

$$(m_i)_a^* + \sum_{j=1}^N A_{ij} (X_j)_a = 0, \quad (1.1.35)$$

где

$$A_{ij} = (\mathbf{m}_i^* \cdot \mathbf{m}_j) / (\mu_i^* - \mu_j), \quad \mathbf{m}_i = ((m_i)_1, (m_i)_2), \quad (\mathbf{m}_i^* \cdot \mathbf{m}_j) = \sum_{a=1,2} (m_i)_a^* (m_j)_a.$$

Из системы (1.1.35) нетрудно выразить двумерные векторы $\mathbf{X}_j = ((X_j)_1, (X_j)_2)$ через \mathbf{m}_i . В конечном счете получаем матричную функцию $\Psi(u)$, удовлетворяющую условиям (1.1.32):

$$[\Psi(u)]_{ab} = \delta_{ab} + \sum_{i,j=1}^N \frac{(m_i)_a (m_j)_b^*}{\rho(u) - \mu_j^*} (A^{-1})_{ij}. \quad (1.1.36)$$

Здесь A^{-1} – матрица, обратная по отношению к матрице с элементами A_{ij} :

$$(A^{-1})_{ij} = \partial \ln \det \|A\| / \partial A_{ji}.$$

В справедливости утверждения полезно убедиться прямой проверкой условий (1.1.32) с использованием тождества [25]:

$$\sum_{s,k=1}^N (A^{-1})_{ps} (\mathbf{m}_s^* \cdot \mathbf{m}_k) (A^{-1})_{kn} = (A^{-1})_{pn} \mu_n^* - \mu_p (A^{-1})_{pn}. \quad (1.1.37)$$

В отличие от задач с постоянным спектральным параметром и неподвижными нулями в данном случае нули солитонной функции $\Psi(u)$ зависят не только от постоянных комплексных параметров v_i , но и от координат r, t . Однако эта особенность не вызывает осложнений и преодолевается точно так же, как и ранее [25]. Напомним ключевые моменты, которые ведут к упрощению расчетов.

Уравнения (1.1.12) и представление (1.1.29) приводят к «одевающим» соотношениям

$$U = -\Psi(u)[\partial_r - U_0(u)]\Psi^+(u^*), \quad V = -\Psi(u)[\partial_t - V_0(u)]\Psi^+(u^*), \quad (1.1.38)$$

где U_0, V_0 – значения матриц U, V на затравочном решении g_0 . При записи (1.1.38) учли тождество

$$(\partial_\mu \Psi)\Psi^+ = -\Psi\partial_\mu \Psi^+, \quad (1.1.39)$$

получаемое дифференцированием первого уравнения (1.1.32). Левые части равенств (1.1.38) имеют полюсы на Γ только при $\rho(u) = \pm r$ (см. формулу (1.1.20)). В то же время после выполнения дифференцирований по r и t правые части формул (1.1.38) содержат с лишними полюсами в точках Γ , где $\rho(u) = \mu_i$ и $\rho(u) = \mu_i^*$ ($i = 1, 2, \dots, N$). Тщательный анализ показывает, что часть из них при учете тождеств (1.1.35), (1.1.39) образует равные нулю комбинации. Требование отсутствия оставшихся членов приводит к дифференциальным уравнениям на векторы \mathbf{m}_k ($k = 1, 2, \dots, N$):

$$\partial_r \mathbf{m}_k = U_0(v_k)\mathbf{m}_k, \quad \partial_t \mathbf{m}_k = V_0(v_k)\mathbf{m}_k,$$

которые легко интегрируются:

$$\mathbf{m}_k = \chi_0(v_k)\mathbf{c}_k. \quad (1.1.40)$$

Здесь \mathbf{c}_k – произвольные постоянные комплексные векторы.

На этом завершается процедура построения солитонных функций $\Psi(u)$. С учетом (1.1.29), (1.1.31) новые решения $SU(2)$ -модели (1.1.1) дает формула

$$g(r, t) = \Psi(r, t, u = \infty^+) g_0 \det^{-1/2}[\Psi(r, t, u = \infty^+)]. \quad (1.1.41)$$

Иногда построение мультисолитонных состояний удобнее проводить путем последовательного введения всех N солитонов один по одному, друг за другом. Из приведенных общих результатов легко получить функцию $\Psi^{(1)}$ первого шага рекуррентной процедуры:

$$\Psi^{(1)}(u) = I + \frac{\mu_1^* - \mu_1}{\rho(u) - \mu_1^*} P_1. \quad (1.1.42)$$

Здесь P_1 – проекционная матрица с элементами

$$(P_1)_{ab} = \frac{(m_1)_a (m_1)_b^*}{(\mathbf{m}_1^* \cdot \mathbf{m}_1)}$$

и свойствами

$$P_1^2 = P_1, \quad \text{Sp}P_1 = 1, \quad \det P_1 = 0. \quad (1.1.43)$$

Благодаря тождеству

$$\det \|I + F\| = 1 + \text{Sp}F + \det \|F\|,$$

справедливому для произвольной двумерной матрицы F , и свойствам (1.1.43) вычисление детерминанта матрицы $\Psi^{(1)}(u)$ не представляет труда:

$$\det \Psi^{(1)}(u) = \frac{\rho(u) - \mu_1}{\rho(u) - \mu_1^*}. \quad (1.1.44)$$

Нетрудно проверить, что в общем N -солитонном случае условиям (1.1.32) удовлетворяет функция

$$\Psi(u) = \prod_{i=1}^N \left(I + \frac{\mu_i^* - \mu_i}{\rho(u) - \mu_i^*} P_i \right). \quad (1.1.45)$$

Решение задачи Римана (1.1.32) единственно, поэтому формулы (1.1.36), (1.1.45) должны быть эквивалентны.

Представление солитонной функции $\Psi(u)$ в формуле (1.1.45) оказывается полезным для исследования некоторых вопросов, например вычисления детерминанта $\Psi(u)$:

$$\det \Psi(u) = \prod_{i=1}^N \frac{\rho(u) - \mu_i}{\rho(u) - \mu_i^*}, \quad (1.1.46)$$

или при анализе асимптотик мультисолитонных состояний [25]. В то же время при рекуррентном описании мультисолитонов зависимость матриц P_k от переменных r, t с ростом k становится крайне сложной, потому этот путь построения решений менее эффективен, чем описанный ранее.

Изложенным методом найдем и проанализируем простейшие радиально-симметричные солитоны $SU(2)$ -модели (1.1.1). Выберем в качестве затравочного решения уравнений (1.1.1)

$$g_0 = \exp[i\omega t \sigma_3 / 2],$$

где ω – постоянный вещественный параметр. При таком выборе g_0 решением вспомогательной системы (1.1.12) будет

$$\chi_0 = \exp\left\{\frac{i}{4}\omega(2t - \rho(u))\sigma_3\right\}.$$

По формулам (1.1.41), (1.1.42), (1.1.44) находим односолитонное решение $SU(2)$ -модели (1.1.1):

$$g = \left(I - \frac{\mu^* - \mu}{\mu^*} P\right) \sqrt{\frac{\mu^*}{\mu}} g_0. \quad (1.1.47)$$

Здесь $\mu = t - v + \sqrt{(v-t)^2 - r^2}$, $v = v' + iv''$, v' , v'' – вещественные параметры,

$$P = \frac{1}{2 \operatorname{ch} y} \begin{pmatrix} \exp(-y) & \exp(-i\varphi) \\ \exp(i\varphi) & \exp(y) \end{pmatrix}, \quad y = -\frac{\omega}{2} \operatorname{Im} \mu + \ln \left| \frac{c_2}{c_1} \right|,$$

$$\varphi = \frac{\omega}{2} \operatorname{Re} \mu - \omega t + \arg \frac{c_2}{c_1},$$

c_1, c_2 – произвольные комплексные числа. Нетрудно показать, что разные ветви функции $\sqrt{(v-t)^2 - r^2}$ приводят к эквивалентным решениям. При изменении переменных r, t выбранная ветвь квадратного корня продолжается по непрерывности. Далее для определенности считаем $v'' > 0$. При $v'' \neq 0$ подкоренное выражение функции $\sqrt{(v-t)^2 - r^2}$ не обращается в нуль при любых r, t ($r \geq 0$). Отсюда следует, что функция $\sqrt{(v-t)^2 - r^2}$ и решение (1.1.47) являются однозначными в r, t -пространстве.

При $\omega = 0$ решение (1.1.47) оказывается особенно простым. В этом случае проектор $P = \text{const}$. Поле $g(r, t)$ при $t < v'$ представляет собой алгебраическую уединенную волну с областью локализации в форме кольца, которое сужаясь движется к началу декартовой системы координат. В безразмерных переменных скорость кольца равна единице, а в исходных размерных переменных – совпадает с фазовой скоростью линейных спин-волновых мод.

На больших расстояниях вне кольца (при $r \rightarrow \infty$)

$$g \approx i(1 - 2P) = \text{const}. \quad (1.1.48)$$

Внутри кольца при $r = 0$ поле g изменяется со временем по закону

$$g = \left(I + \frac{v^* - v}{v - t} P \right) \sqrt{\frac{v - t}{v^* - t}}.$$

Если за центр кольцевой волны выбрать линию $r^2 = (v' - t)^2 - v''^2 \geq 0$, то на ней при $t = v' - v''$ кольцевая волна намагниченности достигает начала декартовой системы координат. После чего она отражается сама от себя и в форме расширяющегося кольца при $t > v' + v''$ начинает движение в обратном направлении с прежней скоростью. Вблизи начала координат при $t \sim v'$ поле g близко к своему асимптотическому значению (1.1.48) на пространственной бесконечности.

Когда $\omega \neq 0$, решение (1.1.47) описывает пару кольцевых волн. Первая из них движется с единичной скоростью и напоминает ту, что была при $\omega = 0$. Вторая волна пространственно локализована вблизи линии, определяемой условием $y = 0$ и представляющей собой окружность:

$$r_0^2 = \left(1 - \frac{v''^2}{a^2} \right) (v' - t)^2 + a^2 - v''^2, \quad a = v'' + \frac{2}{\omega} \ln \left| \frac{c_2}{c_1} \right|, \quad a^2 \geq v''^2. \quad (1.1.49)$$

Вторая кольцевая волна имеет меньшую скорость

$$V = \sqrt{1 - \frac{v''^2}{a^2}} < 1$$

и конечную толщину

$$\Delta r \sim (\partial_r y)^{-1} \Big|_{r=r_0} \sim \left| \frac{2(1-V^2)^{3/2}}{V\omega v''} (t-v') \right|,$$

которая линейно растет со временем. При удалении от линии (1.1.49) поле второй волны экспоненциально убывает. На самой линии (1.1.49) амплитуда поля g уменьшается со временем по закону

$$\left| \frac{\mu^* - \mu}{\mu^*} \right| \sim \frac{2v''}{\sqrt{1-V^2} |t-v'|}.$$

При $\omega > 0$ проектор P вне окружности (1.1.49) близок к значению

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В то время как внутри окружности

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

На больших расстояниях от оси симметрии амплитуда и толщина второй кольцевой волны медленно изменяются со временем так, что кольцевая волна подобна плоской волне в квазиодномерной $SU(2)$ -модели (1.1.11) [25, 29].

Распределение намагниченности, соответствующее солитону (1.1.47), обладает асимптотическим поведением:

$$\mathbf{M} \rightarrow -\hbar\gamma(0, 0, \omega) \text{ при } r \rightarrow \infty.$$

Поэтому можно сказать, что решения (1.1.47) с $\omega = 0$ описывают кольцевые волны намагниченности на фоне основного состояния спинового стекла. А решения (1.1.47) с $\omega \neq 0$ описывают кольцевые солитоны на фоне равновесного состояния неупорядоченного ферримагнетика. В системе из N кольцевых солитонов возможны только упругие парные столкновения между ними.

1.1.3. Аксиально-симметричные возмущения и структуры в изотропных ферро- и антиферромагнетиках

Уравнения динамики антиферромагнетика (1.1.9) эквивалентны условию совместности линейной системы:

$$\begin{aligned}\partial_r \chi &= -\frac{i}{2} \{ \gamma [\mathbf{I} \times \partial_t \mathbf{I}]_k + \delta [\mathbf{I} \times \partial_r \mathbf{I}]_k \} \sigma_k \chi, \\ \partial_t \chi &= -\frac{i}{2} \{ \delta [\mathbf{I} \times \partial_t \mathbf{I}]_k + \gamma [\mathbf{I} \times \partial_r \mathbf{I}]_k \} \sigma_k \chi.\end{aligned}\quad (1.1.50)$$

Представление (1.1.50) следует из (1.1.12) при $g = l_k \sigma_k$ ($\mathbf{I}^2 = 1$).

Решения системы (1.1.50) можно выбрать так, чтобы выполнялись ограничения

$$\chi^+(u^*) = \chi^{-1}(u), \quad \hat{l} \chi(u) = \chi[\tau(u)] J, \quad \chi(u = \infty^-) = I, \quad (1.1.51)$$

где $\hat{l} = l_k \sigma_k$, ($\hat{l}^2 = I$). Выбор постоянной матрицы J прояснится в ходе дальнейшего изложения. Два последних соотношения (1.1.51) дают формулу для расчета распределений вектора антиферромагнетизма:

$$\hat{l} \equiv l_k \sigma_k = \chi(u = \infty^+) J. \quad (1.1.52)$$

Каждый класс мультисолитонов получается «одеванием» некоторого частного решения \hat{l}_0 , χ_0 уравнений (1.1.9), (1.1.50). Выбор частного решения фиксирует значение матрицы J :

$$J = \chi_0^{-1}(u = \infty^+) \hat{l}_0. \quad (1.1.53)$$

Как и ранее, новую функцию $\chi(r, t, u)$ ищем в виде (1.1.29). В представлении (1.1.29) мероморфная на римановой поверхности Γ функция $\Psi(u)$ должна удовлетворять ограничениям, которые следуют из (1.1.51), (1.1.53):

$$\Psi^+(u^*) \Psi(u) = I, \quad \Psi(u = \infty^-) = I; \quad (1.1.54)$$

$$\Psi(\tau(u)) = \hat{l} \Psi(u) \hat{l}_0. \quad (1.1.55)$$

В терминах Ψ формула (1.1.52) для расчета \hat{l} приобретает вид

$$\hat{l} = \Psi(u = \infty^+) \hat{l}_0, \quad (1.1.56)$$

поэтому редукция (1.1.55) является нелинейной:

$$\Psi[u(\tau)] = \Psi(u = \infty^+) \hat{l}_0 \Psi(u) \hat{l}_0. \quad (1.1.57)$$

Для определенности предположим, что на Γ функция $\Psi(u)$ имеет конечное число простых нулей. Взаимосвязь нулей и полюсов функций $\Psi(u)$ и $\Psi^+(u)$ такая же, как в предыдущей задаче. В то же время, если $\Psi(u)$ имеет нуль в точке $u = v_i$, где $\rho(v_i) = \mu_i$, то в силу редукции (1.1.57) она должна иметь нуль также в точке $u = \tau(v_i) = \tilde{v}_i$, где $\rho(\tilde{v}_i) = r^2/\mu_i$. Поэтому отличие данной задачи от предыдущей в том, что число нулей (и полюсов) у функции $\Psi(u)$ всегда четное.

Непосредственной проверкой с использованием тождества (1.1.37) можно убедиться, что решение задачи Римана (1.1.54) с простыми нулями на Γ и нелинейной редукцией (1.1.57) имеет вид

$$\begin{aligned} [\Psi(u)]_{ab} &= \delta_{ab} + \sum_{i,j=1}^{2N} \frac{(m_i)_a (m_j)_b^*}{\rho(u) - \mu_j^*} (A^{-1})_{ij}, \\ a, b &= 1, 2; \det \Psi = \prod_{i=1}^{2N} \left(\frac{\rho(u) - \mu_i}{\rho(u) - \mu_i^*} \right), \end{aligned} \quad (1.1.58)$$

где A^{-1} – матрица $2N \times 2N$, обратная по отношению к матрице с элементами A_{ij} :

$$A_{ij} = \frac{(\mathbf{m}_i^* \cdot \mathbf{m}_j)}{\mu_i^* - \mu_j}, \quad (A^{-1})_{ij} = \frac{\partial \ln \det \|A\|}{\partial A_{ji}}.$$

Скалярное произведение двумерных векторов $\mathbf{m}_i = ((m_i)_1, (m_i)_2)$ определено также, как в предыдущей задаче. В отличие от нее на функции $\mu_i = \rho(v_i)$ и векторы \mathbf{m}_i ($i = 1, 2, \dots, 2N$) наложены дополнительные ограничения, чтобы обеспечить выполнение условия (1.1.57):

$$\mu_{\alpha+N} = r^2/\mu_\alpha, \quad \mathbf{m}_{\alpha+N} = \hat{l}_0 \mathbf{m}_\alpha \quad (\alpha = 1, 2, \dots, N).$$

Отсутствие лишних полюсов в «одевающих» соотношениях (1.1.38) будет выполнено, если

$$\mathbf{m}_\alpha = \chi_0(v_\alpha) \mathbf{c}_\alpha,$$

где \mathbf{c}_α – произвольные постоянные комплексные векторы.

Односолитонное состояние, полученное «одеванием» тривиального решения $\mathbf{I}_0 = (0, 0, 1)$, $\chi_0 = I$ уравнений (1.1.9), (1.1.50), описывается формулами

$$l_3 = 1 - \frac{1}{d}, \quad d = 2|\mu| \left\{ \frac{r^2 \operatorname{sh}^2 A}{(|\mu|^2 - r^2)^2} - \frac{\operatorname{ch}^2 A}{(\mu - \mu^*)^2} \right\},$$

$$l_+ \equiv l_1 + i l_2 = -\frac{\exp(iB)}{d} \left\{ \frac{\mu + \mu^*}{\mu - \mu^*} \operatorname{ch} A + \frac{|\mu|^2 + r^2}{|\mu|^2 - r^2} \operatorname{sh} A \right\}, \quad (1.1.59)$$

где $\mu = t - v + \sqrt{(v-t)^2 - r^2}$, $v = v' + iv''$, v' , v'' , A , B – произвольные постоянные вещественные параметры. Далее для определенности считаем $v'' > 0$. Решение (1.1.59) представляет собой уединенную алгебраическую волну, которая при $t < v'$ движется к началу системы координат и в последующем отражается от него. Волна подобна кольцу. Вне кольца и внутри него при $t < v'$ распределение вектора антиферромагнетизма близко к равновесному значению: $\mathbf{I} = (0, 0, 1)$. При $t \leq v' - v''$ за центр волны можно принять линию

$$r^2 = (v' - t)^2 - v''^2 \geq 0. \quad (1.1.60)$$

На ней

$$l_3 = 1 - \frac{2v''}{(v' - t) \operatorname{ch} 2A + v''},$$

$$l_+ = -\frac{2i \exp(iB) \sqrt{v''(v' - t)}}{(v' - t) \operatorname{ch} 2A + v''} (\operatorname{ch} A + i \operatorname{sh} A).$$

При $t \rightarrow -\infty$ кольцевая волна имеет большой радиус и напоминает плоскую волну линейной теории с малыми отклонениями \mathbf{I} от равновесного значения $\mathbf{I}_0 \approx (0, 0, 1)$. По мере сужения кольца на линии (1.1.60) отклонения поля \mathbf{I} от равновесного значения становятся ярко выраженными. Вблизи оси симметрии в течение промежутка времени $|t - v'| \leq v''$ кольцевая волна отражается сама от себя, перестраивая свою внутреннюю структуру. На самой оси (при $r = 0$)

в момент $t = v'$ компоненты поля достигают экстремальных значений:

$$l_3 = 1 - \frac{2}{\operatorname{ch}^2 A}, \quad l_+ = \frac{2 \exp(iB) \operatorname{sh} A}{\operatorname{ch}^2 A}.$$

При $t \geq v' + v''$ волна восстанавливает первоначальную форму и в виде расширяющегося кольца начинает движение в обратном направлении. В центре волны (на линии (1.1.60)) имеем

$$l_3 = 1 - \frac{2v''}{(t - v') \operatorname{ch} 2A + v''},$$

$$l_+ = -\frac{2i \exp(iB) \sqrt{v''(t - v')}}{(t - v') \operatorname{ch} 2A + v''} (\operatorname{ch} A - i \operatorname{sh} A).$$

Таким образом, единственным результатом отражения оказалось изменение фазы поля l_+ на величину $\Delta = 2\operatorname{arctg}(\operatorname{th} A)$. Энергия солитона (1.1.59) конечна [26].

При $A = 0$ решение (1.1.59) упрощается. Получаем

$$l_3 = \cos \theta, \quad l_+ = i \exp(iB) \sin \theta,$$

где угол $\theta = 2\operatorname{arctg}$ удовлетворяет линейному уравнению

$$(\partial_t^2 - \partial_r^2 - \frac{1}{r} \partial_r) \theta = 0.$$

Мультисолитонные состояния представляют собой нелинейные суперпозиции концентрических кольцевых солитонов.

В заключение кратко обсудим радиально-симметричные статические распределения намагниченности в изотропном ферромагнетике, которые описываются уравнением (1.1.10). Это уравнение вместе с $U-V$ -парой для него можно получить формальной заменой

$$t \rightarrow z, \quad t \rightarrow ir$$

в формулах (1.1.9), (1.1.50). Вспомогательная линейная система для трехмерной модели (1.1.9) имеет вид

$$\partial_r \chi = -\frac{i}{2} \left\{ -\gamma [\mathbf{S} \times \partial_z \mathbf{S}]_k + \delta [\mathbf{S} \times \partial_r \mathbf{S}]_k \right\} \sigma_k \chi,$$

$$\partial_z \chi = -\frac{i}{2} \left\{ \delta [\mathbf{S} \times \partial_z \mathbf{S}]_k + \gamma [\mathbf{S} \times \partial_r \mathbf{S}]_k \right\} \sigma_k \chi, \quad (1.1.61)$$

где

$$\gamma = \frac{2\rho r}{\rho^2 + r^2}, \quad \delta = \frac{2r^2}{\rho^2 + r^2}.$$

Постоянный спектральный параметр u определен на двулистной римановой поверхности Γ функции

$$\rho(u) = z - u + \sqrt{(u - z)^2 + r^2}.$$

Для дальнейшего анализа важно, что $\rho(u)$ обладает следующими трансформационными свойствами:

$$\rho^*(u^*) = \rho(u), \quad \rho[\tau(u)] = -r^2/\rho(u),$$

где операция τ осуществляет смену листов римановой поверхности Γ . Как и ранее, верхний лист фиксируем условием $\rho(u = \infty^+) = 0$, тогда на нижнем листе Γ имеем $\rho(u = \infty^-) = \infty$. При конкретных расчетах оказываются полезными формулы

$$\begin{aligned} \rho^2 - r^2 &= 2(z - u)\rho, & \rho^2 + r^2 &= 2\rho\sqrt{(u - z)^2 + r^2}, \\ \gamma &= \frac{r}{\sqrt{(u - z)^2 + r^2}}, & \delta - 1 &= \frac{u - z}{\sqrt{(u - z)^2 + r^2}}, & \gamma^2 + (\delta - 1)^2 &= 1, \\ \partial_z \gamma &= -\partial_r \delta = \frac{r(u - z)}{[(u - z)^2 + r^2]^{3/2}}, & \partial_r \gamma &= \frac{(u - z)^2}{[(u - z)^2 + r^2]^{3/2}}, \\ \partial_z \delta &= -\frac{r^2}{[(u - z)^2 + r^2]^{3/2}} = \partial_r \gamma - \frac{1}{r} \gamma. \end{aligned}$$

Пусть $S^{(0)}$, χ_0 – затравочное решение уравнений (1.1.10), (1.1.61). Новые «одетые» решения вычисляются из соотношений

$$\chi = \Psi \chi_0, \quad S_k \sigma_k = \Psi(u = \infty^+) \hat{S}^{(0)}, \quad (1.1.62)$$

где $\hat{S}_0 = S_k^{(0)} \sigma_k$. Для солитонных состояний матричная функция $\Psi(u)$ является решением задачи Римана с нулями и нелинейной редукцией на римановой поверхности Γ :

$$\Psi^+(u^*) \Psi(u) = I, \quad \Psi(u = \infty^-) = I,$$

$$\Psi(\tau(u)) = \Psi(u = \infty^+) \hat{S}^{(0)} \Psi(u) \hat{S}^{(0)}. \quad (1.1.63)$$

Функции $\Psi(u)$ с простыми нулями на Γ определяются выражениями, которые напоминают формулы антиферромагнетика:

$$[\Psi(u)]_{ab} = \delta_{ab} + \sum_{i,j=1}^{2N} \frac{(m_i)_a (m_j)_b^*}{\rho(u) - \mu_j^*} (A^{-1})_{ij}, \quad a, b = 1, 2;$$

$$(A^{-1})_{ki} = \frac{\partial \ln \det \|A\|}{\partial A_{ik}}, \quad A_{ik} = \frac{(\mathbf{m}_i^* \cdot \mathbf{m}_k)}{\mu_i^* - \mu_k}. \quad (1.1.64)$$

Здесь

$$\mu_{\alpha+N} = -r^2 / \mu_\alpha, \quad \mathbf{m}_{\alpha+N} = \hat{S}^{(0)} \mathbf{m}_\alpha,$$

$$\mathbf{m}_\alpha = \chi_0 (v_\alpha) \mathbf{c}_\alpha, \quad \mu_\alpha = z - v_\alpha + \sqrt{(v_\alpha - z)^2 + r^2}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, N,$$

v_α и \mathbf{c}_α – произвольные постоянные комплексные числа и векторы. Главная отличительная особенность этих решений связана с возникновением линий из точек ветвления у функций $\sqrt{(v_\alpha - z)^2 + r^2}$. Наличие ветвлений ведет к многозначности поля $\mathbf{S}(r, t)$ в (1.1.62). Чтобы получить однозначные решения, необходимо ввести разрезы в (x, y, z) -пространстве.

Поясним сказанное на примере односолитонного решения модели (1.1.10), которое получим «одеванием» тривиального решения $\mathbf{S}^{(0)} = (0, 0, 1)$, $\chi_0 = I$ уравнений (1.1.10), (1.1.61). Такому солитону соответствует распределение намагниченности:

$$S_1 + iS_2 = \frac{\exp iB}{d} \left[\frac{\mu + \mu^*}{\mu - \mu^*} \operatorname{ch} A + \frac{|\mu|^2 - r^2}{|\mu|^2 + r^2} \operatorname{sh} A \right], \quad S_3 = 1 + \frac{1}{d},$$

$$d = 2 |\mu|^2 \left[\frac{\operatorname{ch}^2 A}{(\mu - \mu^*)^2} + \frac{r^2 \operatorname{sh}^2 A}{(r^2 + |\mu|^2)^2} \right], \quad (1.1.65)$$

где $\mu = z - v + \sqrt{(v - z)^2 + r^2}$, $v = v' + iv''$, A, B, v', v'' – произвольные вещественные параметры; далее для определенности считаем $v'' > 0$.

В (x, y, z) -пространстве квадратный корень $\sqrt{(v-z)^2 + r^2}$ имеет линию из точек ветвления в форме окружности: $r \equiv \sqrt{x^2 + y^2} = v''$, $z = v'$. Чтобы решение (1.1.65) стало однозначным, в (x, y, z) -пространстве в плоскости $z = v'$ введем разрез в форме диска, граница которого совпадает с окружностью $\sqrt{x^2 + y^2} = v''$. Для определенности полагаем $\sqrt{(v-z)^2 + r^2} \rightarrow v-z$ при $z \rightarrow -\infty$. Поле \mathbf{S} (1.1.65) имеет скачок на диске:

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \mathbf{S}(r, z = v' + 0) - \mathbf{S}(r, z = v' - 0) = \\ &= 2(v''d)^{-1} \sqrt{v''^2 - r^2} \operatorname{sh} A(\cos B, \sin B, 0), \quad r \leq v'', \end{aligned} \quad (1.1.66)$$

и этот факт можно интерпретировать [26] как наличие у диска магнитного момента \mathbf{M} . При такой интерпретации распределение намагниченности (1.1.65) порождено инородной прослойкой в форме диска в ферромагнитной среде.

При выбранном «затравочном» решении магнитный момент включения лежит в плоскости диска. Нетрудно построить решения модели (1.1.10) с другими ориентациями вектора \mathbf{M} . Для этого достаточно заметить, что уравнение (1.1.10) инвариантно относительно вращений в спиновом пространстве. Поэтому, если $\mathbf{S}(r, z)$ – некоторое решение модели (1.1.10), то $D_0 \mathbf{S}(r, z)$, где D_0 – постоянная ортогональная матрица ($D_0^T D_0 = I$), также будет решением. За счет выбора матрицы D_0 из найденного нами решения (1.1.65) легко получить решения с любой наперед заданной ориентацией вектора \mathbf{M} .

Из-за наличия скачка поля \mathbf{S} на разрезе решение (1.1.65) минимизирует функционал полной энергии всей системы, который кроме обменной энергии среды учитывает энергию взаимодействия магнитного включения со средой [26]:

$$E = \frac{1}{2} \int_V d^3 \mathbf{r} (\partial_i \mathbf{S} \cdot \partial_i \mathbf{S}) + \int_\Sigma d\sigma (\mathbf{M} \cdot \mathbf{S}). \quad (1.1.67)$$

Интегрирование производится по объему V среды и поверхности Σ диска. Мультисолитонные структуры формируются N дисками, распределенными вдоль оси Oz .

Заметим, что модель (1.1.10) в одноконстантном приближении описывает также распределение поля директора в нематическом жидком кристалле [31]. В этом случае член $(\mathbf{M} \cdot \mathbf{S})$ в выражении для энергии (1.1.67) характеризует взаимодействие нематика с по-

верхностью тела в форме диска, помещенного внутрь жидкого кристалла.

В работах [26, 32–37] методами «одевания» и Дарбу построены более сложные решения уравнений (1.1.1), (1.1.9), (1.1.10) и близких к ним моделей. В частности, в [26] проанализированы кольцевые солитоны в гейзенберговском антиферромагнетике на фоне однородной прецессии поля $\mathbf{I}(r, t)$, а в [32–35] изучены статические и динамические кольцевые солитоны в ферромагнетике на фоне одномерной спиральной структуры, ось которой совпадает с осью симметрии солитонов. В этой связи заметим, что при учете только обменных взаимодействий геликоидальная закрутка спинов в безграничных ферромагнитных образцах энергетически не выгодна. В то же время она вполне возможна в ферромагнитной пластине при специальном закреплении спинов на ее поверхности.

1.2. ХАРАКТЕРНЫЕ СВОЙСТВА ДВУМЕРНЫХ ВИХРЕЙ В ФЕРРОМАГНЕТИКАХ

При всяком теоретическом исследовании какой-либо реальной физической системы... нужно учесть основные решающие факторы, определяющие те именно черты поведения системы, которые нас в данное время интересуют, и отнюдь не следует стремиться точно учесть все без исключения ее свойства.

А.А. Андронов

1.2.1. Теорема Деррика

Одной из важных теорем о существовании стационарных конфигураций с конечной энергией в моделях теории поля и физики конденсированных сред является теорема Хобарта – Деррика [38]. В этом пункте мы изложим ее применительно к анализу дву- и трехмерных локализованных распределений намагниченности $\mathbf{M}(\mathbf{r})$ ($M^2 = M_0^2 = \text{const}$) в ферромагнетике. Основная трудность расчета статических конфигураций в ферромагнетике связана с необходимостью учета дальнедействующих магнитостатических полей. Обсудим вначале эту проблему.

Намагниченность среды $\mathbf{M}(\mathbf{r})$ порождает магнитное поле $\mathbf{H}^{(m)}$, которое определяется уравнениями магнитостатики [39]:

$$\text{rot}\mathbf{H}^{(m)} = 0, \quad \text{div}\mathbf{H}^{(m)} = -4\pi\text{div}\mathbf{M}, \quad (1.2.1)$$

с условиями непрерывности на границе образца:

$$\left(\mathbf{H}_-^{(m)}\right)_\tau = \left(\mathbf{H}_+^{(m)}\right)_\tau, \quad \left(\mathbf{H}_-^{(m)} + 4\pi\mathbf{M}\right)_n = \left(\mathbf{H}_+^{(m)}\right)_n. \quad (1.2.2)$$

Здесь индексы «+» и «-» служат для обозначения полей вне кристалла и внутри него, а индексами n и τ обозначены нормальная и тангенциальная к поверхности раздела составляющие вектора. Общее решение этой задачи выражается через магнитостатический потенциал Ψ

$$\Psi = \int_{V_0} d^3\mathbf{x}' M_i(\mathbf{x}') \frac{\partial}{\partial x'_i} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|},$$

$$H_i^{(m)} = -\partial_i \Psi = -\frac{4\pi}{3} M_i(\mathbf{r}) + \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|>\rho} d^3\mathbf{r}' M_k(\mathbf{r}') \frac{\partial^2}{\partial x'_i \partial x'_k} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (1.2.3)$$

При малых $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$ следует учесть дискретный характер распределения магнитных атомов в области $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| < \rho$. Это сводится к замене в выражении для $\mathbf{H}^{(m)}$ первого слагаемого на $\beta_{ik} M_k(\mathbf{r})$, где постоянные β_{ik} учитывают микроструктуру среды в области $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| < \rho$. После чего исправленное магнитостатическое поле записывают в виде

$$\tilde{H}_i^{(m)} = H_i^{(m)} + \frac{4\pi}{3} M_i(\mathbf{r}) + \beta_{ik} M_k(\mathbf{r}).$$

Тогда магнитостатической энергией тела будет [39, 40]:

$$\tilde{W}^{(m)} = -\frac{1}{2} \int_{V_0} d^3\mathbf{r} \left(\mathbf{M} \cdot \tilde{\mathbf{H}}^{(m)} \right) = -\frac{1}{2} \int_{V_0} d^3\mathbf{r} \left(\mathbf{M} \cdot \tilde{\mathbf{H}}^{(m)} + \frac{4\pi}{3} \mathbf{M}^2 + \beta_{ik} M_i M_k \right), \quad (1.2.4)$$

где интегрирование ведется по объему V_0 образца. Поскольку $\mathbf{M}^2 = \text{const}$, второй член в (1.2.4) остается постоянным при варьировании энергии и может быть отброшен. Третье слагаемое зависит только от локального направления намагниченности, поэтому его обычно включают в выражение для энергии кристаллографической маг-

нитной анизотропии. После перечисленных преобразований выражение для магнитостатической энергии приобретает вид

$$W^{(m)} = -\frac{1}{2} \int_{V_0} d^3 \mathbf{r} (\mathbf{M} \cdot \mathbf{H}^{(m)}), \quad H_i^{(m)} = \int_{V_0} d^3 \mathbf{r}' M_k(\mathbf{r}') \frac{\partial^2}{\partial x_i' \partial x_k'} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (1.2.5)$$

где интегрирование производится по объему тела без ограничения на $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$. Используя уравнения магнитостатики и краевые условия (1.2.2), формулу (1.2.5) можно записать иначе [25, 39–41]:

$$W^{(m)} = \frac{1}{8\pi} \int_{V_0+V_1} d^3 \mathbf{r} (\mathbf{H}^{(m)})^2.$$

Здесь интегрирование осуществляется уже по всему пространству: по объему V_0 , занятому ферромагнетиком, и объему V_1 вне образца. Отсюда следует, что полная магнитостатическая энергия ферромагнетика положительна, если поле $\mathbf{H}^{(m)}$ не обращается в нуль. Последнее возможно только тогда, когда в объеме тела $\operatorname{div} \mathbf{M} = 0$, а на его поверхности $\mathbf{M}_n = 0$ (другими словами, при отсутствии объемных и поверхностных фиктивных магнитных зарядов). Магнитостатические взаимодействия способствуют формированию распределений намагниченности, в которых магнитостатические поля и магнитные заряды по возможности скомпенсированы. Это оказывается основной причиной образования доменных структур в ферромагнетиках. Поясним утверждение.

В ферромагнитном кристалле обменные силы стремятся ориентировать параллельно друг другу спины соседних магнитных атомов. Обменные взаимодействия являются короткодействующими, поэтому ведут к образованию распределений намагниченности, в том числе локализованных, с малыми углами между соседними спинами среды. Они не способны сформировать и упорядочить в пространстве неоднородные распределения намагниченности больших размеров. Для соседних спиновых моментов среды магнитостатические силы малы по сравнению с обменными. Однако они становятся определяющими для моментов, находящихся на больших расстояниях друг от друга. Тогда магнитостатические взаимодействия благоприятствуют возникновению неоднородных распределений намагниченности с такими магнитными зарядами, при которых магнитостатические поля частично компенсируют друг друга и замыкаются внутри образца. Силы кристаллографи-

ческой магнитной анизотропии оказывают предпочтение определенным направлениям намагниченности. Области, где намагниченность близка к предпочтительным направлениям, будут расширяться, а области, намагниченные в других направлениях, будут сокращаться. В конечном счете первые превратятся в почти однородно намагниченные домены, а вторые станут тонкими доменными стенками [40].

Согласно формуле (1.2.5), поля $\mathbf{H}^{(m)}$ и \mathbf{M} не всегда могут быть однородными одновременно. Они оказываются однородными только в образцах в виде эллипсоидов или их предельных случаев (шар, плоскопараллельная пластина, бесконечный цилиндр) [39–41]. При этом для создания однородного поля \mathbf{M} требуются, вообще говоря, как поперечные, так и продольные по отношению к намагниченности компоненты постоянного внешнего магнитного поля \mathbf{H} [40]. Поперечные составляющие необходимы для уравнивания сил анизотропии и размагничивающих полей $\mathbf{H}^{(m)}$, а продольные – для устойчивости однородного состояния среды. Внешнее магнитное поле вносит следующий вклад в энергию ферромагнетика:

$$W^{(\text{ext})} = - \int_{V_0} d^3\mathbf{r} (\mathbf{M} \cdot \mathbf{H}). \quad (1.2.6)$$

Иногда стабилизирующую роль внешнего поля играет большая кристаллографическая анизотропия среды. Ориентацию вектора $\mathbf{M} = \text{const}$ в однородном состоянии определяют алгебраические уравнения

$$\left[\mathbf{M} \times (\mathbf{H}^{(a)} + \mathbf{H}^{(m)} + \mathbf{H}) \right] = 0, \quad (1.2.7)$$

которые следуют из условия минимума плотности энергии ферромагнетика. При этом закрепление спинов на поверхности образца не должно противоречить уравнениям (1.2.7). Здесь $\mathbf{H}^{(a)} = -\partial w^{(a)}/\partial \mathbf{M}$ – поле анизотропии, $w^{(a)}(\mathbf{M})$ – плотность энергии анизотропии, \mathbf{H} и $\mathbf{H}^{(m)}$ – постоянные внешнее и магнитостатическое поля. Согласно (1.2.5), при условии $\mathbf{M} = \text{const}$ поле $\mathbf{H}^{(m)}$ внутри ферромагнетика, выражается через тензор \hat{N} размагничивающих коэффициентов [39, 41]:

$$\mathbf{H}^{(m)} = -4\pi \hat{N} \mathbf{M}, \quad N_{ik}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} \int_{V_0} d^3\mathbf{r}' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (1.2.8)$$

Размагничивающие коэффициенты в общем случае являются функциями от пространственных координат \mathbf{r} и обладают свойством $\sum_{i=1}^3 N_{ii} = 1$. Они оказываются постоянными только для образцов в форме произвольного эллипсоида и его предельных случаев. Еще раз подчеркнем, что только в таких образцах магнитостатическое поле (1.2.8) будет постоянным. Важно, что размагничивающие коэффициенты зависят от формы, но не от размеров тела. Например, когда тело имеет форму шара, $\hat{N} = \text{diag}(1/3, 1/3, 1/3)$. Если тело имеет форму бесконечного кругового цилиндра, ось которого совпадает с осью Ox_3 , то $\hat{N} = \text{diag}(1/2, 1/2, 0)$.

Аргументы Деррика основаны на анализе энергии безграничной среды с однородным основным состоянием. При магнитостатических взаимодействиях однородное намагничивание существует только в ферромагнитных образцах определенной формы. Однако, если задаться вопросом о существовании дву- или трехмерных распределений намагниченности с масштабами локализации, малыми по сравнению с размерами образца, и магнитостатическими полями, замкнутыми в толще образца, то образец можно считать бесконечным. Реально это эллипсоид (шар или цилиндр) больших размеров, форма которого должна быть принята во внимание при определении поля $\mathbf{H}^{(m)}$ [40]. При расчете $\mathbf{H}^{(m)}$ можно не учитывать граничные условия, поскольку при больших размерах образца поверхностной энергией ферромагнетика можно пренебречь в отличие от его объемной энергии. Под энергией локализованного распределения намагниченности будем понимать разность между энергией среды при наличии в ней локализованного возбуждения и энергией ее однородного основного состояния.

С учетом этих замечаний рассмотрим достаточно общее выражение для энергии $E\{\mathbf{M}(\mathbf{r})\}$ дву- и трехмерных распределений намагниченности $\mathbf{M}(\mathbf{r})$ в неограниченной ферромагнитной среде:

$$E\{\mathbf{M}(\mathbf{r})\} = E_0 + E_1 + E_2 + E_4 + E_{ms}. \quad (1.2.9)$$

Величины $E_0, E_1, E_2, E_4, E_{ms}$ записываются в виде

$$E_0 = \int g(\mathbf{M}(\mathbf{r})) d^D \mathbf{r}; \quad (1.2.10)$$

$$E_1 = \int G_{a,i}(\mathbf{M}(\mathbf{r})) \partial_i M_a d^D \mathbf{r}; \quad (1.2.11)$$

$$E_2 = \int G_{ab,ij}(\mathbf{M}(\mathbf{r})) \partial_i M_a \partial_j M_b d^D \mathbf{r}; \quad (1.2.12)$$

$$E_4 = \int \left[G_{abcd,ijkl}(\mathbf{M}(\mathbf{r})) \partial_i M_a \partial_j M_b \partial_k M_c \partial_l M_d + G_{ab,ijkl}(\mathbf{M}(\mathbf{r})) \partial_i \partial_j M_a \partial_k \partial_l M_b \right] d^D \mathbf{r}. \quad (1.2.13)$$

Существование двумерных локализованных распределений намагниченности на однородном фоне ($D=2$) возможно в образцах в форме бесконечных круговых цилиндров с образующей, параллельной оси Ox_3 . Тогда поле $\mathbf{M}(\mathbf{r})$ зависит только от двух координат $x_1 \equiv x, x_2 \equiv y$. В этом случае в формулах (1.2.10) – (1.2.13) интегрирования осуществляются по площади V_0 поперечного сечения цилиндра. Трехмерные локализованные возбуждения на фоне однородной намагниченности ($D=3$) можно ожидать в образцах в виде произвольных эллипсоидов. Тогда все интегрирования в выражениях (1.2.10) – (1.2.13) производятся по объему V_0 эллипсоида. Дальнейший анализ локализованных конфигураций в безграничном ферромагнетике справедлив, когда энергии (1.2.10) – (1.2.13) остаются конечными в пределе $V_0 \rightarrow \infty$. Поясним физический смысл отдельных слагаемых.

Выражение (1.2.10) объединяет энергию кристаллографической магнитной анизотропии произвольного вида и энергию ферромагнетика во внешнем магнитном поле. Предполагается, что среда имеет однородное основное состояние $\mathbf{M}_0 = \text{const}$. Ориентация вектора \mathbf{M}_0 определяется из условия минимума плотности энергии однородно намагниченной среды, которая представляет собой сумму плотностей энергии анизотропии, зеемановской и магнитостатической энергии. Другие виды энергии не дают вклада в плотность энергии среды, поскольку зависят от градиентов поля $\mathbf{M}_0 = \text{const}$. Уровень отсчета энергии выберем так, чтобы выполнилось условие $g(\mathbf{M}_0) = 0$. В дальнейшем анализе предполагаем, что $E_0 > 0$ для распределений намагниченности $\mathbf{M}(\mathbf{r})$, отличающихся от $\mathbf{M}_0 = \text{const}$. Поясним правомерность последнего утверждения на примере. Рассмотрим «легкоосный» ферромагнетик с квадратичной по намагниченности анизотропией. Пусть ось анизотропии и внешнее магнитное поле направлены вдоль оси Ox_3 , которая совпадает с выделенной осью образца в форме эллипсоида вращения. Тогда плотность энергии ферромагнетика запишем в виде

$$-\frac{\beta}{2} M_3^2 - H M_3 + 2\pi(N_3 - N_1) M_3^2 + \text{const}, \quad (1.2.14)$$

где $\beta, H, N_{1,3} > 0$ – константа магнитной анизотропии, внешнее поле и компоненты тензора $\widehat{N} = \text{diag}(N_1, N_1, N_3)$ соответственно. При условии $\beta + 4\pi(N_1 - N_3) > 0$ минимуму энергии (1.2.14) отвечает однородное распределение намагниченности: $\mathbf{M}_0 = M_0(0, 0, 1)$. Функционалом E_0 с требуемыми свойствами будет

$$E_0 = \int d^D \mathbf{r} \left\{ \frac{\beta}{2} (M_0^2 - M_3^2) + H (M_0 - M_3) \right\} > 0, \quad \mathbf{M}(\mathbf{r}) \neq \mathbf{M}_0. \quad (1.2.15)$$

Выражение (1.2.11) имеет смысл обменно-релятивистской энергии в кристаллах без центра инверсии, которая приводит к геликоидальному упорядочению спинов [42–44]. Величина E_1 может иметь любой знак.

Функционалы (1.2.12) и (1.2.13) отличаются суммарными степенями производных от компонент поля $\mathbf{M}(\mathbf{r})$. Они описывают обменную и спин-орбитальную энергии среды. Обменная энергия по определению инвариантна относительно одновременного поворота всех спинов среды на произвольный угол (для обменных взаимодействий $G_{ab,ij} \sim \delta_{ab}\alpha_{ij}$). В ферромагнетике с анизотропией типа «легкая ось» обменная энергия

$$E_2 = \frac{1}{2} \int \alpha_{ij} (\partial_i \mathbf{M} \cdot \partial_j \mathbf{M}) d^D \mathbf{r}, \quad (1.2.16)$$

где $\alpha_{ij} = \text{diag}(\alpha_1, \alpha_1, \alpha_3)$, $\alpha_{1,3} > 0$ – обменные постоянные. Слагаемые типа E_4 возникают, например, при разложении выражения для обменной энергии дискретной спиновой системы по пространственным производным поля $\mathbf{M}(\mathbf{r})$, когда учтены взаимодействия первых и вторых ближайших соседей и биквадратичный обмен [45]:

$$E_4 = \int d^D \mathbf{r} \left[\tilde{\alpha}_1 (\Delta \mathbf{M})^2 + \tilde{\alpha}_2 (\partial_i M_j \partial_i M_j)^2 \right], \quad (1.2.17)$$

где $\tilde{\alpha}_{1,2} > 0$ – обменные постоянные. Далее предполагаем, что, как и в приведенных примерах, величины $E_2, E_4 > 0$, если $\mathbf{M}(\mathbf{r}) \neq \mathbf{M}_0 = \text{const}$.

Магнитостатическую энергию для рассматриваемых состояний запишем в виде

$$E_{\text{ms}} = 2\pi \int d^D \mathbf{r} \left\{ M_i(\mathbf{r}) \int M_j(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial x'_i} \frac{\partial}{\partial x'_j} G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) d^D \mathbf{r}' - \right.$$

$$-M_{0i}M_{0j} \frac{\partial}{\partial x'_i} \frac{\partial}{\partial x'_j} \int G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) d^D \mathbf{r}' \Big\}, \quad (1.2.18)$$

где $G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$ – функция Грина дву- или трехмерного уравнения Лапласа:

$$G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) = \frac{1}{2\pi} \ln|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \quad (D = 2); \quad G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) = -\frac{1}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad D = 3.$$

Второе слагаемое в выражении (1.2.18) соответствует магнито-статической энергии однородного состояния внутри образца:

$$2\pi M_{0i}M_{0j} \int_{V_0} d^D \mathbf{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial x'_i} \frac{\partial}{\partial x'_j} \int_{V_0} G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) d^D \mathbf{r}' \right\} = 2\pi M_{0i}M_{0j} N_{ij} V_0, \quad (1.2.19)$$

$$M_{0i}M_{0j} N_{ij} > 0.$$

Хотя энергия (1.2.19) положительна и расходится в пределе $V_0 \rightarrow \infty$, величина E_{ms} конечна и скорее отрицательна, чем положительна. Осторожная формулировка приведена потому, что нам неизвестно доказательство соотношения $E_{\text{ms}} < 0$. В то же время мы покажем, что существование цилиндрических магнитных доменов совместимо с аргументами Деррика только при условии $E_{\text{ms}} < 0$.

Пусть $\mathbf{M}(\mathbf{r})$ локализованное решение уравнений Лагранжа – Эйлера, которые следуют из необходимого условия минимума энергии (1.2.9): $\delta E = 0$ (вариации $\mathbf{M}(\mathbf{r})$ должны сохранять ограничение $\mathbf{M}^2 = M_0^2 = \text{const}$ и асимптотическое поведение $\mathbf{M}(\mathbf{r}) \rightarrow \mathbf{M}_0 = \text{const}$ при $|\mathbf{r}| \rightarrow \infty$). Условие положительной определенности второй вариации энергии: $\delta^2 E > 0$ (при $\mathbf{M}(\mathbf{r}) \neq \mathbf{M}_0$) обеспечит локальную устойчивость, а значит, по крайней мере, метастабильность таких состояний. Следуя аргументам Деррика, рассмотрим простую вариацию поля $\mathbf{M}(\mathbf{r}) \rightarrow \mathbf{M}(\lambda \mathbf{r})$ с положительным параметром λ , полученную масштабным преобразованием экстремали $\mathbf{M}(\mathbf{r})$. Тогда выражение для энергии преобразуется к виду $E_\lambda = E\{\mathbf{M}(\lambda \mathbf{r})\}$. Поскольку преобразование $\mathbf{M}(\mathbf{r}) \rightarrow \mathbf{M}(\lambda \mathbf{r})$ является допустимой вариацией полей со стационарной точкой $\lambda = 1$, то для любого устойчивого решения уравнений Лагранжа – Эйлера должны выполняться соотношения

$$\left. \frac{d}{d\lambda} E_\lambda \right|_{\lambda=1} = 0, \quad \left. \frac{d^2}{d\lambda^2} E_\lambda \right|_{\lambda=1} \geq 0.$$

После подстановки $\mathbf{M}(\mathbf{r}) \rightarrow \mathbf{M}(\lambda\mathbf{r})$ и замены переменных $\lambda\mathbf{r} \rightarrow \boldsymbol{\rho}$ получаем выражение для энергии E_λ в виде полинома по параметру λ :

$$E_\lambda = \lambda^{4-D} E_4 + \lambda^{2-D} E_2 + \lambda^{1-D} E_1 + \lambda^{-D} (E_0 + E_{ms}). \quad (1.2.20)$$

Отсюда находим

$$\left. \frac{d}{d\lambda} E_\lambda \right|_{\lambda=1} = (4-D)E_4 + (2-D)E_2 + (1-D)E_1 - D(E_0 + E_{ms}) = 0; \quad (1.2.21)$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^2}{d\lambda^2} E_\lambda \right|_{\lambda=1} &= (4-D)(3-D)E_4 + (2-D)(1-D)E_2 - \\ &- (1-D)DE_1 + D(D+1)(E_0 + E_{ms}) \geq 0. \end{aligned} \quad (1.2.22)$$

Для локализованных состояний, когда каждое из слагаемых в выражении (1.2.20) для энергии ограничено, эти соотношения дают необходимые условия существования устойчивых статических решений и составляют суть теоремы Деррика. Равенство (1.2.21) носит название теоремы вириала.

Трехмерные структуры с конечной энергией в ферромагнетиках обсуждаются в главе 6. В этом разделе ограничимся анализом двумерных конфигураций, для которых условия (1.2.21), (1.2.22) принимают вид

$$2E_4 - E_1 - 2(E_0 + E_{ms}) = 0, \quad 2E_4 + 2E_1 + 6(E_0 + E_{ms}) \geq 0. \quad (1.2.23)$$

Здесь $E_0, E_2, E_4 > 0$, а энергия E_1 может быть как положительной, так и отрицательной. Отсюда сразу следует, что при $E_4 \neq 0$ нет запрета на существование локализованных структур с конечной энергией как в соизмеримых ($E_1 = 0$), так и в несоизмеримых магнетиках ($E_1 \neq 0$).

Обсудим ферромагнетики с $E_4 = 0$. Примечательной особенностью ограничений (1.2.23) оказывается невозможность существования двумерных локализованных магнитных конфигураций в соизмеримых ферромагнетиках (при $E_1 = 0$) во внешнем магнитном поле с любой анизотропией и обменным взаимодействием без учета магнитоэлектростатических полей. В этом случае первое соотношение (1.2.23) сводится к равенству $E_0 = 0$, которое, ввиду условия $E_0 > 0$ при $\mathbf{M}(\mathbf{r}) \neq \mathbf{M}_0 = \text{const}$, исключает нетривиальные состояния с конечной энергией. Такие состояния возможны только при учете магнитоэлектростатической энергии. При $E_0, E_2 > 0, E_1, E_4 = 0$ условие $E_0 + E_{ms} = 0$

выполняется для цилиндрических магнитных доменов благодаря неравенству $E_{ms} < 0$.

Наконец, как впервые замечено в [46–49], двумерные локализованные структуры могут существовать в несоизмеримых магнетиках даже без учета магнитостатических взаимодействий. Дело в том что соотношения

$$E_1 + 2E_0 = 0, \quad 2E_1 + 6E_0 \geq 0$$

удовлетворяются, когда $E_1 < 0$. Таким образом, взаимодействия, линейные по первым производным (инварианты Лифшица, взаимодействие Дзялошинского – Мория), могут стабилизировать локализованные распределения намагниченности.

В заключение пункта подчеркнем, что теорема Хобарта – Деррика указывает только необходимые условия существования локализованных магнитных конфигураций. Окончательный ответ дают лишь численные или аналитические методы решений уравнений Ландау – Лифшица.

1.2.2. Скинмионы, или вихри Белавина – Полякова

Строго двумерные статические магнитные вихри с конечной энергией могут существовать в ферромагнетике при учете только основных обменных взаимодействий. В этом разделе мы получим для них явные аналитические выражения. Посредством масштабных преобразований устраним несущественные для дальнейшего анализа параметры: номинальную намагниченность среды $M_0 = \text{const}$, магнитомеханическое отношение и постоянную обменного взаимодействия [25]. Состояние ферромагнетика опишем нормированным вектором ферромагнетизма $\mathbf{n}(\mathbf{r}, t)$, связанным с намагниченностью простым соотношением $\mathbf{M}(\mathbf{r}, t) = M_0 \mathbf{n}(\mathbf{r}, t)$. В терминах $\mathbf{n}(\mathbf{r}, t)$ уравнение Ландау – Лифшица имеет вид

$$\partial_t \mathbf{n} = [\mathbf{n} \times \mathbf{F}], \quad \mathbf{n}^2 = 1. \quad (1.2.24)$$

Эффективное поле $\mathbf{F} = -\delta W / \delta \mathbf{n}$ выражается через полную энергию W ферромагнетика. В обменном приближении в безразмерных переменных

$$W = \frac{1}{2} \int (\partial_\mu \mathbf{n} \cdot \partial_\mu \mathbf{n}) d^2 \mathbf{r},$$

поэтому $\mathbf{F} = \Delta \mathbf{n}$, где $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$ ($x = x_1, y = x_2$). Для дальнейшего анализа удобнее считать, что индексы, обозначенные буквами греческого алфавита, принимают значения 1, 2, а обозначенные буквами латинского алфавита – значения 1, 2, 3. По любым дважды встречающимся индексам подразумевается суммирование. В рассматриваемом случае вириальное соотношение (1.2.21) сводится к равенству $(D - 2)E_2 = 0$, которое для двумерных конфигураций ($D = 2$) удовлетворяется тождественно. Хотя модель (1.2.21) не слишком реалистична, ее обсуждение [50] полезно для понимания специфики магнитных возбуждений и структур в квазидвумерных магнетиках.

Более наглядная форма записи уравнения (1.2.24) получится, если разрешить связь $\mathbf{n}^2 = 1$ с помощью сферических углов Θ, Φ или комплексного поля v :

$$n_1 + in_2 = \sin \Theta \exp i\Phi = \frac{2v}{1 + |v|^2}, \quad n_3 = \cos \Theta = \frac{1 - |v|^2}{1 + |v|^2}. \quad (1.2.25)$$

В терминах поля v уравнение (1.2.24) приобретает вид

$$i\partial_t v + \Delta v = \frac{2v^* (\nabla v \cdot \nabla v)}{1 + |v|^2}. \quad (1.2.26)$$

Для анализа двумерных решений $v = v(x_1, x_2, t)$ полезно переписать уравнение (1.2.26) в комплексных координатах $z = x_1 + ix_2$ и $\bar{z} = x_1 - ix_2$:

$$\frac{i}{4} \partial_t v + \partial_z \partial_{\bar{z}} v = \frac{2v^* \partial_z v \partial_{\bar{z}} v}{1 + |v|^2}. \quad (1.2.27)$$

Не все решения уравнения (1.2.27) обладают конечной энергией, которая вычисляется по формуле

$$W = 4 \int d^2 \mathbf{r} \frac{|\partial_z v|^2 + |\partial_{\bar{z}} v|^2}{(1 + |v|^2)^2}. \quad (1.2.28)$$

С целью выделить и классифицировать двумерные магнитные структуры с конечной энергией напомним важное топологическое понятие – *степень отображения*. Нас интересуют двумерные статичес-

кие решения уравнения (1.2.27) с однородной асимптотикой на пространственной бесконечности

$$\mathbf{n} \rightarrow \mathbf{n}_0 = (0, 0, 1) \quad (1.2.29a)$$

или

$$v \rightarrow 0 \text{ при } |z| \rightarrow \infty. \quad (1.2.29b)$$

Двумерная (x_1, x_2) -плоскость вместе с бесконечно удаленной точкой $|z| = \infty$ (расширенная плоскость) топологически эквивалентна двумерной сфере S^2 . В топологии для сферы в $(k + 1)$ -мерном пространстве принято обозначение S^k . Индекс k совпадает с числом параметров, задающих положение точки на сфере. Поле $\mathbf{n}(x_1, x_2)$ осуществляет отображение: $S^2 \rightarrow S^2$ расширенной плоскости на сферу $\mathbf{n}^2 = 1$, которая также двумерная. Когда координаты (x_1, x_2) пробегают плоскость, вектор \mathbf{n} покрывает сферу $\mathbf{n}^2 = 1$ целое число $|Q|$ раз. Степень отображения, или топологический заряд Q вычисляется по формуле [51]:

$$Q = \frac{1}{4\pi} \int q d^2\mathbf{r}, \quad q = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu} \left(\left[\partial_\nu \mathbf{n} \times \partial_\mu \mathbf{n} \right] \cdot \mathbf{n} \right), \quad (1.2.30)$$

где $\varepsilon_{\mu\nu}$ — двумерный антисимметричный тензор ($\varepsilon_{12} = 1$). В формуле (1.2.30) $Q = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, так как в противном случае отображение будет разрывным.

Если функция $\mathbf{n}(x_1, x_2)$ отображает плоскость (x_1, x_2) не на всю сферу $\mathbf{n}^2 = 1$, то область значений поля $\mathbf{n}(x_1, x_2)$ ограничена на сфере некоторым замкнутым контуром, который либо переходит через точку $\mathbf{n}_0 = (0, 0, 1)$, либо охватывает ее. В обоих случаях непрерывной деформацией этот контур может быть стянут в точку \mathbf{n}_0 . При таком отображении топологический заряд $Q = 0$, поскольку область значений поля $\mathbf{n}(x_1, x_2)$ на сфере $\mathbf{n}^2 = 1$ при вычислении интеграла (1.2.30) обязательно проходится дважды, а вклады в интеграл от обходов равны по абсолютной величине и различаются знаком.

Характерная особенность распределений намагниченности с $Q = 0$ состоит в том, что непрерывной деформацией поля $\mathbf{n}(x_1, x_2)$ их можно преобразовать в однородное распределение (1.2.29a). Напротив, отображения с $Q \neq 0$ отвечают распределениям намагниченности, которые непрерывным изменением функции $\mathbf{n}(x_1, x_2)$ невозможно свести к равновесному состоянию (1.2.29a).

Магнитные возмущения и структуры, которые непрерывной деформацией поля $\mathbf{n}(\mathbf{r}, t)$ нельзя свести в основное состояние, назы-

вают *топологическими*. В терминах углов Θ , Φ и комплексного поля v плотность топологического заряда q имеет вид

$$q = 4 \frac{|v_{\bar{z}}|^2 - |v_z|^2}{(1 + |v|^2)^2} = \varepsilon_{\mu\nu} \sin \Theta \partial_\nu \Theta \partial_\mu \Phi. \quad (1.2.31)$$

Простое сравнение формул (1.2.30), (1.2.31) приводит к неравенству

$$W \geq 4\pi|Q|.$$

Отсюда следует, что статические конфигурации, для которых v – произвольная функция только от z или от \bar{z} , имеют минимальную энергию

$$W = 4\pi|Q|.$$

Это эквивалентно утверждению, что распределение намагниченности $\mathbf{n}(x_1, x_2)$ удовлетворяет одному из уравнений дуальности Белавина – Полякова [52]:

$$\partial_\mu n_i = \pm \varepsilon_{\mu\nu} \varepsilon_{ijk} n_j \partial_\nu n_k, \quad (1.2.32)$$

где ε_{ijk} – абсолютно антисимметричный единичный тензор ($\varepsilon_{123} = 1$).

Непротиворечивые двумерные магнитные структуры с конечной энергией получаются при таком выборе функций v , который приводит к полям $\mathbf{n}(x_1, x_2)$ без ветвлений с целыми значениями степени покрытия Q . Это возможно тогда и только тогда, когда v – рациональные функции только от z или \bar{z} [52]. При условии (1.2.29б) они должны стремиться к нулю при $|z| \rightarrow \infty$. Если равновесное значение \mathbf{n} на бесконечности отличается от (1.2.29а), выбор функций $v(z)$ или $v(\bar{z})$ изменится. Например, чтобы удовлетворить условию

$$\mathbf{n} \rightarrow (0, 0, -1) \text{ при } |z| \rightarrow \infty,$$

в качестве $v(z)$ (или $v(\bar{z})$) следует взять рациональные функции, стремящиеся к бесконечности при $|z| \rightarrow \infty$ (см. формулу (1.2.25)).

Магнитные вихри Белавина – Полякова оказали существенное влияние на развитие теории многомерных солитонов. Часто их называют также *инстантонами* или *скирмионами*. В качестве примера рассмотрим три возможные решения:

$$v(z) = a/z, \quad v(\bar{z}) = a^*/\bar{z}, \quad v(\bar{z}) = (a^*/\bar{z})^2, \quad (1.2.33)$$

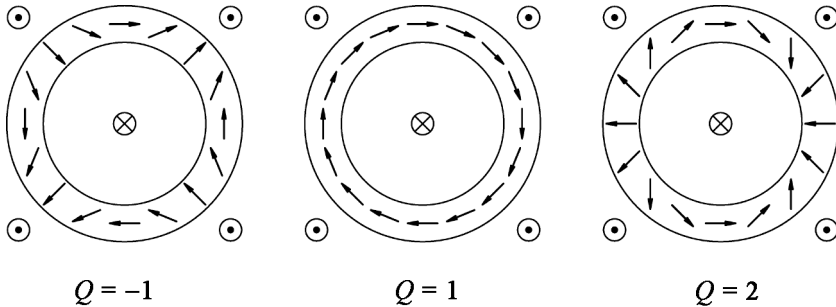


Рис. 1.4. Схематическое изображение вихрей со степенями покрытия $Q = \mp 1, 2$

соответствующие числам $Q = -1, 1, 2$. Здесь a – произвольная комплексная постоянная, отражающая масштабную инвариантность статического уравнения Ландау – Лифшица. Конфигурации (1.2.33) схематически изображены на рис. 1.4. Вектор \mathbf{n} показан только на окружности $|z| = |a|$, где его третья компонента $n_3 = 0$, и в точке $z = 0$, где $\mathbf{n} = (0, 0, -1)$. На пространственной бесконечности $\mathbf{n} \approx (0, 0, 1)$ в соответствии с условием (1.2.29а).

Фаза числа a выбрана равной $\pi/2$. Более детально вихревое распределение намагниченности для решения с топологическим зарядом $Q = 1$ представлено на рис. 1.5, где фаза числа a выбрана равной нулю. Ясно видна вихревая структура проекции векторного поля на плоскость (x_1, x_2) , которая пропадает вблизи центра вихря. Это обстоятельство и приводит к конечному значению энергии вихря.

Как уже говорилось ранее, более реалистичные (по сравнению с вихрями Белавина – Полякова) строго двумерные магнитные вихри с конечной энергией в безграничных образцах могут быть получены без учета магнитостатических взаимодействий, если в функционал энергии (1.2.2) ввести дополнительные слагаемые с высшими пространственными производными. Например, для ферромагнетика с анизотропией типа «легкая

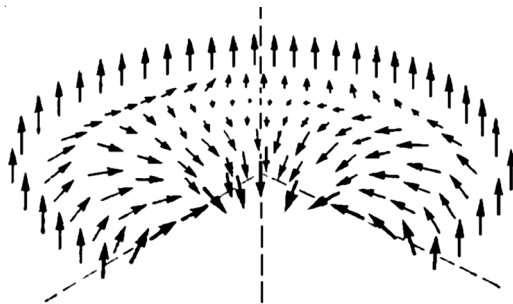


Рис. 1.5. Распределение намагниченности в двумерном вихре с $Q = 1$

ось» (1.2.15) при наличии квадратичного (1.2.16) и биквадратичного (1.2.17) обменных взаимодействий вириальное соотношение (1.2.21)

$$(4 - D)E_4 + (2 - D)E_2 - DE_0 = 0$$

не противоречит существованию не только двумерных, но и трехмерных магнитных структур с конечной энергией [45].

В двумерных ферромагнетиках наличие инвариантов Лифшица в гамильтониане стабилизирует магнитные вихри даже в отсутствие высших пространственных производных. В безразмерных переменных для одноосного ферромагнетика без центра инверсии при наличии направленного вдоль оси Ox_3 внешнего магнитного поля h плотность энергии w имеет вид

$$w = \frac{1}{2} \left[\left(\partial_\mu \mathbf{n} \right)^2 + (1 - n_3^2) \right] + \frac{2k}{\pi} (\mathbf{n} \cdot \text{rot} \mathbf{n}) + h(1 - n_3).$$

При $|k| < 1$ и $h > 0$ минимуму энергии w соответствует однородное состояние $\mathbf{n}_0 = (0, 0, 1)$. Как показано в работах [46–49], среди метастабильных возбуждений этой системы существуют двумерные магнитные вихри с конечной энергией. В параметризации (1.2.25) в полярной системе координат (r, φ) при $\Phi = \Phi(\varphi) = \varphi + \pi/2$ поле $\Theta = \Theta(r)$ определяется решением нелинейного уравнения

$$\frac{d^2 \Theta}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\Theta}{dr} - \left(\frac{1}{r^2} + 1 \right) \sin \Theta \cos \Theta - h \sin \Theta + \frac{4k}{\pi r} \sin^2 \Theta = 0$$

с граничными условиями $\Theta(0) = \pi$, $\Theta(\infty) = 0$. В работах [46–49] численным интегрированием были определены равновесные параметры и границы существования магнитных вихрей. Рис. 1.6 [49] иллюстрирует распределения энергии и намагниченности в таких вихрях.

В центральной части вихрь представляет собой сильно локализованное возбуждение с положительной энергией, и величина $r_0 = \pi \left(d\Theta/dr \right)^{-1} \Big|_{r=0}$ может служить его характерным размером. В области вне ядра зависимость $\Theta(r)$ убывает по экспоненциальному закону:

$$\Theta(r) \sim \exp(-r\sqrt{1+h}),$$

а плотность энергии $\tilde{W}(r) = rw(r)$ отрицательна в периферийной области.

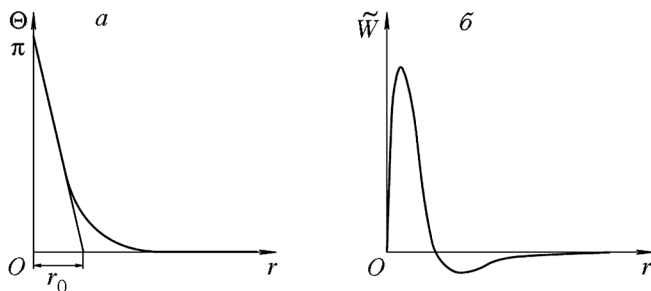


Рис. 1.6. Характерная зависимость $\Theta(r)$ (а) и плотность равновесной энергии $\tilde{W}(r) = w(r)r$ (б)

Напомним, что энергия наиболее известных топологических дефектов кристаллической решетки – дислокаций – логарифмически зависит от характерного размера кристалла и размеров ядер дислокаций порядка межатомного расстояния [53]. Логарифмическая зависимость энергии от параметров обрезания не приводит к серьезным трудностям при теоретическом описании дислокаций. Интересно и важно, что в магнитоупорядоченных кристаллах возможно формирование нелинейных топологических дефектов – магнитных вихрей и спиралей, которые с математической точки зрения близки к дислокациям или дисклинациям кристаллических решеток. В области ядер вихрей и спиралей континуальное приближение нарушается, поэтому вводится параметр обрезания порядка постоянной решетки. Как и у дислокаций в кристалле, энергия магнитных вихрей и спиралей логарифмически зависит от параметров обрезания. Далее аналитически описываются и обсуждаются такие магнитные структуры.

1.2.3. Законы сохранения

Характерные особенности динамики вихрей с конечной энергией в ферромагнетике достаточно полно выявляются при анализе законов сохранения. Чтобы правильно записать сохраняющиеся при движении вихрей величины, необходимо тщательно обсудить лагранжиан и гамильтониву формулировки рассматриваемой модели. Далее для простоты пренебрегаем магнитостатической энергией сре-

ды. Тогда в терминах сферических углов Θ , Φ гамильтониан одноосного ферромагнетика имеет вид

$$W = \int d^3\mathbf{r} [w_e + w_a] = \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{r} [(\partial_i \Theta)^2 + (\partial_i \Phi)^2 \sin^2 \Theta + \beta \sin^2 \Theta], \quad (1.2.34)$$

а плотность функции Лагранжа равна

$$L = (\cos \Theta - 1) \partial_t \Phi - w_e - w_a. \quad (1.2.35)$$

Здесь W_e – обменная энергия:

$$W_e = \int w_e d^3\mathbf{r}, \quad w_e = \frac{1}{2} (\partial_i \mathbf{n} \cdot \partial_i \mathbf{n}),$$

W_a – энергия кристаллографической магнитной анизотропии типа «легкая ось»:

$$W_a = \int w_a d^3\mathbf{r}, \quad w_a = \frac{\beta}{2} (n_1^2 + n_2^2), \quad \beta = \text{const} > 0.$$

Плотность функции Лагранжа определена с точностью до слагаемого, представляющего производную по времени от произвольной функции. Учитывая это обстоятельство, выберем в качестве обобщенных координат поле $\Phi(\mathbf{r}, t)$, а в качестве канонически сопряженных им импульсов — поле $\Pi(\mathbf{r}, t) = \cos \Theta(\mathbf{r}, t)$.

Уравнение Ландау – Лифшица

$$\partial_t \mathbf{n} = [\mathbf{n} \times \mathbf{F}], \quad \mathbf{n}^2 = 1; \quad \mathbf{F} = \Delta \mathbf{n} + B \mathbf{n}, \quad (1.2.36)$$

где $B \mathbf{n} = \beta(n_1, n_2, 0)$, $\Delta = \partial_i^2$ – трехмерный оператор Лапласа, можно интерпретировать как континуальную систему с функцией Гамильтона $W = W(\Pi, \Phi)$ и скобками Пуассона

$$\{R, G\} = \int d^3\mathbf{r}' \left[\frac{\delta R}{\delta \Pi(\mathbf{r}')} \frac{\delta G}{\delta \Phi(\mathbf{r}')} - \frac{\delta R}{\delta \Phi(\mathbf{r}')} \frac{\delta G}{\delta \Pi(\mathbf{r}')} \right], \quad \{\Pi(\mathbf{r}), \Phi(\mathbf{r}')\} = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}').$$

В терминах полей Π , Φ уравнение (1.2.36) эквивалентно уравнениям Гамильтона:

$$\partial_t \Phi = \{W, \Phi\} = \frac{\delta W}{\delta \Pi}, \quad \partial_t \Pi = \{W, \Pi\} = -\frac{\delta W}{\delta \Phi}. \quad (1.2.37)$$

Чаще используется равноценная форма записи:

$$\partial_i \Phi \sin \Theta = -\frac{\delta W}{\delta \Theta}, \quad \partial_i \Theta \sin \Theta = \frac{\delta W}{\delta \Phi}.$$

Нетрудно проверить, что

$$\{n_i(\mathbf{r}), n_j(\mathbf{r}')\} = -\varepsilon_{ijk} n_k(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (1.2.38)$$

Это позволяет сформулировать гамильтонов подход непосредственно в терминах полей $\mathbf{n}(\mathbf{r}, t)$ с функцией Гамильтона

$$W(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \int d^3 \mathbf{r} [(\partial_i \mathbf{n})^2 + \beta(n_1^2 + n_2^2)].$$

Скобки Пуассона (1.2.38) приводят к уравнению эволюции поля $\mathbf{n}(\mathbf{r}, t)$:

$$\partial_t \mathbf{n} + \{\mathbf{n}, W\} = \partial_t \mathbf{n} + \left[\mathbf{n} \times \frac{\delta W}{\delta \mathbf{n}} \right] = 0, \quad (1.2.39)$$

которое совпадает с уравнением Ландау – Лифшица (1.2.36). Проверим совместимость гамильтонова описания (1.2.39) с условием связи $\mathbf{n}^2 = 1$. Поле \mathbf{n}^2 коммутирует с гамильтонианом $W(\mathbf{n})$ так, что $\partial_t \mathbf{n}^2 = 0$. Поэтому в качестве \mathbf{n}^2 можно взять любую функцию, зависящую только от пространственных координат. Специфический выбор $\mathbf{n}^2 = 1$ представляет физический интерес и не противоречит гамильтоновой формулировке (1.2.39) динамики ферромагнетика.

Функция Лагранжа ферромагнетика инвариантна относительно параллельных переносов образца:

$$\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r} + \delta \mathbf{a}, \quad \begin{pmatrix} \Phi(\mathbf{r}) \\ \Theta(\mathbf{r}) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \Phi(\mathbf{r} + \delta \mathbf{a}) \\ \Theta(\mathbf{r} + \delta \mathbf{a}) \end{pmatrix},$$

поворотов всех спинов среды вокруг оси n_3 на один и тот же угол $\delta \gamma$:

$$\Phi \rightarrow \Phi + \delta \gamma, \quad \Theta \rightarrow \Theta, \quad \mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r},$$

а также не связанных с вращениями спинов инфинитизимальных пространственных поворотов образца на угол $\delta \tilde{\gamma}$ вокруг оси Ox_3 :

$$\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r} + \delta \mathbf{r}, \quad \delta \mathbf{r} = [\mathbf{n}_0 \times \mathbf{r}] \delta \tilde{\gamma}, \quad \mathbf{n}_0 = (0, 0, 1); \quad \begin{pmatrix} \Phi(\mathbf{r}) \\ \Theta(\mathbf{r}) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \Phi(\mathbf{r} + \delta \mathbf{r}) \\ \Theta(\mathbf{r} + \delta \mathbf{r}) \end{pmatrix}.$$

Согласно теореме Нётер [54, 55], перечисленные алгебраические симметрии приводят к трем законам сохранения: полевого импульса системы \mathbf{p} , третьей компоненты полной намагниченности среды m и третьей компоненты l орбитального момента. Для двумерных распределений намагниченности перечисленные величины вычисляются по формулам

$$p_\mu = -\int d^2\mathbf{r} \frac{\partial L}{\partial(\partial_t \Phi)} \partial_\mu \Phi = \int d^2\mathbf{r} (1 - \cos \Theta) \partial_\mu \Phi,$$

$$m = \int d^2\mathbf{r} \frac{\partial L}{\partial(\partial_t \Phi)} = \int d^2\mathbf{r} (n_3 - 1) = \int d^2\mathbf{r} (\cos \Theta - 1),$$

$$l = -\int d^2\mathbf{r} \frac{\partial L}{\partial(\partial_t \Phi)} \varepsilon_{\mu\nu} x_\mu \partial_\nu \Phi = \int d^2\mathbf{r} (1 - \cos \Theta) \varepsilon_{\mu\nu} x_\mu \partial_\nu \Phi. \quad (1.2.40)$$

При записи интеграла движения m вычли намагниченность однородного основного состояния.

При учете магнитостатических взаимодействий вращения в спиновом и координатном пространствах перестают быть независимыми. Функция Лагранжа оказывается инвариантной только относительно одновременного поворота спинов и образца относительно оси Ox_3 на один и тот же угол ($\delta\gamma = \delta\tilde{\gamma}$). Это приводит к тому, что сохраняющейся величиной будет лишь третья компонента полного момента количества движения системы: $l + m$.

К сожалению, не для всех типов возбуждений и структур интегралы движения (1.2.40) определены корректно. В частности, их использование для анализа динамики двумерных магнитных вихрей невозможно [50]. Причина в том, что при наличии вихрей азимутальный угол Φ является неопределенной и недифференцируемой функцией в точках, где поле $\Theta(\mathbf{r}, t) = 0$, π (или $\mathbf{n} = (0, 0, \pm 1)$). При $\Theta = 0$ коэффициент $(1 - \cos \Theta)$ в формулах (1.2.40) обращается в нуль и тем самым регуляризует неопределенность производной $\partial_\mu \Phi$ в точках, где $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$. Однако этого не происходит в точках, где $\Theta = \pi$ ($\mathbf{n} = (0, 0, -1)$). В результате возникают аномальные вклады типа дельта-функций, которые нарушают законы сохранения импульса и момента импульса для двумерных вихрей. Поскольку в вихрях Белавина – Полякова намагниченность не менее одного раза достигает значения $\mathbf{n} = (0, 0, -1)$, приведенное возражение против интегралов движения p_μ и l оказывается критическим. Указанная труд-

ность преодолена в работе [50] в результате глубокого анализа топологической структуры уравнений Ландау – Лифшица. Выяснилось, что топологические свойства более важны для понимания особенностей движения двумерных магнитных вихрей, чем для трехмерных магнитных возбуждений и структур. Поэтому дальнейший анализ посвящен в основном двумерным магнитным возбуждениям и структурам с конечной энергией.

Построение правильных законов сохранения для двумерных вихрей проведем в несколько этапов [50]. Рассмотрим вначале эволюцию плотности топологического заряда q (1.2.31), предполагая, что распределение намагниченности $\mathbf{n}(x_1, x_2, t)$ удовлетворяет уравнению Ландау – Лифшица (1.2.36). Сравнительно простые вычисления приводят к выражению

$$\partial_t q = \varepsilon_{\mu\nu} (\partial_\mu \mathbf{F} \cdot \partial_\nu \mathbf{n}) = \varepsilon_{\mu\nu} \partial_\mu (\mathbf{F} \cdot \partial_\nu \mathbf{n}). \quad (1.2.41)$$

Правая часть его представлена в форме дивергенции, поэтому соотношение (1.2.41) является записью локального закона сохранения. Учитывая тождество

$$-(\mathbf{F} \cdot \partial_\nu \mathbf{n}) = \left(\frac{\delta W}{\delta \mathbf{n}} \cdot \partial_\nu \mathbf{n} \right) = \partial_\lambda \sigma_{\nu\lambda},$$

где

$$\begin{aligned} \sigma_{\nu\lambda} &= (w_e + w_a) \delta_{\nu\lambda} - (\partial_\nu \mathbf{n} \cdot \partial_\lambda \mathbf{n}), \\ w_e + w_a &= \frac{1}{2} \left[(\partial_\mu \mathbf{n} \cdot \partial_\mu \mathbf{n}) + \beta (n_1^2 + n_2^2) \right], \end{aligned} \quad (1.2.42)$$

получаем более строгую версию этого закона:

$$\partial_t q = -\varepsilon_{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\lambda \sigma_{\nu\lambda}, \quad (1.2.43)$$

которая будет основой для дальнейших построений.

Немедленным следствием (1.2.43) является то, что проинтегрированная по всему пространству плотность топологического заряда – степень отображения Q , как и ожидалось, не зависит от времени. Наличие вторых производных по пространственным координатам в правой части уравнения (1.2.43) приводит к важному заключению: первые моменты плотности топологического заряда также будут интегралами движения. Простейшие моменты имеют вид

$$I_\mu = \int x_\mu q d^2 \mathbf{r}, \quad \mu = 1, 2. \quad (1.2.44)$$

Применение соотношения (1.2.43) дает цепочку равенств

$$\begin{aligned}\partial_i I_\mu &= \int x_\mu \partial_i q d^2 \mathbf{r} = - \int x_\mu \varepsilon_{\rho\nu} \partial_\rho \partial_\lambda \sigma_{\nu\lambda} d^2 \mathbf{r} = \\ &= \int \left[-\partial_\rho (\varepsilon_{\rho\nu} x_\mu \partial_\lambda \sigma_{\nu\lambda}) + \partial_\lambda (\varepsilon_{\mu\nu} \sigma_{\nu\lambda}) \right] d^2 \mathbf{r}.\end{aligned}\quad (1.2.45)$$

Поскольку подынтегральные члены в соотношении (1.2.45) имеют форму дивергенций, интегрирование с использованием теоремы Гаусса приводит к закону сохранения $\partial_i I_\mu = 0$ для распределений намагниченности с разумным поведением на пространственной бесконечности. Здесь под разумными понимаем пространственно локализованные конфигурации с конечной энергией.

Чтобы выяснить физический смысл сохраняющихся величин I_μ вычислим скобки Пуассона:

$$\{I_\mu, \mathbf{n}\} = -\varepsilon_{\mu\nu} \partial_\nu \mathbf{n}.$$

Отсюда следует, что величины

$$p_\mu = -\varepsilon_{\mu\nu} I_\nu = -\varepsilon_{\mu\nu} \int x_\nu q d^2 \mathbf{r} \quad (1.2.46)$$

обладают скобками Пуассона, типичными для компонент импульса:

$$\{p_\mu, \mathbf{n}\} = -\partial_\mu \mathbf{n}.$$

Новое определение полного импульса системы (1.2.46) свободно от недостатков прежнего (1.2.40). Запишем плотность топологического заряда в терминах углов Θ , Φ (1.2.25), чтобы убедиться в этом. Согласно формулам (1.2.31), (1.2.46), в новом определении импульса коэффициент $\sin\Theta$ регуляризует недифференцируемость функции Φ в опасных точках, где $\Theta(\mathbf{r}) = 0, \pi$.

Связь двух разных определений импульса (1.2.40) и (1.2.46) нетрудно установить с помощью тождества

$$\begin{aligned}x_\nu q &= \varepsilon_{\nu\lambda} [(1 - \cos\Theta) \partial_\lambda \Phi] - \partial_\mu [x_\nu (1 - \cos\Theta) \varepsilon_{\mu\nu} \partial_\lambda \Phi] + \\ &+ x_\nu (1 - \cos\Theta) (\varepsilon_{\mu\lambda} \partial_\mu \partial_\lambda \Phi).\end{aligned}\quad (1.2.47)$$

Когда в правой части равенства (1.2.47) отсутствуют второй и третий члены, определения импульса (1.2.40) и (1.2.46) эквивалентны. Вторым членом действительно можно пренебречь, так как он представлен в форме дивергенции и потому дает нуль при вычислении

полного импульса системы по формуле (1.2.46). На первый взгляд кажется, что третий член также обращается в нуль, поскольку представляет собой свертку антисимметричного тензора $\epsilon_{\mu\nu}$ с симметричным $\partial_\nu \partial_\mu \Phi$. Однако при наличии вихрей этот член не равен нулю из-за недифференцируемости функции $\Phi(x_1, x_2)$. Чтобы проиллюстрировать утверждение, рассмотрим простейшие вихревые конфигурации (1.2.33), для которых $\Phi = c\varphi$, где c – целое число, $\varphi = \arg(x_1 + ix_2)$ – полярный угол. Нетрудно проверить, что $\epsilon_{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \Phi = 2\pi c \delta(\mathbf{r}) \neq 0$. Тем не менее в приведенном примере третий член в правой части (1.2.47) все же дает нуль, ведь $x_\nu \delta(\mathbf{r}) = 0$. В общем случае, если намагниченность вихря принимает значение $\mathbf{n} = (0, 0, -1)$ в точке $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 \neq 0$, так что

$$\epsilon_{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \Phi = 2\pi c \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0),$$

то третий член в (1.2.47) не обращается в нуль. Поэтому два определения импульса (1.2.40) и (1.2.46) неэквивалентны.

Принимая формулу (1.2.46) за верное определение импульса, получаем ряд интересных следствий. На первый взгляд, новый полевой импульс (1.2.46) обладает странными свойствами. Вычисление скобок Пуассона между двумя компонентами импульса (1.2.46) дает неожиданный ненулевой результат:

$$\{p_1, p_2\} = 4\pi Q. \quad (1.2.48)$$

Для полевых конфигураций с $Q = 0$ скобки Пуассона (1.2.48), как обычно, обращаются в нуль и сохраняющиеся величины (1.2.46) имеют смысл компонент полного импульса системы. В то же время при $Q \neq 0$ моменты (1.2.44) служат скорее мерой положения вихря, чем его движения [50]. Чтобы пояснить утверждение, рассмотрим некоторую полевую конфигурацию $\mathbf{n}(\mathbf{r}, t)$ с плотностью топологического заряда $q(\mathbf{r}, t)$ и моментами I_μ , вычисленными по формуле (1.2.44). Осуществим жесткую трансляцию конфигурации на постоянный вектор \mathbf{c} , тогда плотность заряда изменится: $q' = q(\mathbf{r} - \mathbf{c}, t)$ и, следовательно, изменятся моменты:

$$I'_\mu = I_\mu + 4\pi Q c_\mu. \quad (1.2.49)$$

При жесткой трансляции вихря было бы естественным ожидать сохранения полевого импульса. Однако для интегралов движения (1.2.46) это свойство не выполняется (см. формулы (1.2.46), (1.2.49)). Исключение составляет случай $Q = 0$.

При $Q \neq 0$ в качестве сохраняющихся величин разумнее использовать компоненты радиуса-вектора \mathbf{R} :

$$R_\mu = \frac{\int x_\mu q d^2\mathbf{r}}{\int q d^2\mathbf{r}} = \frac{I_\mu}{4\pi Q}, \quad Q \neq 0. \quad (1.2.50)$$

Вектор \mathbf{R} преобразуется при жестких трансляциях вихря по закону $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} + \mathbf{c}$, поэтому его можно трактовать как радиус-вектор «центра тяжести» вихря. Точку, определенную радиусом-вектором \mathbf{R} , далее будем называть *ведущим центром вихря*. Скобки Пуассона между компонентами вектора \mathbf{R} не обращаются в нуль:

$$\{R_1, R_2\} = \frac{1}{4\pi Q}.$$

Важно, что в отсутствие градиентов внешнего магнитного поля вектор \mathbf{R} не зависит от времени. Поэтому можно считать, магнитный вихрь спонтанно закреплен около ведущего центра. Закрепление вихря возможно около любой точки (x_1, x_2) -плоскости. В этом смысле трансляционная инвариантность системы косвенно восстанавливается. В следующем разделе на основе анализа законов сохранения подробно обсуждаются особенности движения вихрей под действием градиента внешнего магнитного поля.

В заключение этого раздела модифицируем определение (1.2.40) углового момента системы. Для этого рассмотрим второй момент плотности топологического заряда:

$$l = \frac{1}{2} \int r^2 q d^2\mathbf{r}, \quad (1.2.51)$$

который, как нетрудно показать, удовлетворяет соотношению

$$\{l, \mathbf{n}\} = -\varepsilon_{\mu\nu} x_\mu \partial_\nu \mathbf{n}.$$

Отсюда следует, что величина l , определенная формулой (1.2.51), является генератором пространственных вращений и потому может быть отождествлена с третьей компонентой орбитального момента количества движений системы. Выражение (1.2.51) заменяет прежнее некорректное определение (1.2.40) этого интеграла движения.

Используя основное уравнение (1.2.43), находим производную по времени от l :

$$\begin{aligned} \partial_t l &= \frac{1}{2} \int r^2 \partial_t q d^2 \mathbf{r} = -\frac{1}{2} \int r^2 \varepsilon_{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\lambda \sigma_{\nu\lambda} d^2 \mathbf{r} = \\ &= \int \varepsilon_{\mu\nu} \left[-\frac{1}{2} \partial_\lambda (r^2 \partial_\mu \sigma_{\nu\lambda}) + \partial_\mu (x_\lambda \sigma_{\nu\lambda}) + \sigma_{\mu\nu} \right] d^2 \mathbf{r}. \end{aligned} \quad (1.2.52)$$

В правой части (1.2.52) первые два члена представлены в форме дивергенций и не дают вклада в интеграл. Тензор $\sigma_{\mu\nu}$ является симметричным (см. формулу (1.2.42)), поэтому $\varepsilon_{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu} = 0$ и третий член также обращается в нуль. В результате получаем $\partial_t l = 0$. Напомним, что закон сохранения l справедлив только в отсутствии магнитостатических взаимодействий. При учете магнитостатики сохраняющейся величиной будет $l + m$.

Как и в случае с импульсом, сохраняющуюся величину l можно считать проекцией на ось анизотропии орбитального момента количества движения ферромагнетика лишь для конфигураций с $Q = 0$. При $Q \neq 0$ интеграл движения l характеризует не вращение вихря, а скорее его размер [50]. Средний квадрат радиуса вихря определим формулой

$$r^2 = \frac{\int (\mathbf{r} - \mathbf{R})^2 q d^2 \mathbf{r}}{\int q d^2 \mathbf{r}} = \frac{l}{2\pi Q} - \mathbf{R}^2, \quad (1.2.53)$$

где \mathbf{R} – радиус-вектор ведущего центра. Выражение (1.2.53) дает размер вихря тогда, когда магнитостатическими взаимодействиями можно пренебречь. В этом случае r^2 не зависит от эволюции внутренней структуры вихря. После приведенного обсуждения не кажется курьезным тот факт, что неподвижные двумерные вихри Белавина – Полякова имеют отличный от нуля «момент количества движения» l .

В качестве примера рассмотрим решения Белавина – Полякова, которые соответствуют степени покрытия: $Q = \pm n$:

$$v(\bar{z}) = \left(\frac{a^*}{\bar{z}} \right)^n, \quad v(z) = \left(\frac{a}{z} \right)^n. \quad (1.2.54)$$

Здесь n – натуральное число. Вычисляя плотность топологического заряда по формуле (1.2.30), находим

$$q = \pm \frac{4n^2 |a|^{2n} r^{2(n-1)}}{(r^{2n} + |a|^{2n})^2}, \quad r^2 = x_1^2 + x_2^2. \quad (1.2.55)$$

Ввиду радиальной симметрии выражения (1.2.55) вектор \mathbf{R} (1.2.50) обращается в нуль, т. е. ведущий центр вихря совпадает с точкой, где $\mathbf{n} = (0, 0, -1)$. Совпадение характерных точек связано со специальным выбором функций v (1.2.54). В общем случае ведущий центр не совпадает с точкой, где $\mathbf{n} = (0, 0, -1)$, тем более что при $|Q| > 1$ намагниченность достигает значения $\mathbf{n} = (0, 0, -1)$ более одного раза. Используя формулы (1.2.51), (1.2.55), убеждаемся, что для вихрей Белавина – Полякова (1.2.54) интеграл движения

$$l = 2\pi Q \left[(\pi/Q) \operatorname{cosec}(\pi/Q) \right] |a|^2 \neq 0, \quad (1.2.56)$$

так как $Q = \pm n \neq 0$.

Средний квадрат радиуса вихря вычисляем с помощью формул (1.2.53), (1.2.56), где $\mathbf{R} = 0$:

$$r^2 = \left[(\pi/Q) \operatorname{cosec}(\pi/Q) \right] |a|^2. \quad (1.2.57)$$

Радиус вихря с $|Q| = 1$ оказался бесконечным. Это свидетельствует о слабой пространственной локализации вихрей Белавина – Полякова с $|Q| = 1$ – свойство, не разделяемое более реалистичными вихрями. При $|Q| \gg 1$ размер вихря близок к радиусу окружности, на которой третья компонента намагниченности обращается в нуль: $r \approx |a|$.

Далее нам потребуется еще один интеграл движения, связанный с решениями (1.2.54), – полная намагниченность среды вдоль оси Ox_3 :

$$m = \int (n_3 - 1) d^2 \mathbf{r} = -2\pi \left[(\pi/Q) \operatorname{cosec}(\pi/Q) \right] |a|^2. \quad (1.2.58)$$

Сравнивая формулы (1.2.57) и (1.2.58), получаем

$$m = -2\pi r^2. \quad (1.2.59)$$

Сотношение (1.2.59) допускает наглядную геометрическую интерпретацию. Двумерный вихрь можно представить в виде однородно намагниченного цилиндра (цилиндрического домена) радиуса r . Ось

цилиндра совпадает с осью Ox_3 . Внутри цилиндра $n_3 = -1$, а вне его $n_3 = 1$. Функция $n_3 - 1$ принимает в тех же областях значения -2 и 0 соответственно. Величина m для указанного цилиндра такая же, как у вихря.

Наше внимание к законам сохранения связано не только с описанием статических магнитных вихрей, но и с возможностью использования этих законов для предсказаний, касающихся особенностей движения вихрей во внешних полях.

1.2.4. Движение вихря в поле градиента внешнего магнитного поля

Наиболее характерные черты динамики двумерных вихрей проявляются при наличии градиента внешнего магнитного поля. Пусть на вихрь, спонтанно закрепленный в некоторой точке, оказывают воздействие внешним магнитным полем, направленным вдоль оси Ox_3 :

$$\mathbf{H}^{\text{ext}} = (0, 0, h(\mathbf{r}, t)). \quad (1.2.60)$$

Величина поля зависит от пространственных координат и времени. Наша задача состоит в описании движения вихря после воздействия на него поля. Основой анализа будет уравнение (1.2.41), в которое следует включить внешнее поле (1.2.60). Это достигается заменой $\mathbf{F} \rightarrow \mathbf{F} + \mathbf{H}^{\text{ext}}$ в выражении (1.2.41):

$$\begin{aligned} \partial_t q &= \varepsilon_{\mu\nu} \partial_\mu (\mathbf{F} \cdot \partial_\nu \mathbf{n}) + \varepsilon_{\mu\nu} \partial_\mu (\mathbf{H}^{\text{ext}} \cdot \partial_\nu \mathbf{n}) = \\ &= -\varepsilon_{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\lambda \sigma_{\nu\lambda} + \varepsilon_{\mu\nu} \partial_\mu (h \partial_\nu n_3). \end{aligned} \quad (1.2.61)$$

Здесь $\sigma_{\mu\nu}$ определяется формулой (1.2.42), n_3 – третья компонента намагнитченности среды. Правая часть уравнения (1.2.61) представлена в форме дивергенции, поэтому топологический заряд Q сохраняется и при включении поля (1.2.60). Однако моменты плотности топологического заряда уже не сохраняются. Изучение степени нарушения прежних законов сохранения дает информацию о движении вихрей.

Рассмотрим вначале эволюцию моментов I_μ (1.2.44):

$$\begin{aligned} \partial_t I_\mu &= \int x_\mu \partial_t q d^2 \mathbf{r} = \varepsilon_{\lambda\nu} \int x_\mu \partial_\lambda (h \partial_\nu n_3) d^2 \mathbf{r} = \\ &= -\varepsilon_{\mu\lambda} \int h \partial_\nu n_3 d^2 \mathbf{r} = \varepsilon_{\mu\lambda} \int \partial_\nu h (n_3 - 1) d^2 \mathbf{r}. \end{aligned} \quad (1.2.62)$$

При вычислениях учли, что вследствие сохранения импульса системы в отсутствие внешнего поля первый член в правой части соотношения (1.2.61) не дает вклада в уравнение (1.2.62). Перед вторым интегрированием по частям воспользуемся тождеством $\partial_v n_3 = \partial_v (n_3 - 1)$, чтобы сделать это интегрирование законным. В результате получаем выражение

$$\partial_t I_\mu = \varepsilon_{\mu\nu} \int \partial_\nu h(n_3 - 1) d^2 \mathbf{r}, \quad (1.2.63)$$

которое показывает, что моменты I_μ изменяются наиболее значительно в направлении, перпендикулярном градиенту поля h .

Для большей наглядности рассмотрим простой пример

$$h(r, t) = g(t)x_1, \quad (1.2.64)$$

тогда уравнения (1.2.63) дают

$$\partial_t I_1 = 0, \quad \partial_t I_2 = -g(t)m, \quad (1.2.65)$$

где $m = \int (n_3 - 1) d^2 \mathbf{r}$ – полная намагниченность среды в направлении оси Ox_3 . В пренебрежении магнитостатическими взаимодействиями величина m является интегралом движения даже при включении внешнего магнитного поля, если оно направлено вдоль оси Ox_3 . Это означает, что m можно вычислить по начальному распределению намагниченности.

Обсудим поведение магнитных вихрей с $Q \neq 0$. В этом случае моменты I_μ определяют положение ведущего центра вихря (1.2.50). Поскольку Q является интегралом движения, уравнения (1.2.65) дают явное описание эволюции координат ведущего центра:

$$\partial_t R_1 = 0, \quad \partial_t R_2 = -g(t)m/4\pi Q. \quad (1.2.66)$$

Выражения (1.2.66) показывают, что вихрь дрейфует как единое целое в направлении, перпендикулярном градиенту поля $h(\mathbf{r}, t)$ со скоростью

$$V = g(t)m/4\pi Q. \quad (1.2.67)$$

В поле $h = h(\mathbf{r})$ дрейф вихрей происходит в плоскости (x_1, x_2) вдоль линий уровня функции $h(\mathbf{r})$. Важно, что полученный результат (1.2.66) не зависит от деталей эволюции внутренней структуры вихря, которая должна определяться в результате полного решения уравнения Ландау – Лифшица с соответствующими начальными условиями. Соотношения (1.2.66) справедливы даже для нестационар-

ных движений вихря и не зависят от того, был ли в момент включения поля вихрь в равновесном состоянии или нет.

В качестве примера вновь обратимся к вихрям Белавина – Полякова (1.2.54), являющимся статическими решениями обменной модели (1.2.26). Пусть на такие вихри налагается внешнее магнитное поле (1.2.60), (1.2.64). Поскольку m – интеграл движения, его можно вычислить по начальной конфигурации, что сделано ранее в формулах (1.2.58), (1.2.59). В итоге находим дрейфовую скорость вихрей Белавина – Полякова:

$$V = g(t)r_0^2/2Q, \quad r_0^2 = [(\pi / Q)\operatorname{cosec}(\pi / Q)]|a|^2. \quad (1.2.68)$$

Здесь для радиуса вихря использовали обозначение r_0 вместо r , поскольку r_0 – это начальное значение радиуса вихря, которое в последующем может изменяться под действием градиента магнитного поля.

Чтобы получить представление об эволюции радиуса вихря, напомним его связь с интегралом движения l (1.2.53). Пренебрегая магнитостатическими взаимодействиями и следуя изложенной схеме, получаем

$$\partial_t l = \int \varepsilon_{\mu\nu} x_\mu \partial_\nu h(n_3 - 1) d^2 \mathbf{r}. \quad (1.2.69)$$

Для наглядности ограничимся рассмотрением простого случая (1.2.64). Тогда с помощью формул (1.2.64), (1.2.69) находим

$$\partial_t r^2 = \frac{g(t)}{2\pi Q} \int (R_2 - x_2)(n_3 - 1) d^2 \mathbf{r}. \quad (1.2.70)$$

Здесь $R_2 = R_2(t)$ – координата ведущего центра вихря, которая определяется уравнением (1.2.66). Соотношение (1.2.70) можно использовать для приближенных оценок изменения радиуса вихря со временем.

Ометим, что обменная модель, часто используемая в качестве примера, к сожалению, не является типичной, так как не содержит характерных малых масштабов. Ввиду масштабной инвариантности обменной энергии выражение (1.2.68) для начального радиуса вихря зависит от произвольного параметра $|a|$. Тем не менее формула (1.2.68) показывает, что радиус вихря уменьшается с увеличением $|Q|$.

Обсудим теперь движение вихрей с $Q = 0$ под действием внешнего магнитного поля. Схематически конфигурация вихря с $Q = 0$ представлена на рис. 1.7.

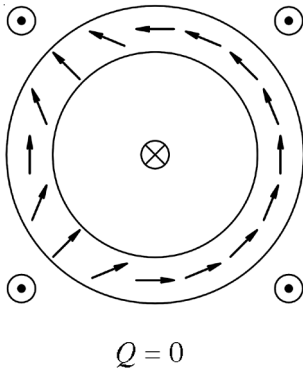


Рис. 1.7. Схематическое изображение нетопологического магнитного вихря

В данном случае, как это следует из формул (1.2.50), моменты I_μ не позволяют охарактеризовать среднее положение вихря. Поэтому проанализируем эволюцию импульса вихря (1.2.46) под действием внешнего магнитного поля (1.2.60):

$$\partial_t p_\mu = \int \partial_\mu h(n_3 - 1) d^2 \mathbf{r}.$$

В простом случае (1.2.64) находим

$$\partial_t p_1 = g(t)m, \quad \partial_t p_2 = 0.$$

Отсюда следует, что импульс вихря с $Q = 0$ изменяется в направлении градиента функции $h(r, t)$. Строго говоря, это не означает, что вихрь движется в направлении градиента поля $h(r, t)$, поскольку связь между импульсом вихря и его скоростью остается неизвестной. Тем не менее изложенная картина не противоречит экспериментам, в которых цилиндрические магнитные домены с $Q = 0$ движутся в направлении градиента поля $h(r, t)$.

В работе [50] показано, что учет эффектов диссипации энергии для вихрей с $Q \neq 0$ приводит к их «косому» дрейфу в направлении, которое не образует прямой угол с направлением градиента поля $h(\mathbf{r}, t)$. Аналогичная картина также наблюдается для цилиндрических магнитных доменов с $Q \neq 0$.

В [50] отмечено, что с математической точки зрения поведение двумерных магнитных вихрей эквивалентно холловскому движению электрона в плоскости под действием постоянного магнитного поля \mathbf{B} , перпендикулярного плоскости, и неоднородного электрического поля $\mathbf{E}(r)$, лежащего в плоскости движения электрона. Магнитное поле в задаче о движении электрона соответствует топологическому заряду двумерного вихря в ферромагнетике: $\mathbf{B} \sim (0, 0, 4\pi Q)$, а потенциал U электрического поля ($\mathbf{E} = -\nabla U$) отвечает третьей компоненте внешнего магнитного поля в задаче о вихре: $U \sim -mh(\mathbf{r}, t)$.

Интересно, что необычные черты динамики двумерных магнитных вихрей нашли естественное объяснение без излишней детализации формы записи уравнений движений ферромагнетика в результате радикального пересмотра канонической структуры теории с учетом лежащей в ее основе топологии. Законы сохранения, столь

эффективные при описании физических свойств двумерных вихрей, существуют и в трех измерениях. Однако они не отражают в полной мере топологических свойств трехмерных магнитных возбуждений и структур. Кратко обсудим возникающие трудности. Для простоты будем пренебрегать магнитостатическими взаимодействиями.

Прежде всего заметим, что доказательство невозможности существования в безграничном ферромагнетике статических структур с конечной энергией не распространяется на динамические пространственно локализованные возбуждения. Так, в безграничном ферромагнетике существуют связанные состояния магнонов с конечной энергией – «магнонные капли», которые стабилизированы прецессией намагниченности внутри «капли» [1]. Введем для трехмерных пространственно локализованных магнитных возбуждений ферромагнетика плотности J_i , которые обобщают плотность топологического заряда q для двумерных вихрей:

$$J_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} ([\partial_k \mathbf{n} \times \partial_j \mathbf{n}] \cdot \mathbf{n}). \quad (1.2.71)$$

Нетрудно показать, что величины J_i удовлетворяют локальным законам сохранения:

$$\partial_l J_i = -\varepsilon_{ijk} \partial_j \partial_l \sigma_{kl}, \quad (1.2.72)$$

где σ_{kl} — трехмерное обобщение двумерного тензора $\sigma_{\mu\nu}$ (1.2.42). Отсюда следуют три интеграла движения:

$$Q_i = \frac{1}{4\pi} \int J_i d^3 \mathbf{r}, \quad (1.2.73)$$

являющиеся аналогами топологического заряда Q (1.2.30) двумерных вихрей. Однако в отличие от Q величины Q_i в трехмерном случае тривиальны: они либо расходятся, либо обращаются в нуль. В частности $Q_i = 0$ для всех конфигураций с конечной энергией. Уже это указывает на специфику динамики трехмерных магнитных возбуждений.

Можно пойти дальше и найти сохраняющиеся моменты:

$$I_{ij} = \int x_i J_j d^3 \mathbf{r}. \quad (1.2.74)$$

Поскольку они удовлетворяют скобкам Пуассона:

$$\{I_{ij}, \mathbf{n}\} = \varepsilon_{ijk} \partial_k \mathbf{n},$$

тензор I_{ij} антисимметричен: $I_{ij} = -I_{ji}$. Три его независимые компоненты можно отождествить с проекциями полного импульса системы:

$$p_1 = -I_{23}, \quad p_2 = -I_{31}, \quad p_3 = -I_{12}. \quad (1.2.75)$$

Можно также ввести три сохраняющиеся компоненты орбитального момента количества движения:

$$l_i = \frac{1}{2} \int r^2 J_i d^3 \mathbf{r}. \quad (1.2.76)$$

Приведенные интегралы движения не выявляют необычного поведения трехмерных магнитных возбуждений. В частности, моменты инвариантны при жестких трансляциях полевой конфигурации, а скобки Пуассона между проекциями импульса (1.2.75) равны нулю. Поэтому динамика трехмерных конфигураций не проявляется каким-либо специальным образом, как это было в двумерном случае.

Ситуация кардинально изменяется в квазидвумерных ферромагнитных образцах. В ферромагнитных пленках конечной толщины заряды Q_i не обращаются в нуль для полевых конфигураций с конечной энергией. Например, заряд Q_3 можно записать в виде

$$Q_3 = \int \left[\frac{1}{4\pi} \iint J_3 dx_1 dx_2 \right] dx_3, \quad (1.2.77)$$

где ось Ox_3 перпендикулярна пленке. Хотя плотность J_3 в общем случае зависит от x_3 , ее можно интерпретировать как квазидвумерную плотность топологического заряда (1.2.30). Координата x_3 играет роль параметра, конкретизирующего особенности полевой конфигурации. Двукратный интеграл в формуле (1.2.77), как и в двумерных задачах, принимает целочисленные значения $Q = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, которые не зависят от x_3 . Поэтому $Q_3 = hQ$, где h – толщина пленки. Можно показать, что обменная энергия ферромагнитной пленки удовлетворяет неравенству $W_e \geq 4\pi|Q_3|$. Отсюда следует, что в ферромагнитных пленках могут существовать магнитные возбуждения и структуры с конечной энергией и топологическим зарядом $Q_3 = hQ \neq 0$. Топологический заряд локализованных возбуждений и структур в ферромагнитных пленках аналогичен таковому рассмотренных в этом разделе двумерных вихрей. Кроме того, изложенная здесь схема описания динамики вихрей близка подходу Тиля [56, 57] к анализу динамики цилиндрических магнитных доменов. Вероятно, поэтому некоторые свойства строго двумерных магнитных вихрей напоминают характерные черты цилиндрических доменов.

Топологические аспекты физики конденсированных сред подробно не разбираются в этой книге. Заинтересованного читателя отсылаем к оригинальной литературе [51, 58–64].

1.3. «КВАНТОВАННЫЕ» НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЗБУЖДЕНИЯ ДИСКЛИНАЦИЙ В ИЗОТРОПНОМ АНТИФЕРРОМАГНЕТИКЕ

Квантовые числа появляются теперь совершенно таким же способом, как и целые числа при колебании струны, т.е. как следствие граничных условий.

А. Зоммерфельд. Пути познания в физике

Для обсуждения нелинейных топологических дефектов в антиферромагнетике воспользуемся феноменологической теорией магнетизма [25, 39, 65], согласно которой состояние антиферромагнетика с двумя подрешетками описывается намагниченностями подрешеток $\mathbf{M}_1(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{M}_2(\mathbf{r}, t)$. Свободная энергия такой системы в пренебрежении анизотропией имеет вид

$$W = \int d^3\mathbf{r} \left\{ \sum_{i=1}^3 \left[\frac{\alpha}{2} \left((\partial_i \mathbf{M}_1 \cdot \partial_i \mathbf{M}_1) + (\partial_i \mathbf{M}_2 \cdot \partial_i \mathbf{M}_2) \right) + \alpha' (\partial_i \mathbf{M}_1 \cdot \partial_i \mathbf{M}_2) \right] + \delta (\mathbf{M}_1 \cdot \mathbf{M}_2) \right\}, \quad (1.3.1)$$

где δ – постоянная однородного обмена между подрешетками; α, α' – константы неоднородного обмена, $\alpha, \alpha' \sim a^2 \delta$, $\alpha - \alpha' > 0$ (a – постоянная решетка). При достаточно низких температурах можно считать $\mathbf{M}_1^2 = \mathbf{M}_2^2 = M_0^2 = \text{const}$. В основном состоянии векторы $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2$ антипараллельны.

При физически оправданных допущениях уравнения Ландау – Лифшица антиферромагнетика сводятся к эффективной модели [25, 27]:

$$\left[\mathbf{I} \times \left(c^{-2} \partial_t^2 - \partial_x^2 - \partial_y^2 - \partial_z^2 \right) \mathbf{I} \right] = 0, \quad \mathbf{I}^2 = 1. \quad (1.3.2)$$

Здесь $\mathbf{I} = (\mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2)/2M_0$ – нормированный вектор антиферромагнетизма, $c = \gamma M_0 \sqrt{2\delta(\alpha - \alpha')}$ – минимальная фазовая скорость спиновых волн линейной теории, γ – магнитомеханическое отношение. Вектор ферромагнетизма \mathbf{m} выражается через \mathbf{I} и его производные (см. [25], а также главу 2 этой книги):

$$\mathbf{m} = \frac{\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2}{2M_0} \approx -\frac{1}{2\delta\gamma M_0} [\mathbf{I} \times \partial_t \mathbf{I}]. \quad (1.3.3)$$

В основном состоянии $\mathbf{m} = 0$ и энергия антиферромагнетика вырождена по направлениям вектора \mathbf{I} .

Двумерные статические распределения поля \mathbf{I} являются решениями уравнения

$$[\mathbf{I} \times \Delta \mathbf{I}] = 0, \quad \mathbf{I}^2 = 1, \quad (1.3.4)$$

где $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$. Такое же уравнение описывает двумерные конфигурации в изотропном ферромагнетике (в этом случае \mathbf{I} характеризует намагниченность среды, см. формулу (1.2.24)) и распределения вектора директора в нематических жидких кристаллах [31]. Ввиду инвариантности модели (1.3.2) относительно преобразований Лоренца, ее решения типа волн стационарного профиля $\mathbf{I}(x, \tau)$, где $\tau = (y - vt)/\sqrt{1 - v^2/c^2}$, могут быть найдены интегрированием уравнения, буквально совпадающего с (1.3.4):

$$[\mathbf{I} \times (\partial_x^2 + \partial_\tau^2) \mathbf{I}] = 0, \quad \mathbf{I}^2 = 1.$$

В двухподрешеточных антиферромагнетиках всегда найдутся трансляции, которые переставляют магнитные подрешетки, при этом вектор антиферромагнетизма \mathbf{I} переходит в $-\mathbf{I}$. Используя математическую терминологию, можно сказать, что вектор антиферромагнетизма $\mathbf{I}(x, y)$ определяет непрерывное отображение плоскости (x, y) на сферу: $\mathbf{I}^2 = 1$ с отождествленными диаметрально противоположными точками, так как неоднородные состояния с векторами $\mathbf{I}(x, y)$ и $-\mathbf{I}(x, y)$ физически неразличимы. Среди многообразия двумерных магнитных неоднородностей антиферромагнетиков особое место занимают линейные дефекты – дисклинации, исследуемые рядом авторов [66–68]. Линии дисклинации соответствует особая линия (точка в плоскости (x, y)), на которой вектор $\mathbf{I}(x, y)$ не определен.

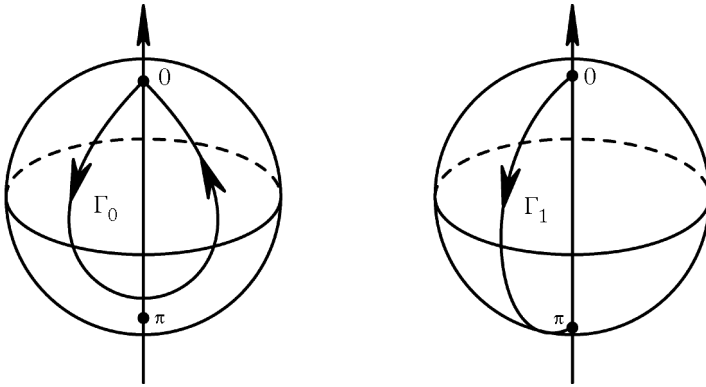


Рис. 1.8. Два топологически разных типа траекторий Γ_0 и Γ_1 , которые вычерчивает вектор $\mathbf{I} = (\sin\Theta\cos\Phi, \sin\Theta\sin\Phi, \cos\Theta)$ на сфере $\mathbb{P}^2 = 1$ при обходе замкнутого контура γ в (x, y) -плоскости

Характер особенности устанавливается при рассмотрении осуществляемого функцией $\mathbf{I}(x, y)$ отображения контура γ , окружающего особую точку в плоскости (x, y) , на контур Γ в пространстве вырождения (на сфере $\mathbb{P}^2 = 1$). Любой контур Γ в пространстве вырождения непрерывной деформацией (гомотопией) можно стянуть либо к контуру Γ_0 (гомотопному нулю), либо к контуру Γ_1 , соединяющему диаметрально противоположные точки сферы (рис. 1.8).

Таким образом, топологический анализ показывает, что имеется два класса дисклинаций, характеризующихся замкнутыми контурами Γ_0 и Γ_1 . Все контуры Γ одного класса, а значит, все конфигурации векторных полей $\mathbf{I}(x, y)$ дисклинаций этого класса, можно непрерывно продеформировать друг в друга. В то же время векторные поля $\mathbf{I}(x, y)$ дисклинаций класса Γ_1 (в отличие от дисклинаций Γ_0) невозможно непрерывной деформацией (не разрушая упорядоченного состояния в большом объеме вещества) преобразовать в однородное распределение вектора $\mathbf{I}(x, y)$. Поэтому дисклинации класса Γ_1 называют топологически устойчивыми. Подобно дисклинациям в нематических жидких кристаллах [31], дисклинации в антиферромагнетике можно охарактеризовать числом q . При обходе особой линии по замкнутому контуру γ в координатном пространстве вектор \mathbf{I} совершает q оборотов. Ясно, что все дисклинации, имеющие целый (полуцелый) индекс q , относятся к классу Γ_0 (к классу Γ_1). В теории нематических жидких кристаллов целое число $2q$ называют индексом Франка, а целое или полуцелое число q – порядком дисклинации.

Обсудим вначале вихри в ферромагнетиках и дисклинации в антиферромагнетиках, для которых векторный параметр порядка \mathbf{I} лежит в одной плоскости, например:

$$\mathbf{I}^{(0)}(x, y) = (\cos \Phi(x, y), \sin \Phi(x, y), 0). \quad (1.3.5)$$

Для плоскостных конфигураций (1.3.5) нелинейное уравнение (1.3.4) сводится к линейному уравнению Лапласа:

$$\Delta \Phi = 0.$$

Простейшее вихревое состояние соответствует следующему его решению:

$$\Phi(x, y) = q\varphi. \quad (1.3.6)$$

Здесь $\varphi = \arg(x + iy)$ – полярный угол, $q = \text{const}$. Для строго плоскостных конфигураций (1.3.5) пространством параметра порядка $\mathbf{I}^{(0)}$ является окружность единичного радиуса S^1 . В плоскости (x, y) рассмотрим замкнутый контур γ , окружающий особую точку $(x, y) = (0, 0)$ решения (1.3.6). Изменение фазы $\Phi(x, y)$ при обходе контура γ оказывается отличным от нуля:

$$\oint_{\gamma} (\nabla \Phi \cdot d\mathbf{r}) = 2\pi q. \quad (1.3.7)$$

В ферромагнетиках поле намагниченности (1.3.5) должно быть однозначным, поэтому в (1.3.7) число q принимает целочисленные значения: $q = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Решение (1.3.5), (1.3.6) при $q = \pm 1, \pm 2, \dots$ описывает простейшие магнитные вихри в ферромагнетиках. Название пришло из гидродинамики, где потенциал поля скорости плоского стационарного течения идеальной жидкости также удовлетворяет уравнению Лапласа [69]. В антиферромагнетиках поле (1.3.5) описывает не намагниченность среды, а распределение вектора антиферромагнетизма. Поскольку в антиферромагнетиках состояния с векторами $\mathbf{I}(x, y)$ и $-\mathbf{I}(x, y)$ физически неразличимы, число q принимает значения $q = 0, \pm 1/2, \pm 1, \pm 3/2, \pm 2, \dots$. Когда $q \neq 0$, решение (1.3.5), (1.3.6) описывает дисклинацию порядка q в антиферромагнетике. Далее для единообразия будем говорить о плоских магнитных вихрях в ферромагнетике или дисклинациях в антиферромагнетике с топологическим зарядом q . Отметим, что, если по каким-либо причинам невозможен выход вектора $\mathbf{I}^{(0)}(x, y)$ из плоскости xOy , то строго плоскостные вихревые конфигурации (1.3.5) с зарядом $q \neq 0$ всегда топологически устойчивы. Исследованию влияния двумер-

ных вихрей на топологические фазовые переходы посвящена обширная литература [4–7].

Разбиение магнетиков на магнитные подрешетки чувствительно к образованию дефектов немагнитной природы в кристаллической структуре. Например, наличие дислокаций в кристалле двухподрешеточного антиферромагнетика разрушает топологию атомных плоскостей и приводит к появлению магнитных дисклинаций [66, 67]. Такие дефекты были смоделированы и наблюдались методами спин-поляризованной сканирующей туннельной спектроскопии в тонких пленках хрома [70]. Грань (0, 0, 1) хрома содержала моноатомные ступени (террасы). На соседних террасах направления намагниченности были антипараллельны. При обрыве одной из ступеней в системе полосовых террас возникла дислокация. Это породило спиновые фрустрации области обрыва ступени, которые и вели к образованию двумерной магнитной дисклинации на поверхности хрома.

«Неплоскостные» дисклинации антиферромагнетиков, имеющие одинаковый порядок, различаются энергией и другими физическими характеристиками, поэтому для более детальной классификации дисклинаций необходимо найти явные выражения векторных полей $\mathbf{I}(x, y)$, минимизирующие функционал энергии. Решение этой задачи связано с точным интегрированием существенно нелинейного дифференциального уравнения в частных производных (1.3.4) и в настоящее время может быть реализовано только с использованием метода обратной задачи рассеяния или его модификаций. Далее изложены результаты анализа возбужденных состояний плоскостных вихрей в изотропном ферромагнетике (дисклинаций в двухподрешеточном антиферромагнетике) [71–73].

Как и эффективная модель одномерной динамики ферримагнетика, U – V -пара для которой была независимо найдена в работах [71, 74, 75] и описана в [25], модель (1.3.4) является интегрируемой. Она допускает представление в форме условия совместности следующей системы линейных дифференциальных уравнений:

$$\partial_x \chi = -(\gamma A + \delta B) \chi \equiv U(\lambda) \chi, \quad \partial_y \chi = -(\delta A - \gamma B) \chi \equiv V(\lambda) \chi;$$

$$A = \frac{i}{2} [\mathbf{1} \times \partial_y \mathbf{1}]_a \sigma_a, \quad B = \frac{i}{2} [\mathbf{1} \times \partial_x \mathbf{1}]_a \sigma_a, \quad \hat{l} = l_a \sigma_a, \quad (1.3.8)$$

где коэффициенты γ, δ – рациональные функции параметра λ :

$$\delta(\lambda) = \frac{2}{1 + \lambda^2}, \quad \gamma(\lambda) = \frac{2\lambda}{1 + \lambda^2}.$$

Из представления (1.3.8) следует, что матрица $\hat{l} = l_a \sigma_a$ выражается через матричную функцию $\chi(\lambda = 0) : \hat{l} \equiv l_a \sigma_{ak} = \chi(\lambda = 0)$. Выполнение условий $l_k^* = l_k$, $\mathbf{I}^2 = 1$ гарантируют дополнительные ограничения на выбор решений $\chi(\lambda)$:

$$\chi^+(\lambda^*) = \chi^{-1}(\lambda), \quad \chi(\lambda = \infty) = I, \quad \chi(-\lambda^{-1}) = \hat{l}\chi(\lambda), \quad (1.3.9)$$

которые не противоречат системе (1.3.8).

Схема построения солитонных решений модели (1.3.4) обсуждалась в [25] (подраздел 6.5). В контексте процедуры «одевания» для получения солитонных состояний на фоне плоскостной дисклинации выберем (1.3.5), (1.3.6) в качестве «затравочного» решения модели (1.3.4). Тогда решением вспомогательной линейной системы будет

$$\chi_0(\lambda) = \exp \left\{ -\frac{i q \sigma_3}{1 + \lambda^2} [\varphi + \lambda \ln(r/r_1)] \right\} \left(\frac{\lambda I + i \sigma_1}{\lambda + i} \right),$$

где $r^2 = x^2 + y^2$, r_1 – постоянная интегрирования. Зависящий от параметра λ множитель введен для выполнения редукций (1.3.9). Он несуществен для вычисления поля $\mathbf{I}(x, y)$, поскольку приводит лишь к изменению постоянных интегрирования. Окончательная формула для N -солитонных решений имеет вид

$$l_k \sigma_k = W(\lambda = 0) l_n^{(0)} \sigma_n; \quad W(\lambda)_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} + \sum_{k,j=1}^{2N} \frac{(m_j)_\alpha (m_k)_\beta^*}{\lambda - \lambda_k} \frac{\partial \ln \det \|d\|}{\partial d_{kj}}. \quad (1.3.10)$$

Здесь $\|d\|$ – матрица $2N \times 2N$ с элементами $d_{kj} = (\mathbf{m}_k^* \cdot \mathbf{m}_j) (\lambda_k - \lambda_j^*)^{-1}$, $\mathbf{m}_k = \chi_0(\lambda_k^*) \mathbf{c}_k$, $\mathbf{m}_{k+N} = l_n^{(0)} \sigma_n \mathbf{m}_k$, $\lambda_{k+N} = -\lambda_k^{-1}$ (\mathbf{c}_k – произвольные постоянные комплексные векторы, λ_k – комплексные числа) [25]. Из формул (1.3.10) следует, что при произвольных значениях λ_k вектор $\mathbf{I}(x, y)$ – неоднозначная функция полярного угла φ . Нетрудно показать, что, полагая

$$\lambda_k = i \varepsilon_k \sqrt{1 - 2q/n_k}, \quad (n_k - q)^2 > q^2, \quad \varepsilon_k = \pm 1$$

(n_k – целое число), получаем однозначные (при целых значениях q) или двужначные (при полуцелых q) решения. Таким образом, мультисолитонные решения дисклинационного типа параметризуются (помимо постоянных \mathbf{c}_k) целыми числами n_k ($k = 1, 2, \dots, N$). Далее

показано, что это обстоятельство приводит к квантованию их полной энергии.

Приведем явный вид односолитонного решения ($N = 1$):

$$l_3 = \frac{2q \sin \Psi \operatorname{sh} S}{\tau (n_1 - q)}, \quad l_1 + i l_2 = \frac{1}{\tau} \exp(iq\varphi) \left[\operatorname{ch}^2 S - \left(1 + \frac{q^2}{(n_1 - q)^2} \right) \sin^2 \Psi + \frac{iq}{n_1 - q} \sin 2\Psi \right]. \quad (1.3.11)$$

Здесь $\tau = \operatorname{ch}^2 S - n_1(n_1 - 2q)(n_1 - q)^{-2} \sin^2 \Psi$, $\Psi = (q - n_1)\varphi + \Psi_0$, $S = S_0 - n_1 \varepsilon_1 \sqrt{1 - 2q/n_1} \ln(r/r_1)$, S_0, Ψ_0 – вещественные постоянные. Отметим, что решение (1.3.11) в начале координат и при $r \rightarrow \infty$ имеет асимптотику плоскостной дисклинации порядка q : $l_3 \rightarrow 0$, $l_1 + i l_2 \rightarrow \exp(iq\varphi)$. Аналогичное утверждение справедливо для всех мультисолитонных решений. Решению (1.3.11) отвечает степенное поведение по переменной r , характерное для алгебраических солитонов. На окружности радиуса $r = r_1 \exp\{S_0/n_1 \varepsilon_1 \sqrt{1 - 2q/n_1}\}$ компонента l_3 обращается в нуль.

Абсолютная величина l_3 максимальна на расстояниях r , удовлетворяющих уравнению

$$\operatorname{sh} \left[S_0 - n_1 \varepsilon_1 \sqrt{1 - 2q/n_1} \ln(r/r_1) \right] = \pm \frac{q}{n_1 - q},$$

и при $\varphi = (\pi/2 + k\pi - \Psi_0)/(q - n_1)$, где k – целое число, достигает предельных значений ± 1 . Распределение l_3 для $q = 1/2$, $n = 3$, $\Psi_0 = 1/2$ представлено на рис. 1.9. На правом из них вдоль штриховой линии поле l_3 претерпевает физически не наблюдаемый скачок: $l_3 \rightarrow -l_3$. На левом рисунке этот скачок происходит вдоль выделенной темным вертикальной грани. Для сравнения на рис. 1.10 изображена поверхность $l_3 = l_3(x, y)$ для конфигурации с $q = 1$, $n = 3$, $\Psi_0 = 0$, которая не имеет разрывов поля l_3 .

Нетрудно проверить, что энергия конфигурации (1.3.11) может быть представлена в форме

$$E = (\alpha - \alpha') M_0^2 \int d^2 \mathbf{r} (\partial_\mu \mathbf{l} \cdot \partial_\mu \mathbf{l}) = (\alpha - \alpha') M_0^2 \int d^2 \mathbf{r} \left\{ q^2 (\partial_\mu \varphi)^2 + \frac{8q^2}{r^2} \left[\frac{\beta \sin \Psi \operatorname{ch} S}{\operatorname{ch}^2 S - \beta^2 \sin^2 \Psi} \right]^2 \right\},$$

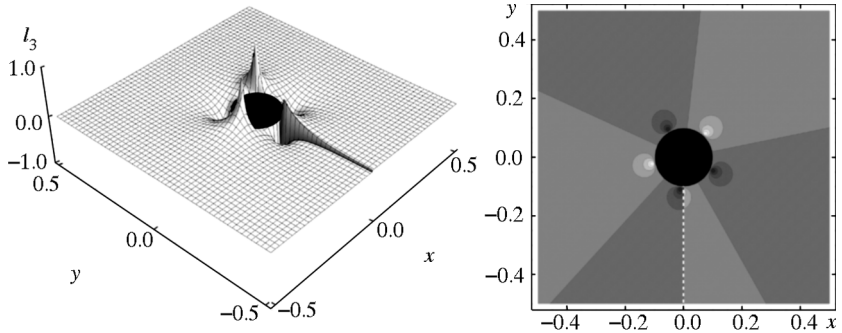


Рис. 1.9. Поверхность $l_3 = l_3(x, y)$ для возбужденных состояний дисклинации с $q = 1/2$, $n = 3$, $\Psi_0 = 1/2$.

Справа изображены области на плоскости (x, y) с положительными (светлые цвета) и отрицательными (темные цвета) значениями компоненты l_3 . Черный кружок отвечает ядру дефекта ($r < r_1 = 1$), где континуальное приближение несправедливо

где $\beta = \sqrt{n_1(n_1 - 2q)} / (q - n_1)$, $\beta^2 < 1$. Первое слагаемое в фигурной скобке описывает сингулярный вклад от плоскостной дисклинации (1.3.5), (1.3.6). Он приводит к логарифмическим расходимостям энергии в ядре дисклинации (при $r = 0$) и на пространственной бесконечности. Регуляризуем расходимости, вводя внешние и внутренние параметры обрезания (размер кристалла R и постоянную решетки a) точно также, как это делается в теории дислокаций [31, 53]. При вычислении конечного солитоноподобного вклада в энер-

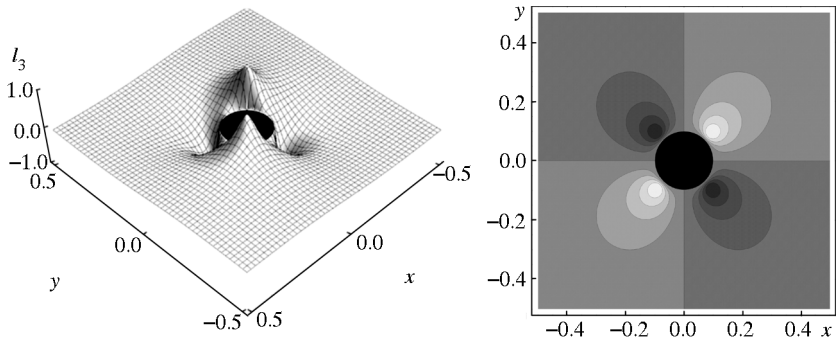


Рис. 1.10. Поверхность $l_3 = l_3(x, y)$ для возбужденных состояний дисклинации с $q = 1$, $n = 3$, $\Psi_0 = 0$, $r_1 = 1$

гию от второго слагаемого полезно перейти от интегрирования по координатам x, y к новым переменным S, Ψ . Якобиан перехода имеет вид

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(S, \Psi)} = -\varepsilon_1 [n_1(n_1 - 2q)]^{-1/2} (q - n_1)^{-1} r^2.$$

Непосредственные вычисления табличных интегралов [76] сначала по переменной S , а затем по Ψ дают

$$E = 2\pi(\alpha - \alpha') M_0^2 \left[q^2 \ln \frac{R}{a} + 8\sqrt{n_1(n_1 - 2q)} \right]. \quad (1.3.12)$$

Первое слагаемое в (1.3.12) представляет собой вклад плоскостной дисклинации порядка q . Второе слагаемое квантует по «уровням» энергии дисклинации различной внутренней структуры с одинаковым индексом Франка $2q$.

Как отмечалось ранее, с топологической точки зрения при целых значениях q «неплоскостная» структура (1.3.11) нестабильна. Это утверждение подтвердим анализом распределения намагниченности:

$$\begin{aligned} \mathbf{I}(x, y) &= (\sin \Theta \cos \Phi, \sin \Theta \sin \Phi, \cos \Theta), \\ \Theta &= 2\text{arctg}(r/R), \quad \Phi = \varphi \end{aligned} \quad (1.3.13)$$

в цилиндре большого радиуса R . Конфигурация (1.3.13) представляет частный случай вихрей Белавина – Полякова с зарядом $q = 1$ и соответствует выбору $v = z/R$ в формулах (1.2.25). При $r = R$ структура (1.3.13) совпадает с плоскостным вихрем (1.3.5), (1.3.6), но в отличие от (1.3.11) она не имеет особенности при $r = 0$. Этот факт известен как «вытекание» векторного поля \mathbf{I} в третье измерение вблизи начала системы координат [31]. Структура (1.3.13) более устойчива, поскольку ее энергия на единицу длины $E = 4\pi(\alpha - \alpha') M_0^2$ может быть меньше энергии распределения (1.3.11) с $q = 1$.

В заключение обсудим связь вспомогательной системы (1.3.8) с условиями дуальности Белавина – Полякова (1.2.32), которые для модели (1.3.4) принимают вид:

$$\partial_x \mathbf{I} = \pm [\mathbf{I} \times \partial_y \mathbf{I}], \quad \partial_y \mathbf{I} = \mp [\mathbf{I} \times \partial_x \mathbf{I}]. \quad (1.3.14)$$

Покажем, что решения Белавина – Полякова связаны со специальным случаем (справедливым для ограниченного числа U - V -пар),

когда полюсы матриц $U(\lambda)$, $V(\lambda)$ линейной системы (1.3.8) совпадают с полюсами ее решений $\chi(\lambda)$. В данном случае полюсы матриц $U(\lambda)$, $V(\lambda)$ расположены в точках $\hat{\lambda} = \pm i$.

Прежде всего отметим, что выполнение условий $l_k^* = l_k$, $\mathbf{P} = 1$ обеспечивается дополнительными ограничениями на выбор решений $\chi(\lambda)$ системы (1.3.8):

$$\chi^+(\lambda^*) = \chi^{-1}(\lambda), \quad \chi(\lambda = \infty) = I, \quad \chi(-\lambda^{-1}) = \pm \hat{l} \chi(\lambda), \quad \hat{l} = \pm \chi(\lambda = 0). \quad (1.3.15)$$

При инволюции (1.3.15) точки $\lambda = \pm i$ остаются неподвижными, поэтому можно пытаться искать специальное решение системы (1.3.8) в виде

$$\chi(\lambda) = I + \frac{A}{\lambda - i}.$$

В этом случае ограничения (1.3.15) полностью определяют элементы матрицы A , а значит, и алгебраическую структуру функции $\chi(\lambda)$:

$$\chi(\lambda) = \frac{1}{\lambda - i} (\lambda I \mp i \hat{l}). \quad (1.3.16)$$

Подстановка выражения (1.3.16) в систему (1.3.8) сразу приводит к уравнениям Белавина – Полякова (1.3.14) для расчета $\mathbf{I}(x, y)$.

Важно, что решения Белавина – Полякова образуют замкнутый класс. Если использовать их в качестве «затравочных» решений, то изложенная в этом разделе процедура «одевания» не дает новых магнитных вихрей. А именно, односолитонные состояния, полученные «одеванием» частных решений

$$l_1^{(0)} + i l_2^{(0)} = \frac{2v}{1 + |v|^2}, \quad l_3^{(0)} = \frac{1 - |v|^2}{1 + |v|^2},$$

где $v = v(z)$, $z = x + iy$, представляют собой решения того же вида с заменой

$$v \rightarrow \tilde{v} = \frac{av + b}{cv + d}, \quad a, b, c, d = \text{const}.$$

1.4. СПИРАЛЬНЫЕ СТРУКТУРЫ В ДВУМЕРНОЙ МОДЕЛИ ГЕЙЗЕНБЕРГА

...Все это находится в уравнениях, только у нас нет еще способа вытащить это оттуда.

Р. Фейнман

«Спираль с древнейших времен – символ жизненной силы как на уровне Космоса, так и на уровне микрокосмоса. Спиральные формы встречаются в природе очень часто: от галактик до водоворотов и смерчей, от раковин моллюсков до рисунков на человеческих пальцах и (как обнаружила наука) двойной спирали молекулы ДНК, содержащейся в каждой клетке живого организма. В искусстве спираль – один из самых распространенных декоративных узоров – от Европы (двойные спирали в кельтской традиции или спирали на римских капителях) до Тихого океана (спиральная резьба маори в Новой Зеландии и татуировки островитян в Полинезии). Резьба маори основана на расположении листьев папоротника, что демонстрирует связь спиральных узоров и природных феноменов. Именно эта связь зачастую определяет символизм спирали, хотя ее многозначность так велика, что иногда требуются особые ключи, чтобы расшифровать ее значение. Вырезанные на мегалитических памятниках спирали изображают путешествие по лабиринтам загробного мира и дают надежду на возможное возвращение оттуда... Противоположные силы, наглядно присутствующие в водоворотах, смерчах и языках пламени, напоминают о восходящей, нисходящей или вращающейся энергии, которая управляет Космосом. Спираль, сочетающая в себе форму круга и импульс движения, также является символом времени, циклических ритмов сезонов года, рождения и смерти, фаз «старения» и «роста» Луны, а также самого Солнца. Сжатая спиральная пружина – символ скрытой силы, как и змеобразный клубок энергии... Спираль часть плавной и бесконечной линии – символизирует также развитие, продолжение, непрерывность, центростремительное и центробежное движение, ритм дыхания или самой жизни» (Дж. Тресиддер. Словарь символов. М.: ФАИР-ПРЕСС, 2001. С. 159).

1.4.1. Конформная инвариантность модели и построение решений

В физике часто случалось, что существенный успех был достигнут проведением последовательной аналогии между несвязанными по виду явлениями.

А. Эйнштейн

В обменном приближении уравнение Ландау – Лифшица для двумерных статических распределений намагниченности в ферромагнетике:

$$\left[\mathbf{n} \times \left(\partial_x^2 + \partial_y^2 \right) \mathbf{n} \right] = 0, \quad \mathbf{n}^2 = 1, \quad (1.4.1)$$

обладают замечательным свойством – конформной инвариантностью. Пусть $\mathbf{n}(x, y)$ – некоторое решение модели (1.4.1). Прямыми вычислениями нетрудно проверить, что векторные функции $\mathbf{n}(a(x, y), b(x, y))$, полученные из $\mathbf{n}(x, y)$ заменой $(x, y) \rightarrow (a(x, y), b(x, y))$, будут новыми решениями той же модели, если поля $a(x, y), b(x, y)$ удовлетворяют уравнениям

$$\Delta a = 0, \quad \Delta b = 0; \quad \partial_\mu a \partial_\mu b = 0, \quad (\partial_\mu a)^2 = (\partial_\mu b)^2, \quad (1.4.2)$$

где $\Delta = (\partial_x^2 + \partial_y^2)$, по дважды повторяющимся индексам $\mu = 1, 2$ подразумевается суммирование. Уравнения (1.4.2) удобно переписать в терминах комплексного поля $\Omega = a + ib$:

$$\partial_z \partial_{\bar{z}} \Omega = 0, \quad \partial_z \Omega \partial_{\bar{z}} \Omega = 0, \quad z = x + iy, \quad \bar{z} = x - iy, \quad (1.4.3a)$$

тогда они эквивалентны соотношениям $\partial_z \Omega = 0$ или $\partial_{\bar{z}} \Omega = 0$, которые определяют комплексный потенциал в гидродинамике несжимаемой жидкости.

Напомним (см., например: [77]), что для движения невязкой жидкости со скоростью \mathbf{V} условия несжимаемости и потенциальности имеют вид

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = 0, \quad (1.4.3б)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{V} = 0. \quad (1.4.3в)$$

Уравнение (1.4.3в) представляет необходимое и достаточное условие существования потенциала скоростей φ , такого что

$$\mathbf{V} = \operatorname{grad} \varphi. \quad (1.4.3г)$$

Для плоского установившегося течения жидкости $\mathbf{V} = (V_1(x, y), V_2(x, y))$ условие несжимаемости (1.4.3б) записывается в виде

$$\frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} = 0$$

и автоматически удовлетворяется, если компоненты скорости выражаются соотношениями

$$V_2 = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad V_1 = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \quad (1.4.3д)$$

через функцию тока Ψ . Сравнение (1.4.3г) и (1.4.3д) показывает, что потенциал скоростей и функция тока связаны уравнениями Коши–Римана

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}.$$

Эти соотношения позволяют ввести аналитическую функцию $\Omega(z)$ от переменной $z = x + iy$:

$$\Omega(z) = \varphi(x, y) + i\Psi(x, y),$$

которую называют *комплексным потенциалом течения*.

Изолированные особые точки аналитической функции $\Omega(z)$ имеют простую гидродинамическую интерпретацию. Так, комплексному потенциалу

$$\Omega(z) = \frac{N}{2\pi} \ln z, \quad N \in R,$$

соответствует поле скорости при наличии *источника (стока)* мощности N :

$$\mathbf{V} = \left(\frac{xN}{2\pi r^2}, \frac{yN}{2\pi r^2} \right).$$

Плоский *вихрь* с циркуляцией Γ описывается комплексным потенциалом

$$\Omega(z) = \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln z, \quad \Gamma \in R,$$

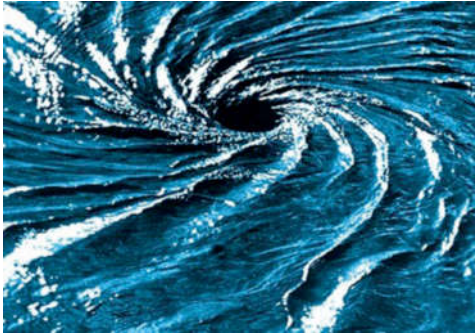


Рис. 1.11. Логарифмическая спираль на воде

и скоростью течения

$$\mathbf{V} = \left(-\frac{y\Gamma}{2\pi r^2}, \frac{x\Gamma}{2\pi r^2} \right).$$

Наконец, *вихреисточник* представляет собой объединение в одной точке источника (стока) и вихря. Он характеризуется комплексным потенциалом

$$\Omega(z) = \frac{1}{2\pi}(N + i\Gamma)\ln z$$

и полем скорости, которое часто наблюдают при вытекании воды через отверстие в ванне (рис. 1.11):

$$\mathbf{V} = \left(\frac{xN - y\Gamma}{2\pi r^2}, \frac{yN + x\Gamma}{2\pi r^2} \right).$$

Нетрудно проверить, что линиями $\Psi(x, y) = \text{const}$ (траекториями движущихся частиц) будут *логарифмические спирали*. В этом подразделе показано, что замеченный изоморфизм двух теорий полезен для аналитического описания широкого класса стационарных магнитных структур [78, 79].

В параметризации намагниченности \mathbf{n} сферическими углами Θ, Φ :

$$\mathbf{n} = (\sin \Theta \cos \Phi, \sin \Theta \sin \Phi, \cos \Theta) \quad (1.4.4)$$

уравнение (1.4.1) эквивалентно системе

$$\Delta \Theta = \frac{1}{2}(\partial_\mu \Phi)^2 \sin 2\Theta, \quad \partial_\mu \left[(\partial_\mu \Phi) \sin^2 \Theta \right] = 0, \quad (1.4.5)$$

возможные решения которой разбиваются на два класса.

Для первого класса

$$\partial_x \Theta \partial_y \Phi - \partial_y \Theta \partial_x \Phi \neq 0.$$

В этом случае из известных решений $\Theta_1(x, y)$, $\Phi_1(x, y)$ можно получать новые с помощью конформного преобразования $\Theta_1(a(x, y), b(x, y))$, $\Phi_1(a(x, y), b(x, y))$, где функции a, b удовлетворяют условиям (1.4.2). Обсудим открывающиеся возможности.

Рассмотрим вначале простейший случай, когда линии уровня полей $\Phi(x, y)$, $\Theta(x, y)$ ортогональны. Тогда $\partial_\mu \Phi \partial_\mu \Theta = 0$, и, следовательно, справедливо представление

$$\partial_\mu \Phi = F \varepsilon_{\mu\nu} \partial_\nu \Theta. \quad (1.4.6)$$

Без потери общности мы можем положить функцию F зависящей только от переменной Θ . Тогда, согласно второму уравнению в (1.4.5), Φ – гармоническая функция:

$$\Delta \Phi = 0. \quad (1.4.7)$$

Условия совместности равенств (1.4.5), (1.4.6), (1.4.7), приводят к уравнению для расчета $F(\Theta)$:

$$F^3(\Theta) \sin 2\Theta + 2\partial_\Theta F(\Theta) = 0,$$

которое легко интегрируется:

$$F^2(\Theta) = 2[C - \cos 2\Theta]^{-1} > 0, \quad C = \text{const}. \quad (1.4.8)$$

Тогда, согласно формулам (1.4.5), (1.4.6), (1.4.8), поле Θ определится уравнением

$$\Delta \Theta - \frac{(\partial_\mu \Theta)^2 \sin 2\Theta}{C - \cos 2\Theta} = 0.$$

После подстановки $\Theta = \Theta(a)$, где $a = a(x, y)$ – гармоническая функция ($\Delta a = 0$), оно упрощается:

$$\frac{d^2 \Theta}{d^2 a} - \frac{\sin 2\Theta}{C - \cos 2\Theta} \left(\frac{d\Theta}{da} \right)^2 = 0,$$

и допускает первый интеграл

$$\frac{d\Theta}{da} = \sqrt{(2C_2)^{-1} (C - \cos 2\Theta(a))}, \quad C_2 = \text{const} > 0.$$

Положим $C_2 = 1$, так как поле $a(x, y)$ определено с точностью до масштабных преобразований. Тогда вычисление $\Theta(a)$ равносильно решению уравнения динамики кругового маятника:

$$\frac{d^2\Theta}{d^2a} = \frac{1}{2}\sin 2\Theta, \quad (1.4.9)$$

а система (1.4.6) эквивалентна условиям Коши – Римана для функций Φ, a :

$$\partial_x \Phi = \partial_y a, \quad \partial_y \Phi = -\partial_x a. \quad (1.4.10)$$

Отсюда $\Omega = a + i\Phi$ – аналитическая функция переменной $z = x + iy$. В конечном счете решение исходной модели (1.4.1) свелось к интегрированию простой системы (1.4.9), (1.4.10). Решения уравнения (1.4.9) имеют вид

$$\cos \Theta(x, y) = \operatorname{sn}[a(x, y)/k, k], \quad 0 < k < 1; \quad (1.4.11)$$

$$\cos \Theta(x, y) = k \operatorname{sn}[a(x, y), k], \quad 0 < k < 1. \quad (1.4.12)$$

Здесь $\operatorname{sn}(u, k)$ – эллиптический синус Якоби с модулем k . Выражению (1.4.11) соответствует вращение маятника вокруг точки подвеса, а формула (1.4.12) описывает колебания маятника около этой точки.

Обсудим вначале решения (1.4.11). Требование однозначности распределения намагниченности (1.4.4) и свойство периодичности эллиптического синуса $\operatorname{sn}(u, k) = \operatorname{sn}(u \pm 4K, k)$ ($K = K(k)$ – полный эллиптический интеграл первого рода) приводят к важному выводу. После обхода по замкнутому контуру вокруг центра любого из магнитных дефектов приращение функции $\Omega(z)$ должно иметь вид

$$\delta\Omega = 4kKN + 2i\pi Q, \quad (1.4.13)$$

где N, Q – целые числа. Чтобы удовлетворить ограничению (1.4.13), выберем в качестве $\Omega(z)$ сумму логарифмических функций от z , описывающих вихресточники в гидродинамике. Это приводит к общему решению модели (1.4.1) для системы магнитных дефектов с центрами в точках $z = c_i$:

$$\Omega \equiv a(x, y) + i\Phi(x, y) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{2i}{\pi} kKN_i + Q_i \right) \ln(z - c_i) + w(z), \quad (1.4.14)$$

где $w(z)$ – произвольная аналитическая функция. При $w(z) = \text{const}$ структура и взаимодействие дефектов характеризуются $(4n + 3)$ параметрами. В пределе $k \rightarrow 1$ формула (1.4.11) упрощается: $\cos\Theta = th a$, и при $N_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) структура магнитных дефектов описывается многоинстантонными решениями Белавина – Полякова:

$$\exp\Omega = \text{ctg}(\Theta/2) \exp[i\Phi] = \prod_{i=1}^n (z - c_i)^{Q_i}.$$

Известно, что энергия многоинстантонной конфигурации не зависит от параметров c_i и тем самым от положений инстантонов. Это обстоятельство приводит к отсутствию взаимодействия между вихрями Белавина – Полякова.

1.4.2. Двумерные магнитные спирали обменного происхождения

Воображение важнее, чем знания. Знания ограничены, тогда как воображение охватывает целый мир, стимулируя прогресс, порождая эволюцию.

А. Эйнштейн

Изолированный магнитный дефект с дискретными параметрами $N \neq 0$, $Q \neq 0$ представляет собой спиральный вихрь с перпендикулярной к плоскости (x, y) компонентой намагниченности

$$n_3 = \text{sn} \left[\frac{Q}{k} \ln \frac{r}{r_0} - \frac{2K}{\pi} N(\varphi - \varphi_0), k \right] \quad (1.4.15)$$

и азимутальным углом

$$\Phi = Q(\varphi - \varphi_0) + \frac{2k}{\pi} K(k) N \ln \frac{r}{r_0}. \quad (1.4.16)$$

Здесь использованы полярные координаты

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arg(x + iy).$$

Компонента n_3 постоянна на кривых в плоскости (x, y) , которые являются логарифмическими спиралями: $r = C \exp[2kK(k)N\varphi/(\pi Q)]$.

Поскольку $kK(k)$ – монотонно возрастающая функция от k , параметр k определяет степень закрученности спирали. В дальнейшем решения вида (1.4.15), (1.4.16) будем называть спиральными вихрями.

Обсудим свойства симметрии модели, поясняющие, почему обменное взаимодействие приводит к формированию двумерных логарифмических спиралей. Уравнения (1.4.5) инвариантны относительно масштабных преобразований: $\bar{r} = r e^{\alpha}$ и вращений: $\bar{\varphi} = \varphi + \beta$ с параметрами α и β соответственно. Поэтому среди допустимых линий уровня функции $\Theta(x, y)$ должны быть инвариантные относительно замены $r \rightarrow e^{\alpha} r$, $\varphi \rightarrow \varphi + c\alpha$, где c – некоторое действительное число, α – параметр преобразования. Такая группа симметрии рассматривалась впервые, по-видимому, Озееном в гидродинамике [80] и была названа группой спиральных вращений. Равенство $\Theta(r, \varphi) = \Theta(r e^{\alpha}, \varphi + c\alpha)$ возможно только тогда, когда Θ является функцией от переменной $c \ln r - \varphi$. Это и приводит к логарифмическим спиральям для компоненты $n_3 = \cos \Theta(x, y)$ поля намагниченности.

По классификации работы [14], структура (1.4.15) соответствует спиральному домену, так как она может быть получена из полосовой доменной структуры с периодом $d = 4kK(k)$ в $(\ln r, \varphi)$ -плоскости процессом Вольтерра [81], включающим относительное смещение берегов разреза на Nd периодов, 2π -поворот и свободную релаксацию. Здесь и далее доменная структура и доменные границы связываются со знаком компоненты $n_3 = \cos \Theta(x, y)$ поля намагниченности. Во избежание недоразумений специально подчеркнем, что в рассматриваемых конфигурациях доменные стенки и доменные структуры по компоненте n_3 имеют обменное происхождение и обусловлены одновременно вихревым характером поля $\nabla \Phi$ и свойствами его «истечения» из некоторых точек. Указанные топологические особенности поля $\Phi(x, y)$ моделирует изменения микроструктуры и (или) материальных параметров магнитной среды на расстояниях порядка межатомного. Подробное обсуждение этих вопросов содержится в главе 5.

Для $N = 1$ решение (1.4.15) представляет собой два спиральных домена с противоположными направлениями намагниченности, разделенные двумя логарифмически-спиральными границами (рис. 1.12).

Ширина спиральных солитонов зависит от величины k и увеличивается с удалением от центра вихря. При $k \rightarrow 1$ ширина доменных границ стремится к нулю и спиральный вихрь приближается к двум доменам (с постоянными значениями намагниченности в них) с границей $\varphi = \varphi_0$, $\varphi = \varphi_0 + \pi$ (рис. 1.13).

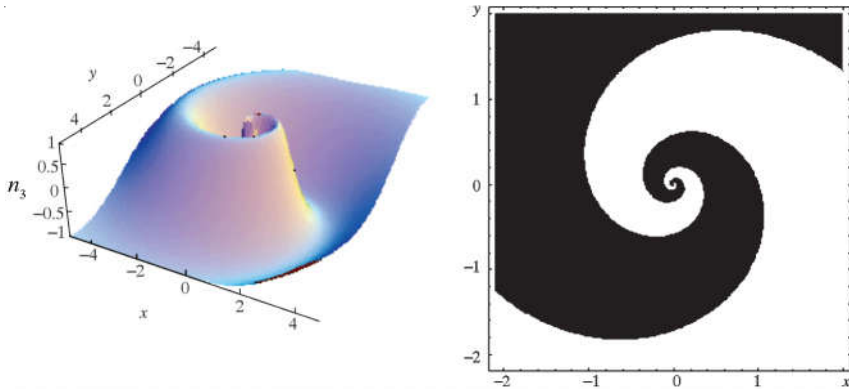


Рис. 1.12. Структура ядра (поверхность $n_3 = n_3(x, y)$), соответствующая однозаходной спирали ($N = 1, Q = 1, r_0 = 1, k = 1/2$). Справа изображены области на плоскости (x, y) с положительными (белый цвет) и отрицательными (черный цвет) значениями компоненты намагниченности n_3

Поверхность $n_3 = n_3(x, y)$ и конфигурация доменов для двухзаходной спирали представлены на рис. 1.14. При произвольном N решение (1.4.15) описывает N -заходную логарифмическую спираль, киральность которой (направление закручивания) определяется знаком произведения NQ .

Случаю $N = 0$ соответствует система концентрических (по переменной r) кольцевых доменов – магнитная «мишень» (рис. 1.15), которая является бесконечной полосовой доменной структурой по переменной $\ln r$. Влияние «анизотропного обмена» (спин-орбитальных взаимодействий) и кристаллографической анизотропии на структуру «мишеней» проанализировано численными методами в работе [82]. Показано, что поле одноосной анизотропии приводит к локализации этих объектов в областях конечного радиуса.

При $Q = 0$ компонента $n_3 = \cos\Theta$ намагниченности и азимутальный угол Φ описываются функциями вида $\Theta(\varphi)$, $\Phi = \Phi(r)$ (рис. 1.16). Такая зависимость

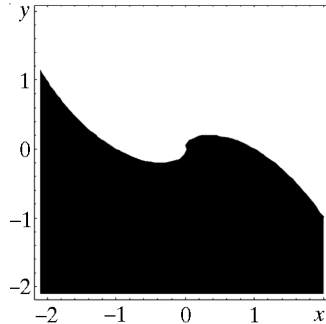


Рис. 1.13. Распределение n_3 компоненты намагниченности в спирали при $k = 0,97$

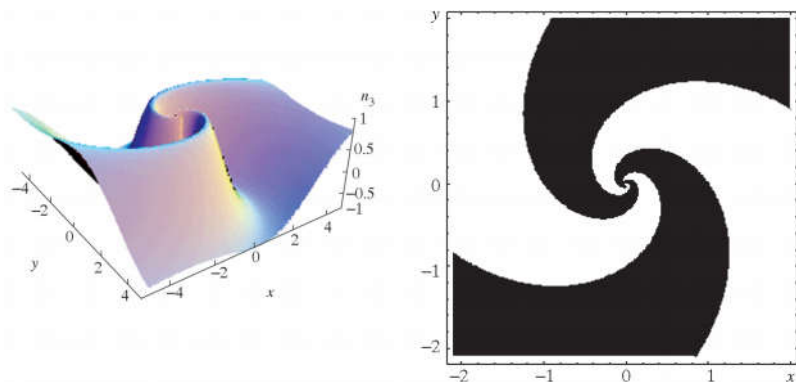


Рис. 1.14. Структура ядра двухзаходной спирали ($N = 2$, $Q = 1$, $r_0 = 1$, $k = 1/4$)

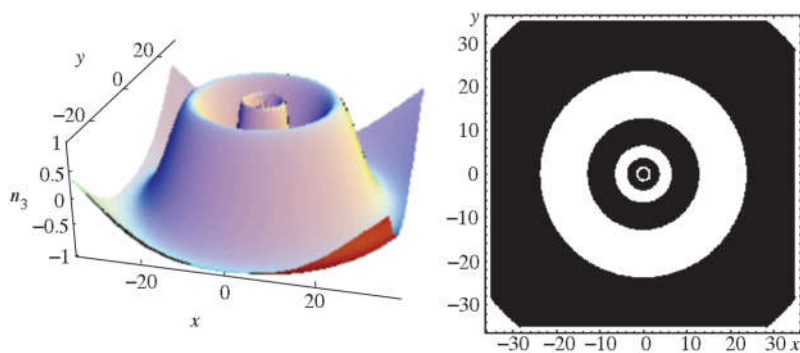


Рис. 1.15. Структура типа магнитной «мишени»

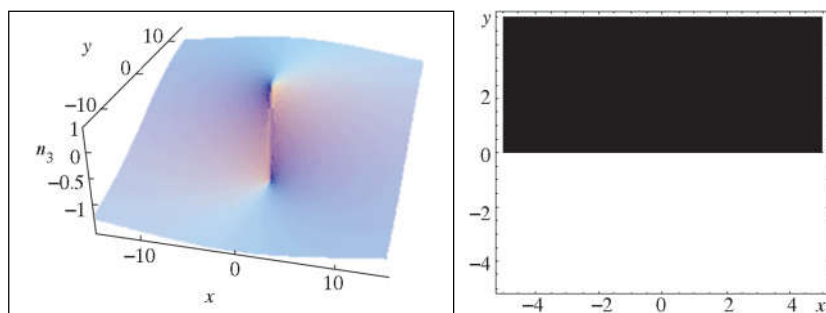


Рис. 1.16. Распределение n_3 компоненты намагниченности в структуре типа «архив»

противоположна той, что имеется у вихрей Белавина – Полякова: $\Theta = \Theta(r)$, $\Phi = \Phi(\varphi)$, поэтому рассматриваемую конфигурацию будем называть структурой типа «рхив» (прочтение слова «вихрь» справа налево).

Решения (1.4.12), (1.4.13) менее интересны, поскольку описывают спиральные структуры, в которых отсутствуют домены. В них значения $|n_3|$ всегда меньше параметра k ($0 < k < 1$).

Энергия спирального вихря

$$E = \frac{1}{2} \int d^2 \mathbf{r} (\partial_\mu \mathbf{n})^2,$$

как и других нелокализованных структур подобного типа (вихрей в гидродинамике, дислокаций и дисклинаций в кристаллах), логарифмически зависит от размера системы L и радиуса a ядра вихря (порядка постоянной решетки):

$$E = \frac{1}{k^2 \pi K(k)} [2E(k) - k'^2 K(k)] [\pi^2 Q^2 + 4k^2 N^2 K(k)^2] \ln \frac{L}{a}.$$

Здесь $E(k)$ – полный эллиптический интеграл второго рода и $N \neq 0$.

Каждая вихревая спираль характеризуется не только зарядом Q , но и числами N ее «рукавов», поэтому внутреннее строение спиральных вихревых диполей оказывается разнообразнее структуры вихревых диполей.

В отличие от многоинстантонных решений энергия многоспиральных конфигураций при $k \neq 1$ зависит от расстояний между центрами спиральных вихрей, что приводит к их взаимодействию. Рассмотрим некоторые типы спиральных диполей, состоящих из вихревых спиралей с параметрами (N_1, Q_1) и (N_2, Q_2) .

На больших расстояниях от центра любого диполя его поле описывает результирующий спиральный вихрь типа $(N_1 + N_2, Q_1 + Q_2)$. Диполь из двух одинаковых спиральных структур типа $(1, 1)$ образует на больших расстояниях двухзаходную спираль $(2, 2)$ (рис. 1.17, *a*), диполь с параметрами $(1, 1)$ и $(1, -1)$ – структуру «рхив» $(2, 0)$ (рис. 1.17, *б*), диполь с числами $(1, 1)$ и $(-1, 1)$ – магнитную «мишень» $(0, 2)$ (рис. 1.17, *в*). Взаимодействие двух вихрей с параметрами (N, Q) и $(-N, -Q)$ имеет характер притяжения. Соответствующее распределение намагниченности имеет локализованный характер и представлено на рис. 1.17, *г*. Его энергия не зависит от размеров системы L (на больших расстояниях плотность энергии убывает по закону $\propto r^{-4}$). Эта примечательная особенность указывает на возмож-

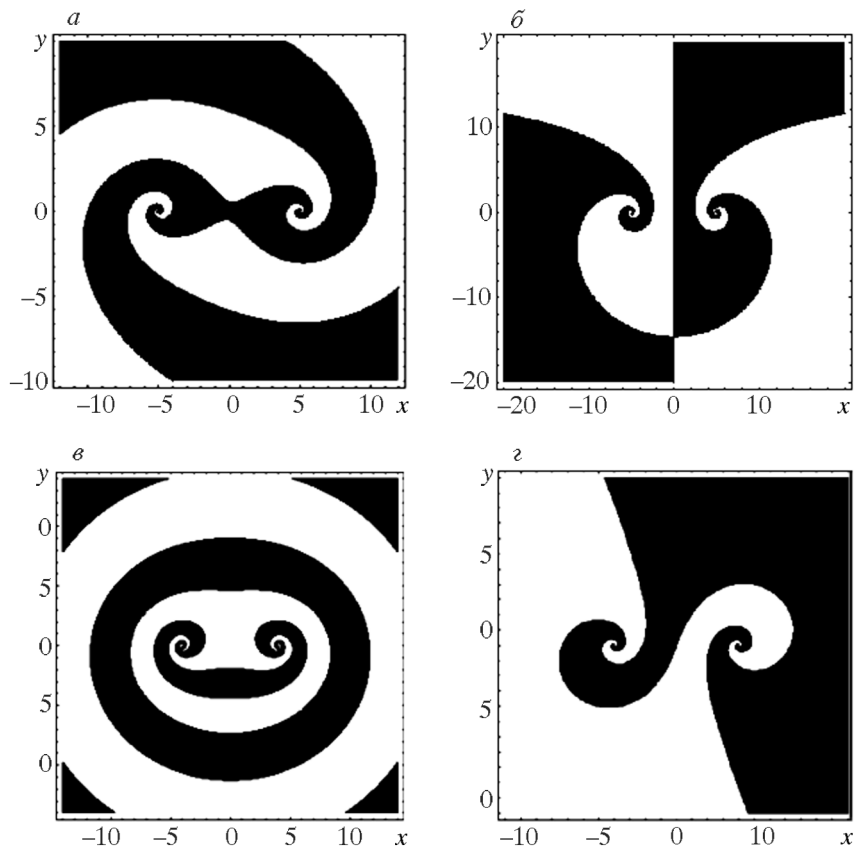


Рис. 1.17. Спиральные диполи, состоящие из двух однозаходных спиралей:
a – с параметрами $(N_1 = 1, Q_1 = 1)$ и $(N_1 = 1, Q_1 = 1)$; *б* – $(N_1 = 1, Q_1 = 1)$ и $(N_1 = 1, Q_1 = -1)$; *в* – $(N_1 = 1, Q_1 = 1)$
 и $(N_1 = -1, Q_1 = 1)$; *г* – $(N_1 = 1, Q_1 = 1)$ и $(N_1 = -1, Q_1 = -1)$

ный вклад спиральных диполей в термодинамику двумерных магнетиков.

Перейдем к обсуждению второго класса решений модели (1.4.5), когда

$$\partial_x \Theta \partial_y \Phi - \partial_y \Theta \partial_x \Phi = 0$$

и, следовательно, $\nabla \Phi \parallel \nabla \Theta$. В этом случае поле $\Phi(x, y)$ есть функция переменной $\Theta(x, y)$. Используем подстановку $\partial_\mu \Phi = f(\Theta) \partial_\mu \Theta$. Тогда

явные выражения для полей Θ , Φ определяются функцией f , которая, согласно (1.4.5), может быть найдена из уравнения Бернулли:

$$\sin \Theta \frac{df}{d\Theta} + 2f \cos \Theta + f^3 \sin^2 \Theta \cos \Theta = 0. \quad (1.4.17)$$

Общее решение уравнения (1.4.17) определяется однопараметрическим семейством

$$f(\Theta) = \frac{1}{\sqrt{c^2 \sin^4 \Theta - \sin^2 \Theta}} \quad (1.4.18)$$

с произвольной константой $c^2 > 1$. С учетом (1.4.18) исходную систему (1.4.5) можно представить в виде уравнения Лапласа

$$\Delta \left(\arccos \left[\frac{c \cos \Theta}{\sqrt{c^2 - 1}} \right] \right) = 0.$$

Отсюда следует, что углы Θ и Φ выражаются через гармоническую функцию $a(x, y)$:

$$\cos \Theta = \frac{\sqrt{c^2 - 1}}{c} \cos a, \quad \Phi = \arctg(c \operatorname{tga}) + \varphi_0, \quad \Delta a = 0. \quad (1.4.19)$$

Выберем в качестве гармонической функции

$$a(x, y) = \sum_i \alpha_i \ln \left(\frac{\sqrt{(x - x_{0i})^2 + (y - y_{0i})^2}}{R_i} \right) + \sum_i q_i \arctg \left(\frac{y - \tilde{y}_{0i}}{x - \tilde{x}_{0i}} \right). \quad (1.4.20)$$

По аналогии с гидродинамикой параметр α_i может быть назван «мощностью» источника поля $a(x, y)$ в точке (x_{0i}, y_{0i}) , целые числа q_i характеризуют «завихренность» поля в точке $(\tilde{x}_{0i}, \tilde{y}_{0i})$.

Отвечающие такому выбору решения (1.4.19) исходной модели (1.4.5) параметризуются набором вещественных чисел $\alpha_i, q_i, R_i, c, (x_{0i}, y_{0i}), (\tilde{x}_{0i}, \tilde{y}_{0i}), \varphi_0$. Параметр $c \geq 1$ управляет амплитудой выхода намагниченности из плоскости xy . Предельное значение $c = 1$ соответствует ХУ-модели ($\Theta = \pi/2$, $\Delta\Phi = 0$). Решения (1.4.20) могут быть названы малоамплитудными, поскольку угол Θ лежит в диапазоне $\pi/2 - \Theta_{\max} \leq \Theta < \pi/2 + \Theta_{\max}$ с максимальным значением $\Theta_{\max} = \arcsin \sqrt{c^2 - 1}/c$. Формулы (1.4.19), (1.4.20) объединяют несколько типов структур.

1. Плоскостные вихри ($c = 1$). Из общей формулы (1.4.19), соответствующей плоским спиральям с $\Theta = \pi/2$ и $\Phi = q\varphi + \alpha \ln(r/R)$, при $\alpha = 0$ получаем хорошо известные вихри Костерлица – Таулеса [6, 7], а при $q = 0$ – «источники» с $\Phi = \alpha \ln(r/R)$ [83].

2) Структуры с $\alpha \neq 0$, $q = 0$ и значениями углов

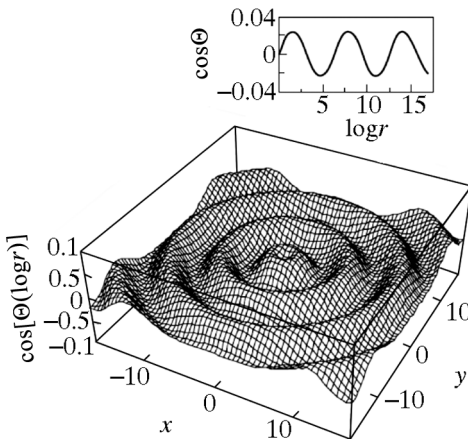
$$\cos \Theta = \frac{\sqrt{c^2 - 1}}{c} \cos \left(\alpha \ln \frac{r}{R} \right), \quad \Phi = \arctg \left[c \operatorname{tg} \left(\alpha \ln \frac{r}{R} \right) \right] + \varphi_0 \quad (1.4.21)$$

определяют так называемые «узельные» решения, подробный анализ которых дан в работах [84, 85].

Решение (1.4.21) справедливо на расстояниях r , много больших постоянной решетки a . Масштабный фактор R зависит от краевых условий на границе образца (при $r = L$). Поверхность $n_3 \equiv \cos \Theta(x, y)$ описывает логарифмически расходящиеся от точки $x = 0, y = 0$ кольцевые складки, которые нигде не достигают экстремальных значений ± 1 (рис. 1.18). В логарифмическом масштабе расстояние между соседними складками $2\pi/|\alpha|$. Представление о «спиновой текстуре» в плоскости xOy дает рис. 1.19.

3. Другим типом двумерных структур, определяемых соотношениями

$$\cos \Theta = \frac{\sqrt{c^2 - 1}}{c} \cos \left(\alpha \ln \frac{r}{R} + q\varphi \right), \quad \Phi = \arctg \left[c \operatorname{tg} \left(\alpha \ln \frac{r}{R} + q\varphi \right) \right] + \varphi_0, \quad (1.4.22)$$

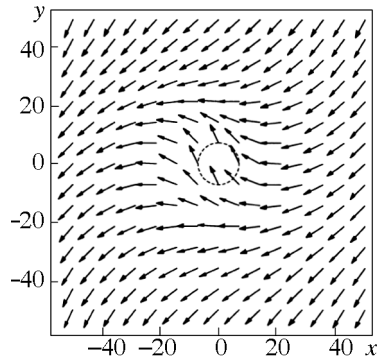


являются малоамплитудные двумерные спирали, которые отличаются от рассмотренных ранее только тем, что для них компонента намагниченности n_3 никогда не достигает значений ± 1 . От параметров α и

Рис. 1.18. Поверхность $n_3 = n_3(x, y)$. Используется логарифмический масштаб. На вставке представлено радиальное сечение поверхности

Рис. 1.19. Плоскостная «спиновая текстура» решения (1.4.21).

На пунктирной окружности указаны направления спинов, которые равноудалены от точки $x = 0, y = 0$



q зависят расстояние между витками спирали и число ее рукавов.

4. Наконец, при $\alpha = 0$ получаем внеплоскостной вихрь:

$$\cos \Theta = \frac{\sqrt{c^2 - 1}}{c} \cos(q\varphi),$$

$$\Phi = \arctg \left[c \operatorname{tg}(q\varphi) \right] + \varphi_0. \quad (1.4.23)$$

В отличие от инстантона его топологический заряд равен нулю. Отметим, что внеплоскостной вихрь не имеет аксиальной симметрии и у него отсутствует зависимость полярного угла Θ от переменной r .

В безразмерных переменных энергия конфигураций второго класса имеет простой вид

$$E = \frac{1}{2} \int d^2 \mathbf{r} (\partial_\mu \mathbf{n})^2 = \frac{1}{2} \int d^2 \mathbf{r} (\partial_\mu a)^2. \quad (1.4.24)$$

Используя соотношение (1.4.20) для функции a получаем выражение, аналогичное энергии системы логарифмически взаимодействующих плоских вихрей с заменой $q_i q_j$ на сумму $q_i q_j + \alpha_i \alpha_j$:

$$E = \pi \left\{ \sum_i (\alpha_i^2 + q_i^2) \ln \frac{L}{a} + \sum_{i,j (i \neq j)} (\alpha_i \alpha_j + q_i q_j) \ln \frac{L}{d_{ij}} \right\},$$

где $d_{ij} = \sqrt{(x_{0i} - x_{0j})^2 + (y_{0i} - y_{0j})^2}$ – расстояние между i -м и j -м вихреисточниками, L – размер системы, a – постоянная решетки. Отметим отсутствие перекрестных слагаемых вида $\alpha_i q_j$, означающее, что вихри и источники не взаимодействуют, а также тот факт, что энергия не зависит не только от R_p , но и от параметра c , определяющего амплитуду выхода спинов из плоскости xOy .

Структуры с параметрами (α, q) и $(-\alpha, -q)$ на расстоянии d , подобно плоским вихрям, образуют диполь с конечной энергией

$$E = 2\pi (\alpha^2 + q^2) \ln \frac{d}{a}.$$

Наконец, отметим, что, как и вихри Костерлица – Таулесса, найденные решения оказываются устойчивыми в своем классе решений [86]. Это утверждение вытекает из явного выражения для энергии спирали (1.4.24) и положительной определенности оператора Лапласа. В самом деле, пусть $\delta\varphi$ – малая вариация гармонического решения a , тогда

$$\begin{aligned} E[a + \delta\varphi] &= \frac{1}{2} \int d^2\mathbf{r} (\partial_\mu a + \partial_\mu \delta\varphi)^2 = \\ &= \frac{1}{2} \int d^2\mathbf{r} [(\partial_\mu a)^2 + 2\partial_\mu a \partial_\mu \delta\varphi + (\partial_\mu \delta\varphi)^2] = \\ &= \frac{1}{2} \int d^2\mathbf{r} [(\partial_\mu a)^2 + (\partial_\mu \delta\varphi)^2] > E[a]. \end{aligned}$$

1.5. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЛОКАЛИЗОВАННЫХ СТРУКТУР ДВУМЕРНОЙ ГЕЙЗЕНБЕРГОВСКОЙ РЕШЕТКИ

Часто говорят, что цифры управляют миром; по крайней мере, нет сомнения в том, что цифры показывают, как он управляется.

И. Гете

Электронные мозги будут ошибаться гораздо точнее.

Г. Лауб

Рассмотренные в предыдущих подразделах локализованные структуры являются метастабильными состояниями. В этом параграфе, следуя работам [86, 87], с помощью численных методов мы исследуем физические причины возникновения логарифмических и других спиральных структур в 2D-решеточной модели. Эти расчеты позволяют определить диапазон значений параметров локализованных структур и сравнить их с результатами континуальной модели.

Рассмотрим модель изотропного гейзенберговского ферромагнетика спина S с гамильтонианом

$$H = - \sum_{p,n} J_{pn} (\mathbf{S}_p \cdot \mathbf{S}_n). \quad (1.5.1)$$

Здесь S_p – спиновый оператор узла p двумерной решетки, при расчетах используется приближение ближайших соседей; a – расстояние между ближайшими соседями с константой обменного взаимодействия между ними $J_{pn} = J\delta_{n+a,n}$. Нелинейные стационарные уравнения модели для классических переменных $\{\Theta_p, \Phi_p\}$, параметризующих вектор S_p , имеют вид

$$\sum_n J_{np} \sin \Theta_n \cos \Theta_p \cos(\Phi_p - \Phi_n) + \sin \Theta_p \sum_n J_{np} \cos \Theta_n = 0; \quad (1.5.2)$$

$$\sum_n J_{np} \sin \Theta_n \sin \Theta_p \sin(\Phi_n - \Phi_p) = 0. \quad (1.5.3)$$

С целью описать метод, лежащий в основе численного моделирования на двумерной решетке, перепишем систему (1.5.2), (1.5.3) в форме, удобной для итерационной процедуры:

$$\sin \Phi_p = \pm \frac{\sum_n J_{np} \sin \Theta_n \sin \Phi_n}{\sqrt{\left(\sum_n J_{np} \sin \Theta_n \sin \Phi_n\right)^2 + \left(\sum_n J_{np} \sin \Theta_n \cos \Phi_n\right)^2}}; \quad (1.5.4)$$

$$\cos \Phi_p = \pm \frac{\sum_n J_{np} \sin \Theta_n \cos \Phi_n}{\sqrt{\left(\sum_n J_{np} \sin \Theta_n \sin \Phi_n\right)^2 + \left(\sum_n J_{np} \sin \Theta_n \cos \Phi_n\right)^2}}. \quad (1.5.5)$$

В ферромагнитном случае ($J > 0$) в правых частях равенств (1.5.4), (1.5.5) должен быть выбран верхний знак. Аналогичное уравнение для Θ_p имеет вид

$$\begin{aligned} & \cos \Theta_p = \\ & = \frac{\sum_n J_{np} \cos \Theta_n}{\sqrt{\left(\sum_n J_{np} \cos \Theta_n\right)^2 + \left(\sum_n J_{np} \sin \Theta_n \sin \Phi_n\right)^2 + \left(\sum_n J_{np} \sin \Theta_n \cos \Phi_n\right)^2}}. \end{aligned} \quad (1.5.6)$$

При вычислениях методом итераций выбирается стартовая конфигурация спинового поля \mathbf{S}_n , и в ходе линейного сканирования по решетке спин каждого узла последовательно выстраивается вдоль поля, создаваемого ближайшим окружением, содержащим как обновленные спины, так и не затронутые текущим ходом итераций. Это обеспечивает более быструю сходимость, чем синхронное глобальное обновление. Итерационный процесс заканчивается, если сумма на k -м шаге

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i,j=0}^N \left(\sin \Theta_{ij}^{(k)} - \sin \Theta_{ij}^{(k-1)} \right)^2 + \sum_{i,j=0}^N \left(\sin \Phi_{ij}^{(k)} - \sin \Phi_{ij}^{(k-1)} \right)^2}, \quad (1.5.7)$$

рассчитанная на четверти решетки, оказывается меньше величины $10^{-6} - 10^{-10}$. В формуле (1.5.7) использованы решеточные координаты для обозначения узельных индексов.

Наиболее трудная задача при вычислениях – выбор начальной конфигурации, которая релаксирует к требуемой спиновой конфигурации с подходящими граничными условиями. Детальное обсуждение стартовых конфигураций и граничных условий, необходимых для получения нужных спиновых конфигураций, ведется в каждом отдельном случае. Здесь лишь отметим, что они существенно различаются для вихревого, логарифмического и спирального спиновых упорядочений и их пар.

Другой важный момент численного моделирования – критерий согласия между установленной спиновой конфигурацией и соответствующим аналитическим решением. Для этого в [86] использовалась следующая схема сравнения.

1. Континуальная теория не применима к спинам, находящимся вблизи ядра вихря. В то же время вдали от ядра спиновые углы релаксационной спиновой конфигурации должны хорошо описываться формулами континуальной теории. Поэтому следует контролировать это согласие с наперед заданной точностью в области, где работает континуальное приближение.

2. Число независимых параметров в континуальном решении должно быть тем же самым, что и число степеней свободы, контролируемых при численном моделировании.

3. Релаксационная конфигурация не должна терять симметрии континуального решения, т.е. она должна иметь схожую зависимость от пространственных координат (r ; φ).

4. Наконец, релевантность релаксационной конфигурации удостоверяется расчетом полной энергии

$$E = \frac{S^2}{2} \sum_{n,p} J_{np} \left[\sin \Theta_n \cos \Theta_p \cos(\Phi_p - \Phi_n) + \cos \Theta_p \cos \Theta_n \right]$$

и сравнением с результатом континуальной теории.

1.5.1. Логарифмический источник. XY-модель

Изложим результаты численного моделирования логарифмического источника для планарной XY-модели. Статические углы Φ_m удовлетворяют дискретным нелинейным уравнениям (1.5.2), (1.5.3), где следует положить $\sin \Theta_s = 1$. Очевидное решение этих уравнений для любого набора обменных параметров J_{np} описывает однородное упорядочение: $\Phi_m = \Phi = \text{const}$. Численное моделирование с использованием магнитной вакансии с нулевым обменным спариванием с ее ближайшими соседями или магнитной примеси с другой величиной спина и (или) другими обменными константами приводит к однородному упорядочению и не позволяет получить структуру, схожую с логарифмическим решением

$$\Phi = \Phi_0 + \alpha \ln(r/R). \quad (1.5.8)$$

Внимательное рассмотрение внутривоскостного упорядочения (см. рис. 1.19), задаваемого континуальной моделью, показывает, что имеется некоторое искажение центральных спинов относительно спинового упорядочения вблизи границ системы. Эта неоднородность спинового распределения дает ключ к организации численного процесса, приводящего стартовую спиновую конфигурацию к искомой плоскостной структуре. *Причиной образования такой неоднородности может служить либо локальное магнитное поле, либо локальная анизотропия.*

Остановимся подробнее вначале на первом случае. К гамильтониану добавляется энергия

$$H_z = -g\mu_0 h S \int d^2 \mathbf{r} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cos[\omega - \varphi(\mathbf{r}_0)]$$

от локального магнитного поля h , действующего на спин в позиции \mathbf{r}_0 , направление которого относительно закрепленных спинов

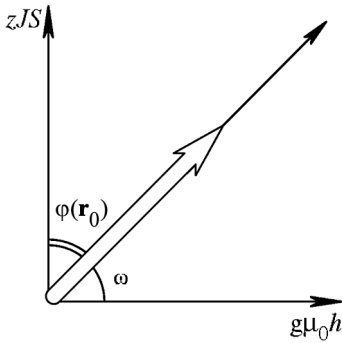


Рис. 1.20. Центральный спин (белая стрелка) направлен вдоль оси, определяемой обменным полем ближайших соседей zJS , локальным полем h , фактором Ланде g , магнетонном Бора μ_0

на границе определяется углами ω , $\varphi(\mathbf{r}_0)$ (рис. 1.20). Учет локального поля приводит к континуальному уравнению для расчета $\Phi(\mathbf{r})$:

$$\Delta\Phi(\mathbf{r}) = \frac{g\mu_0 h}{JS} \sin[\omega - \varphi(\mathbf{r}_0)] \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0).$$

Отсюда следует, что

$$\Phi(\mathbf{r}) = \Phi_u(\mathbf{r}) + \frac{g\mu_0 h}{2\pi JS} \sin[\omega - \varphi(\mathbf{r}_0)] \ln|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|, \quad (1.5.9)$$

где Φ_u – произвольное решение уравнения Лапласа $\Delta\Phi_u = 0$ для двумерного случая. Сравнение (1.5.8) и (1.5.9) дает

$$\alpha = \frac{g\mu_0 h}{2\pi JS} \sin[\omega - \varphi(\mathbf{r}_0)]. \quad (1.5.10)$$

Мы можем оценить это выражение, используя метод среднего поля. Выбирая $\omega = \pi/2$ и полагая, что все спины выстроены вдоль одного направления, за исключением центрального, жестко направленного вдоль оси, определяемой обменным полем ближайших соседей zJS и локальным внешним полем h , легко находим

$$\sin[\omega - \varphi(\mathbf{r}_0)] = \frac{zJS}{\sqrt{(zJS)^2 + (g\mu_0 h)^2}}, \quad (1.5.11)$$

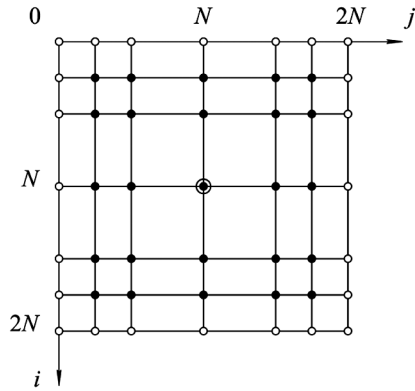
где $z = 4$ – число ближайших соседей для квадратной решетки. Следовательно:

$$\alpha = \frac{z}{2\pi} \frac{g\mu_0 h}{\sqrt{(zJS)^2 + (g\mu_0 h)^2}}. \quad (1.5.12)$$

Легко видеть, что α меняется в интервале от нуля до $z/2\pi \approx 0,636$ при увеличении поля h от нуля до бесконечности. Что более важно, ло-

Рис. 1.21. Координаты (i, j) квадратной решетки.

Центральный спин обозначен черно-белым кружком; темные кружки соответствуют внутренним узлам, задействованным в итерационной процедуре; светлые – граничным узлам



кальное магнитное поле является причиной возникновения логарифмического источника в системе и имеется верхний предел значений α .

Для сравнения этих результатов с данными численного расчета рассмотрим квадратную решетку размера $(2N + 1) \times (2N + 1)$, изображенную на рис. 1.21, и для простоты возьмем $J_{np} = J\delta_{n,n+a}$. Пусть локальное магнитное поле, направленное вдоль оси j действует на центральный спин, имеющий координаты (N, N) (рис. 1.22, *a*), который следует включить в численную схему с небольшой модификацией

$$\cos \Phi_{NN} = \frac{\sum_n \cos \Phi_n + g\mu h/(JS)}{\sqrt{\left(\sum_n \sin \Phi_n\right)^2 + \left(\sum_n \cos \Phi_n + g\mu h/(JS)\right)^2}} \quad (1.5.13)$$

В ходе итераций стабилизируется поворот центрального спина $\varphi(\mathbf{r}_0)$, пропорциональный приложенному полю h , относительно однородного упорядочения на границах, которое удерживалось неизменным в ходе процесса (рис. 1.22, *б*). В соответствии с предсказанием аналитической теории найдено, что радиальная зависимость полученного упорядочения в основном сохраняется, Φ_n определяется только расстоянием r , отсчитываемым от центрального спина (N, N) начиная со значений $r \approx 3$. На рис. 1.22, *в* сравниваются результаты численного расчета, взятые для разных направлений сканирования, с аналитическими значениями (1.5.8). Точки на вставке подгонялись по формуле

$$\Phi = \frac{\pi}{2} + 0.135 \ln\left(\frac{r}{10.84}\right).$$

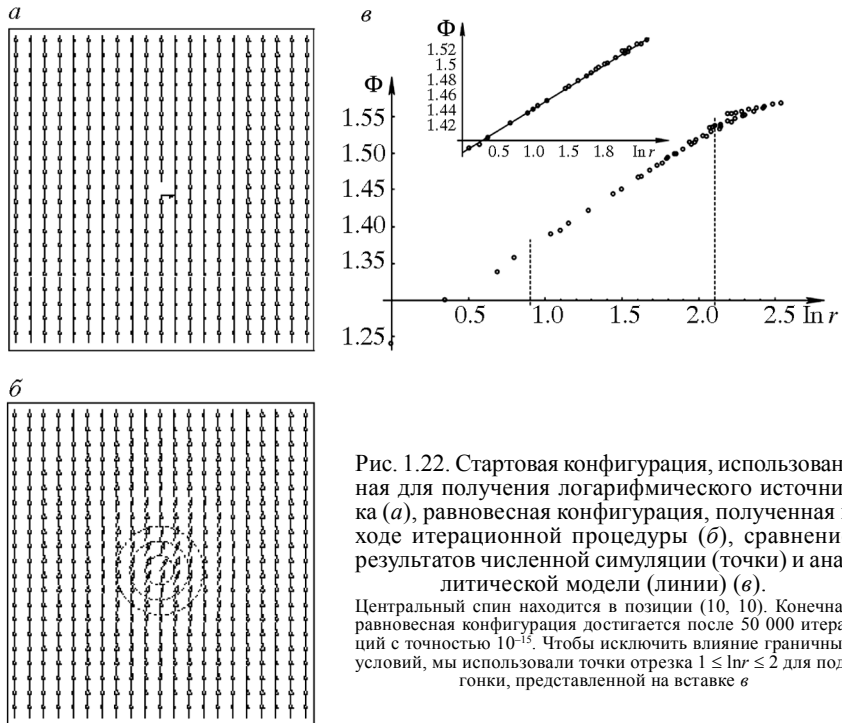


Рис. 1.22. Стартовая конфигурация, использованная для получения логарифмического источника (а), равновесная конфигурация, полученная в ходе итерационной процедуры (б), сравнение результатов численной симуляции (точки) и аналитической модели (линии) (в).

Центральный спин находится в позиции (10, 10). Конечная равновесная конфигурация достигается после 50 000 итераций с точностью 10^{-15} . Чтобы исключить влияние граничных условий, мы использовали точки отрезка $1 \leq \ln r \leq 2$ для подгонки, представленной на вставке в

Приближение среднего поля (1.5.12) дает $\alpha = 2/\sqrt{17}\pi \approx 0.154$, где взято магнитное поле $g\mu h/(JS) = 1$ в соотношении (1.5.13). Видно, что согласие очень хорошее.

Согласно континуальной теории, величина α (1.5.10) зависит от параметров h , ω и $\varphi(\mathbf{r}_0)$. Для изучения зависимости $\alpha[\varphi(\mathbf{r}_0)]$ использовалась квадратная решетка с фиксированным спином в центре, но теперь этот спин с заданным углом $\varphi(\mathbf{r}_0)$ исключался из итерационного обновления. Для того чтобы найти интервал значений α , исследовали системы размеров 21×21 и 41×41 . Зависимость α от $\varphi(\mathbf{r}_0)$ (рис. 1.23, а) получена после обработки релаксационных конфигураций Φ_{ij} с разными стартовыми отклонениями $\varphi(\mathbf{r}_0)$. Видно, что зависимость почти линейная. Численные значения α немного отличаются для $N=21$ и $N=41$, т. е. α слабо зависит от размера решетки. Эти результаты показывают, что релевантные значения α малы, а именно $|\alpha| < 1$. Важно также, что аналитическая модель содержит

лишь два параметра, α и R , а релаксационная спиновая конфигурация обусловлена только двумя независимыми переменными $\varphi(\mathbf{r}_0)$ и N .

Численные данные использовались для расчета энергии полученной структуры

$$\frac{E}{JS^2} = \frac{1}{2} \sum_{np} \cos(\Phi_n - \Phi_p) + \sum_n \cos(\Phi_n - \Phi_0) - E_0, \quad (1.5.14)$$

где в первой сумме суммирование производится по всем внутренним узлам, а во второй – по граничным узлам структуры. Энергия отсчитывалась от энергии основного состояния E_0 , когда спины параллельны в xOy -плоскости и на каждую обменную связь приходится энергия JS^2 . Энергия конфигурации в зависимости от параметра α^2 , взятого из подгонки данных, оказывается линейной вплоть до максимального значения α_{\max} , соответствующего $\varphi(\mathbf{r}_0) = \pi$, что хорошо согласуется с континуальной моделью (рис. 1.23, б).

Отметим, что максимальные значения α , найденные для решеток разных размеров, а именно $\alpha_{\max} = 0,650$ ($N = 21$) и $\alpha_{\max} = 0,615$ ($N = 41$), оказались близки к оценке 0,636 в приближении среднего поля. Как показано численными расчетами в работе [86], аналитическая формула для пары логарифмических источников с мощностями α и $-\alpha$ в точках \mathbf{r}_0 и \mathbf{r}_1 справедлива на расстоянии $d > 10$ между ними. При этом энергия диполя $E \sim \ln d$, а параметр α линейно зависит от величины $\varphi(\mathbf{r}_0) - \varphi(\mathbf{r}_1)$.

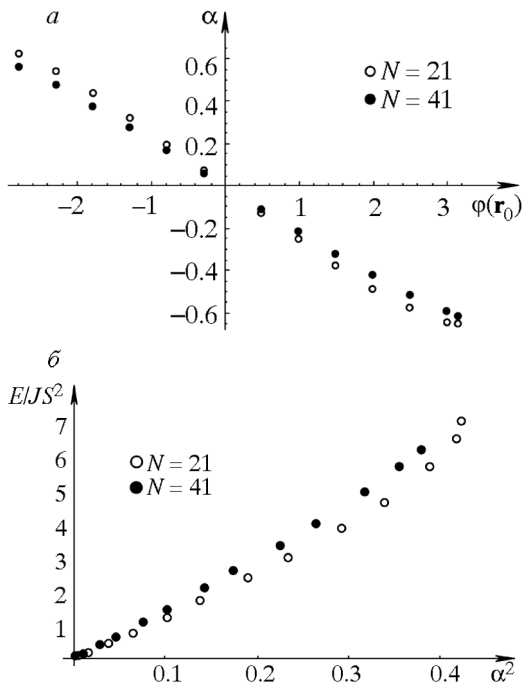


Рис. 1.23. Значения α как функция $\varphi(\mathbf{r}_0)$ (а), энергия E как функция α^2 (б)

1.5.2. Спиральный вихрь

Обсудим результаты численного моделирования решений типа спирального вихря, определяемых следующим выражением для гармонической функции $a(x, y)$:

$$a(x, y) = q \arctan \frac{y - \tilde{y}_0}{x - \tilde{x}_0} + \alpha \ln \left[\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} / R \right].$$

Пусть вихрь расположен в одной из позиций в центре квадратной плакетки, а позиция логарифмического источника совпадает с одним из решеточных узлов, параметры \tilde{x}_0, \tilde{y}_0 (x_0, y_0) выбирались на дуальной (прямой) решетке. Выберем стартовую вихревую конфигурацию, в которой один из спинов вблизи центра вихря рассматривается как центр логарифмического источника. Планарный угол этого спина не меняется в ходе итерационной процедуры с фиксированными граничными условиями. Вдали от центра углы конечной спиновой конфигурации должны хорошо описываться непрерывной формулой $\Phi(x, y) = q\varphi + \alpha \ln(r/R)$, поэтому мы ожидаем появления спинового упорядочения

$$\Phi_{ij} = q \arctan \frac{j - N + 1/2}{i - N + 1/2} + \alpha \ln \left[\sqrt{(i - x_0)^2 + (j - y_0)^2} / R \right].$$

Исследовалась система размером 101×101 .

Начальное отклонение $\varphi(\mathbf{r}_0)$ центрального спина в однородном фоне приводит к конечной конфигурации с $\alpha \neq 0$ и энергией E (рис. 1.24, *а*). Мы наблюдали логарифмическую зависимость планарных углов Φ_{ij} для сканирования вдоль определенных направлений (рис. 1.24, *б*), которые и использовались в подгонке для определения значений α , в то время как сканирования вдоль других направлений обнаруживают иное поведение (рис. 1.24, *в*).

Эта процедура повторялась для нескольких позиций фиксированного спина (x_0, y_0), и результаты приведены в табл. 1.1, где в последней колонке показаны значения α из рассчитанной энергии E , полученные при помощи выражения для энергии спирального вихря в непрерывном приближении $E = E_{\log} + E_{\text{vort}}$, в котором

$$E_{\log} = \pi JS^2 \alpha^2 \ln \frac{L}{a}, \quad E_{\text{vort}} = \pi JS^2 q^2 \ln \frac{L}{a}.$$

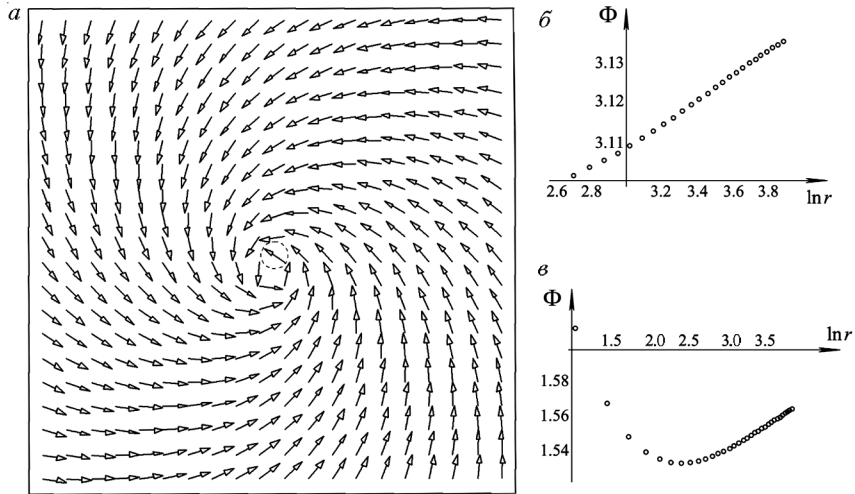


Рис. 1.24. Релаксационная конфигурация типа спирального вихря с энергией $E/JS^2 = 16,6994$ в системе размером 101×101 (а); зависимости планарных углов Φ_{ij} для направлений вдоль $(-1, -1)$ (б) и $(1, -1)$ (в) с логарифмическим и нелогарифмическим поведением соответственно.

Закрепленный спин в позиции (N, N) обозначен штриховым кружком

Значение $E_{\text{vort}}/JS^2 = 16,58$ взято из численного моделирования идеального вихря. С помощью этого общего выражения, в котором $E_{\text{vort}}/E_{\text{log}} = q^2/\alpha^2$, легко найти $|\alpha|(\text{energy}) = \sqrt{(E - E_{\text{vort}})/E_{\text{vort}}}$.

Из табл. 1.1 очевидны следующие свойства.

1. Чем дальше фиксированный спин от центра вихря, тем ближе добавочная энергия $E - E_{\text{vort}}$ (вторая колонка) к значению, найденному для фиксированного спина на фоне однородного упорядочения.

Таблица 1.1

Данные численного моделирования спирального вихря

(x_0, y_0)	$(E - E_{\text{vort}})/JS^2$	α	$ \alpha (\text{energy})$
(N, N)	0.114	-0.084	0.0828
$(N+5, N)$	0.554	-0.179	0.1830
$(N+10, N)$	0.562	-0.182	0.1840
$(N+15, N)$	0.568	-0.189	0.1850

2. Сила источника α зависит как от значения $\varphi(\mathbf{r}_0)$, так и от позиции фиксированного спина. Чем ближе последний к центру вихря, тем меньше α при заданном значении $\varphi(\mathbf{r}_0)$. Вдали от вихря параметр α становится почти равным значению, найденному для одиночного логарифмического источника при тех же размере решетки и стартовом отклонении $\varphi(\mathbf{r}_0)$.

3. Предсказание континуальной теории $E\propto(\alpha^2 + q^2)$ полностью воспроизводится численным моделированием для любых позиций логарифмического источника и вихря. Наименьшее значение энергии получается при минимальном расстоянии между центром вихря и закрепленным спином.

1.5.3. «Узельные» структуры и пространственный спиральный вихрь в гейзенберговской модели

Текстуры, рассмотренные ранее, целиком лежали в xOy -плоскости. Особый интерес представляет более сложный случай, когда поле $\mathbf{S}(\mathbf{r})$ приобретает внеплоскостную компоненту. Для численного моделирования «узельных» состояний в работах [86, 87] решетка была выбрана как на рис. 1.21, однако в начальной конфигурации закрепленный спин в центре имел «внеплоскостную» компоненту. Численная процедура повторяет примененную для моделирования одного логарифмического источника и порождает набор $(\cos\Phi_{ij}, \sin\Phi_{ij})$ и $(\cos\Theta_{ij}, \sin\Theta_{ij})$, что позволило выделить из этих данных параметры, фигурирующие в аналитических выражениях. Набор численных расчетов был выполнен с использованием разных начальных условий для граничных спинов $\mathbf{S}_b = (\sin\Theta_b \cos\Phi_b, \sin\Theta_b \sin\Phi_b, \cos\Theta_b)$ и центрального закрепленного спина $\mathbf{S}_c = (\sin\Theta_c \cos\Phi_c, \sin\Theta_c \sin\Phi_c, \cos\Theta_c)$. На рис. 1.25 представлены результаты численных расчетов величины $\cos\Phi$ и их сравнение с аналитическим выражением. Видно, что согласие достаточно хорошее.

Численные расчеты показывают, что значение α определяется только углом $\Delta_{bc} = \arccos(\mathbf{S}_b \cdot \mathbf{S}_c)$ для любого направления \mathbf{S}_c . Кроме того, эти расчеты подтверждают аналитические данные для энергии $E \propto \alpha^2$ и E не зависят от параметра c решений (1.4.21).

На основании этого можно заключить, что закрепленный в центре спин является причиной возникновения логарифмических решений как для ХУ-модели, так и для гейзенберговской модели.

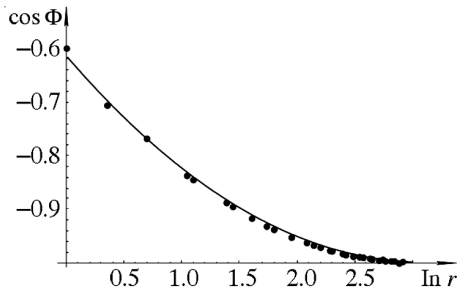
Попытки численного решения уравнений (1.5.4) – (1.5.6) для выявления внутренней структуры пространственного вихря (1.4.22)

Рис. 1.25. Сравнение $\cos\Phi$, рассчитанного по данным численного моделирования (черные точки), с аналитическим выражением континуальной теории

$$\cos\Phi = \sin \left\{ \arctg \left[1.140 \operatorname{tg} (-0.307 \ln r + 2.544) \right] \right\}$$

(сплошная линия).

Параметры центрального спина $\Phi(r_0) = 1.5$ и $\Theta(r_0) = 0.5$



на сплошном квадрате или диске, когда в качестве стартовой выбирается конфигурация со значениями углов из континуальной теории, терпят неудачу. Итерационная процедура либо сходится к скирмионной структуре при свободных граничных условиях, либо не сходится вовсе, когда граничные спины предполагаются закрепленными. Причина в том, что итерационная процедура релаксирует к состоянию с минимальной энергией. Поскольку отличительная черта стартовой конфигурации, использованной в численных расчетах, — наличие ненулевого углового момента, то она может эволюционировать в структуру или типа скирмиона, или пространственного вихря. Однако первая в сравнении со второй на сплошном квадрате или диске имеет преимущество в энергии. Можно избежать указанной трудности следующим образом. Поскольку наибольший вклад в энергию пространственного вихря вносят спины, расположенные вблизи его ядра, выберем систему в форме кольца с внутренним радиусом R_1 и внешним R_2 . Для систем в виде колец отклонения дискретных решений от результатов континуальной теории для пространственных вихрей оказываются малыми. Обсудим вначале случай с параметром $\alpha = 0$ в решении (1.4.22).

Табл. 1.2 содержит рассчитанные при наложении свободных граничных условий значения энергии, соответствующие разным выборам параметра c , для кольца с размерами $R_1 = 50.5$ и $R_2 = 105.5$. В полном согласии с континуальным описанием эта энергия не зависит от параметра c .

В табл. 1.3 приведена энергия пространственного вихря как функция внутреннего радиуса R_1 при неизменном

Таблица 1.2

Данные численного моделирования пространственного вихря

c	E
1.0	2.107
1.5	2.107
3.5	2.107

Таблица 1.3

Энергия пространственного вихря как функция внутреннего радиуса R_1

R_1	E (lattice)	$E = \pi JS^2 \ln(R_2/R_1)$
10.5	7.05	7.10
20.5	4.93	5.00
30.5	3.68	3.75
40.5	2.80	2.86
50.5	2.11	2.16

внешнем радиусе $R_2 = 100.5$. Видно, что согласие между численным результатом и предсказанием континуальной теории $E = \pi JS^2 \ln(R_2/R_1)$ очень хорошее для целого интервала значений радиуса R_1 ; $10.5 \leq R_1 \leq 50.5$. Можно сделать вывод, что в системе с удаленной сердцевинной конечного радиуса пространственный вихрь будет иметь минимальную энергию среди реше-

ний с ненулевым угловым моментом. Это утверждение подтверждается и непосредственным аналитическим рассмотрением [87].

Для расчетов пространственного спирального вихря с параметром $\alpha \neq 0$ спины, принадлежащие границе кольца, предполагались закрепленными. Константы $\Phi_0(R_1)$ и $\Phi_0(R_2)$ выбирались разными («закрученные» граничные условия). На рис. 1.26 представлены результаты численного моделирования, приводящего к спиральной вихревой структуре с энергией $E = 2.37JS^2$.

Из-за малой энергии активации спиральные диполи могут зарождаться термофлуктуационным способом и вносить вклад в термодинамические свойства системы.

Представленный анализ может оказаться полезным при решении ряда задач физики наномангнитных систем. В этой связи отметим, что стремительное развитие технологии выращивания тонких пленок в условиях ультравысокого вакуума сделало возможным изготовление искусственно упорядоченных магнитных материалов, которые, как правило, не наблюдаются в равновесном состоянии в объемных системах. В таких материалах новые фазы могут возникать в процессе роста тонких пленок в результате управления поверхностной диффузией, под влиянием симметрии подложки и ее давления на пленку, наконец, они могут быть обусловлены низкоразмерными эффектами. Однородное состояние, традиционно считающееся основным для двумерного гейзенберговского ферромагнетика, практически невозможно реализовать в подобных системах. Например, сильная поверхностная анизотропия субмикронных частиц при определенных условиях может приводить к появлению вихревых или спиральных распределений намагниченности.

Нельзя исключать, что спиральные структуры будут играть существенную роль в спин-поляризованной сканирующей туннельной микроскопии (SPSTM), особенно в SPSTM с атомной разрешающей

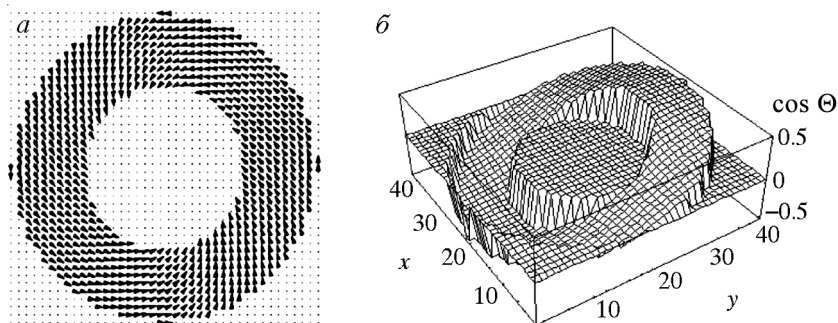


Рис. 1.26. Пространственный спиральный вихрь: упорядочение в xy -плоскости (а) и профиль $\cos\Theta$ (б).

Параметры решения: $c = 2$, $R_1 = 50.5$, $R_2 = 105.5$ и $\Phi_0(R_2) = \Phi_0(R_1) + \pi/4$

способностью. Принцип действия SPSTM основан на сканировании тонким намагниченным острием (поле рассеяния порядка 0.1Т) поверхности пленки и записи магнитного сигнала. Сильное взаимодействие острие – образец приводит к значительным локальным возмущениям направлений магнитных моментов в пленке, даже с возможным их переверотом. При этом в системе создается ненулевой поток момента импульса, который в рассматриваемой модели описывается как вихресточник.

В заключение отметим, что в ферромагнитных дисках микрометрового и субмикрометрового размеров, толщиной в десятки нанометров (их часто называют магнитными точками) наблюдали наномасштабные магнитные вихри, двумерная структура которых стабилизируется размерными эффектами. Энергетическая выгодность вихревых конфигураций определяется тем, что они не создают размагничивающих полей. Наличие вихревых структур в пермалоевых дисках подтверждено методами электронной и магнитно-силовой микроскопии [88, 89]. Субмикронные магнетики имеют четыре эквивалентных вихревых состояния, поскольку завихренность в плоскости диска (против часовой стрелки или по ней) и выход намагниченности в центре вихря из плоскости диска (вверх или вниз) являются независимыми. Это открывает принципиальную возможность сохранения и переключения в магнитных точках двух битов информации [90] вместо одного, как в обычных однодоменных элементах памяти. Процессы переключения, индуцированные плоскостными или перпендикулярными импульсными магнитными полями, возбуждают в таких системах структуры типа скирмионов [52] или спиральные структуры.

СОЛИТОНОПОДОБНЫЕ ВИХРИ И ИХ УПОРЯДОЧЕННЫЕ СТРУКТУРЫ В МОДЕЛЯХ МАГНЕТИКОВ, РЕДУЦИРУЕМЫХ К ДВУМЕРНОЙ МОДЕЛИ SINE-GORDON

2.1. ФИЗИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ДВУМЕРНОЙ МОДЕЛИ SINE-GORDON

Характер идеализаций, допустимых при рассмотрении той или иной задачи, определяется всей задачей в целом и зависит поэтому не только от свойств рассматриваемой системы, но и от того, на какие именно вопросы желательно получить ответ при рассмотрении задачи.

Л.И. Мандельштам

К топологически устойчивым нелинейным дефектам в магнетиках относят, например, доменные границы, вихри, линии и точки Блоха [1]. Ряд фундаментальных свойств магнитных материалов определяется их поведением. Топологическая устойчивость позволяет считать перечисленные нелинейные объекты долгоживущими, что открывает перспективу их использования в качестве элементов памяти запоминающих устройств [2, 3]. Важнейшим для понимания природы статических и динамических свойств ферромагнетиков является вопрос о структуре вихревых конфигураций. Структура вихря важна не только при описании его собственной динамики. Она существенно влияет на динамические свойства доменных границ, в частности, изменяет их подвижность, инерцию, а также заметно сказывается на межвихревых взаимодействиях, определяя характер коллективных эффектов. Магнитные топологические дефекты соответствуют решениям нелинейного уравнения Ландау–Лифшица – основного уравнения феноменологической теории магнетизма. Теоретические исследования нелинейных магнитных возбуждений и стационарных распределений намагниченности в зна-

чительной мере основываются на использовании приближений, которые позволяют свести нелинейные уравнения феноменологической теории магнетизма к более простым моделям, имеющим точные аналитические решения. При физически оправданных приближениях в большинстве случаев их удается свести к уравнению синус-Гордон (sine-Gordon), которое учитывает не только основные обменные взаимодействия, но и эффекты кристаллографической магнитной анизотропии. В данной главе рассматриваются сингулярные решения двумерного уравнения синус-Гордон, описывающие локализованные пространственные структуры в магнетиках и других конденсированных средах.

Поясним возникновение моделей типа синус-Гордон в физике магнитных явлений на нескольких характерных примерах. Рассмотрим вначале простой ферромагнетик с квадратичной по намагниченности энергией магнитной анизотропии. В кристаллах триклинной, моноклинной и ромбической систем плотность энергии ферромагнетика w записывается в виде [4]:

$$w = \frac{1}{2} \left\{ \alpha_{ij} (\partial_i \mathbf{M} \cdot \partial_j \mathbf{M}) - \beta_1 M_1^2 - \beta_3 M_3^2 \right\}, \quad (2.1.1)$$

где $\alpha_{ij} = \text{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ – обменные постоянные; β_1, β_3 – постоянные анизотропии; $\mathbf{M}^2 = M_0^2 = \text{const}$. Пусть выполнены условия $\beta_1 > 0$, $\beta_3 < 0$, $\beta_1/|\beta_3| \ll 1$, тогда имеем сильную кристаллографическую анизотропию, которая стремится «положить» вектор намагниченности среды в плоскость $x_1 O x_2$. В плоскости $x_1 O x_2$ более слабая остаточная анизотропия выделяет «легкое» направление – ось $O x_1$. Отсюда следует, что при не слишком сильных внешних воздействиях в параметризации намагниченности сферическими углами Θ, Φ :

$$\mathbf{M} = M_0 (\sin \Theta \cos \Phi, \sin \Theta \sin \Phi, \cos \Theta)$$

угол Θ близок к значению $\Theta \approx \pi/2$. Воспользуемся этим обстоятельством для построения упрощенной нелинейной модели.

В терминах углов Θ, Φ уравнения Ландау – Лифшица для ферромагнетика имеют вид [5]:

$$\begin{aligned} & (\gamma M_0)^{-1} \sin \Theta \partial_t \Phi + \alpha_{ik} \partial_i \partial_k \Theta - \alpha_{ik} \sin \Theta \cos \Theta \partial_i \Phi \partial_k \Phi + \\ & + \beta_1 \sin \Theta \cos \Theta \cos^2 \Phi - \beta_3 \sin \Theta \cos \Theta = 0, \\ & (\gamma M_0)^{-1} \partial_t (\cos \Theta) + \alpha_{ik} \partial_i (\sin^2 \Theta \partial_k \Phi) - \beta_1 \sin^2 \Theta \sin \Phi \cos \Phi = 0, \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

где γ – магнитомеханическое отношение. Пусть характерный размер магнитных неоднородностей λ удовлетворяет неравенству $\alpha_i/(\beta_3|\lambda^2) \ll 1$. Тогда из первого уравнения системы (2.1.2), полагая $\Theta = \chi(\mathbf{r}, t) + \pi/2$ ($\chi < 1$), выражаем поле χ через угол Φ : $\chi \approx (\gamma M_0 \beta_3)^{-1} \partial_t \Phi$. После чего в главном приближении первое уравнение (2.1.2) сводится к эффективной модели для расчета $\Phi(\mathbf{r}, t)$:

$$-\left[(\gamma M_0)^2 |\beta_3|\right]^{-1} \partial_t^2 \Phi + \alpha_{ik} \partial_i \partial_k \Phi - \beta_1 \sin \Phi \cos \Phi = 0. \quad (2.1.3)$$

В безразмерных переменных $x'_i = x_i \sqrt{\beta_1/2\alpha_i}$ ($i=1,2,3$), $t' = \gamma M_0 t \sqrt{\beta_1 |\beta_3|/2}$ уравнение (2.1.3) принимает вид

$$\left(\partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2 - \partial_t^2\right) \Phi = \sin 2\Phi. \quad (2.1.4)$$

«Штрихи» над новыми переменными далее опускаем. В основном приближении намагниченность среды определяется формулой

$$\mathbf{M} = M_0(\cos\Phi, \sin\Phi, 0). \quad (2.1.5)$$

В рассмотренном примере выделение направления в базисной плоскости связано со слабой квадратичной по намагниченности анизотропией. Это проявилось в возникновении множителя 2 перед азимутальным углом $\Phi(\mathbf{r}, t)$ в правой части уравнения (2.1.4). В базисной плоскости могут быть «остатки» не квадратичной, а кубической анизотропии [6, 7]. Тогда в модельном уравнении (2.1.4) аргументом синуса будет 4Φ . В случае ферромагнетика с анизотропией типа «легкая плоскость» выделить направление в этой плоскости можно магнитным полем. Причем в выражении для энергии ферромагнетика (2.1.1) вместо слагаемого с коэффициентом β_1 появится зеemannовская энергия: $-(\mathbf{H} \cdot \mathbf{M})$, где $\mathbf{H} = (H, 0, 0)$ – постоянное внешнее магнитное поле. В конечном счете опять приходим к выражению (2.1.4), только аргументом синуса будет азимутальный угол Φ . Таким образом, описание широкого класса нелинейных возбуждений в ферромагнетиках можно осуществить в рамках моделей типа

$$\left(\partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2 - \partial_t^2\right) \Phi = \sin p\Phi, \quad (2.1.6)$$

где $p = 1, 2, 4, \dots$. На первый взгляд, кажется, что множитель p несуществен, поскольку его легко устранить масштабным преобразованием пространственно-временных координат и поля Φ . Однако эта операция, как показано далее, изменяет топологический заряд вихрей в модели (2.1.6). Поэтому пока ее проводить не будем.

Довольно полное исследование статических и динамических распределений намагниченности в двухподрешеточных магнетиках с эквивалентными магнитными подрешетками также может быть достигнуто в рамках модели (2.1.6) [8–12]. К таким магнетикам относятся коллинеарные антиферромагнетики и слабые ферромагнетики. В последних намагниченность отлична от нуля из-за слабой неколлинеарности намагниченностей подрешеток, обусловленной взаимодействием Дзялошинского.

Вместо намагниченностей подрешеток $\mathbf{M}_1(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{M}_2(\mathbf{r}, t)$ при теоретическом описании таких систем удобно ввести нормированные векторы намагниченности \mathbf{m} и антиферромагнетизма \mathbf{l} :

$$\mathbf{m} = (\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2)/2M_0, \quad \mathbf{l} = (\mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2)/2M_0. \quad (2.1.7)$$

Учет условий $\mathbf{M}_1^2 = \mathbf{M}_2^2 = M_0^2 = \text{const}$ приводит к ограничениям

$$\mathbf{l}^2 + \mathbf{m}^2 = 1, \quad (\mathbf{l} \cdot \mathbf{m}) = 0. \quad (2.1.8)$$

Уравнения Ландау – Лифшица для рассматриваемых магнетиков можно записать в виде

$$\begin{aligned} 2\partial_t \mathbf{m} + \gamma[\mathbf{m} \times \mathbf{H}_m] + \gamma[\mathbf{l} \times \mathbf{H}_1] &= 0, \\ 2\partial_t \mathbf{l} + \gamma[\mathbf{m} \times \mathbf{H}_1] + \gamma[\mathbf{l} \times \mathbf{H}_m] &= 0. \end{aligned} \quad (2.1.9)$$

Эффективные поля

$$\mathbf{H}_m = -\frac{1}{M_0} \frac{\delta W}{\delta \mathbf{m}}, \quad \mathbf{H}_1 = -\frac{1}{M_0} \frac{\delta W}{\delta \mathbf{l}}$$

выражаются через энергию магнитного кристалла

$$W = M_0^2 \int d^3 \mathbf{r} \{w_{\text{ex}} + w_a + w_D - 2(\mathbf{m} \cdot \mathbf{h})\},$$

где плотности w_{ex} , w_a , w_D и $-2(\mathbf{m} \cdot \mathbf{h})$ описывают соответственно обменную энергию, энергию анизотропии, энергию Дзялошинского (для слабых ферромагнетиков) и взаимодействие с внешним магнитным полем \mathbf{H} , $\mathbf{h} = \mathbf{H}/M_0$. Плотность обменной энергии может быть представлена в форме

$$w_{\text{ex}} = 2\delta \mathbf{m}^2 + (\alpha - \alpha')(\partial_i \mathbf{l} \cdot \partial_i \mathbf{l}) + (\alpha + \alpha')(\partial_i \mathbf{m} \cdot \partial_i \mathbf{m}),$$

где параметры δ и α' определяются обменными интегралами между разными подрешетками, α характеризует обменное взаимодействие внутри каждой из подрешеток (ср. (1.3.1)). Для дальнейшего анали-

за важно, что $\delta > 0$, $\alpha - \alpha' > 0$ и по порядку величины $\alpha, \alpha' \sim \delta a^2$, где a – межатомное расстояние. В выражении для энергии анизотропии можно опустить инварианты, содержащие $m_i m_k$ и считать $w_a = w_a(\mathbf{l})$, так как в слабых полях (при $|\mathbf{H}| \ll 2\delta M_0$) справедливо неравенство $\mathbf{m}^2 \ll 1$. По той же причине можно ограничиться линейными по компонентам вектора \mathbf{m} слагаемыми во взаимодействии Дзялошинского. Далее рассматриваем простейший случай антисимметричного взаимодействия Дзялошинского:

$$w_D = 2(\mathbf{d} \cdot [\mathbf{m} \times \mathbf{l}]),$$

где длина и направление постоянного вектора \mathbf{d} определяются кристаллографической симметрией магнетика.

Уравнение (2.1.9) можно упростить, используя физически оправданные приближения [9–11]. Будем считать, что характерный размер магнитных неоднородностей λ много больше постоянной решетки a , тогда слагаемыми, содержащими α , можно пренебречь по сравнению с членами, содержащими δ :

$$\frac{(\alpha + \alpha')}{2\delta} \left| \frac{[\mathbf{m} \times \Delta \mathbf{l}]}{[\mathbf{m} \times \mathbf{l}]} \right| \sim \frac{(\alpha - \alpha')}{2\delta} \left| \frac{[\Delta \mathbf{m} \times \mathbf{l}]}{[\mathbf{m} \times \mathbf{l}]} \right| \sim \frac{a^2}{\lambda^2} \ll 1.$$

Кроме того, полагая $\mathbf{m}^2 \ll \mathbf{l}^2$, будем считать, что длина вектора \mathbf{l} не изменяется, т.е. $\mathbf{l}^2 = 1$. Тогда из второго уравнения (2.1.9) в главном приближении по малым параметрам $\mathbf{m}^2, \mathbf{d}/\delta, w_a/\delta$ можно выразить \mathbf{m} через вектор \mathbf{l} и его производные (ср. (1.3.3)):

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2\delta} \left\{ \frac{[\partial_i \mathbf{l} \times \mathbf{l}]}{\gamma M_0} + [\mathbf{d} \times \mathbf{l}] + \mathbf{h} - \mathbf{l}(\mathbf{l} \cdot \mathbf{h}) \right\}. \quad (2.1.10)$$

После чего первое равенство (2.1.9) в основном приближении по тем же параметрам сводится к замкнутому уравнению для расчета \mathbf{l} :

$$\begin{aligned} (\alpha - \alpha') \left([\mathbf{l} \times \partial_i^2 \mathbf{l}] - \frac{1}{c^2} [\mathbf{l} \times \partial_i^2 \mathbf{l}] \right) - \frac{1}{2} \left[\mathbf{l} \times \frac{\delta w_a}{\delta \mathbf{l}} \right] - \frac{1}{\delta \gamma M_0} \partial_i \mathbf{l} (\mathbf{l} \cdot \mathbf{h}) - \\ - \frac{1}{2\delta} \left\{ [\mathbf{l} \times [\mathbf{d} \times \mathbf{h}]] + (\mathbf{l} \cdot \mathbf{h}) [\mathbf{l} \times \mathbf{h}] + (\mathbf{l} \cdot \mathbf{d}) [\mathbf{l} \times \mathbf{d}] \right\} = 0, \quad \mathbf{l}^2 = 1, \quad (2.1.11) \end{aligned}$$

где $c = \gamma M_0 \sqrt{2\delta(\alpha - \alpha')}$ – минимальная фазовая скорость спиновых волн. Это выражение можно записать как уравнение Эйлера – Лагранжа со следующим лагранжианом:

$$L = M_0^2 \iint d^3\mathbf{r} dt \left\{ (\alpha - \alpha') \left[\frac{1}{c^2} (\partial_t \mathbf{l})^2 - (\partial_i \mathbf{l})^2 \right] - \frac{1}{\delta \gamma M_0} (\mathbf{h} \cdot [\partial_t \mathbf{l} \times \mathbf{l}]) - w_r(\mathbf{l}) \right\}. \quad (2.1.12)$$

Здесь $M_0^2 w_r(\mathbf{l})$ – эффективная энергия анизотропии для поля $\mathbf{l}(\mathbf{r}, t)$:

$$w_r(\mathbf{l}) = w_a(\mathbf{l}) + \frac{1}{2\delta} \left[(\mathbf{l} \cdot \mathbf{h})^2 + (\mathbf{l} \cdot \mathbf{d})^2 \right] - \frac{1}{\delta} (\mathbf{l} \cdot [\mathbf{h} \times \mathbf{d}]).$$

Величина $[\mathbf{h} \times \mathbf{d}]/\delta$ играет роль эффективного поля, действующего на \mathbf{l} так же, как внешнее магнитное поле \mathbf{H} влияет на полную намагниченность среды $\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2$. В то же время при условии $\mathbf{d} = \mathbf{0}$ (в антиферромагнетиках) внешнее магнитное поле «индуцирует» квадратичную по \mathbf{l} энергию анизотропии $\sim (\mathbf{l} \cdot \mathbf{h})^2$. В этом принципиальное отличие воздействия магнитного поля на векторы ферро- и антиферромагнетизма.

В рассмотренном приближении энергия магнетика выражается только в терминах поля $\mathbf{l}(\mathbf{r}, t)$:

$$W = M_0^2 \int d^3\mathbf{r} \left\{ (\alpha - \alpha') \left[(\partial_t \mathbf{l})^2 + c^{-2} (\partial_i \mathbf{l})^2 \right] + w_r(\mathbf{l}) \right\}.$$

При наличии сильной кристаллографической анизотропии, которая стремится «положить» вектор антиферромагнетизма в плоскость $x_1 O x_2$, уравнение (2.1.11) сводится к моделям типа синус-Гордон. Обсудим некоторые возможности.

Рассмотрим сначала слабый ферромагнетик в отсутствии внешнего магнитного поля. Для кристаллов ромбической симметрии с вектором $\mathbf{d} = (d, 0, 0)$ энергия $w_r(\mathbf{l})$ записывается в виде [4, 8]

$$w_r(\mathbf{l}) = b_1 l_1^2 + b_3 l_3^2 + \frac{1}{2\delta} (l_1 d)^2.$$

При условии $b_3 \gg |b_1|$, $d^2/2\delta$ и не слишком сильных внешних воздействиях вектор \mathbf{l} лежит в плоскости $x_1 O x_2$ и потому допускает параметризацию

$$\mathbf{l} = (\sin\Phi, \cos\Phi, 0). \quad (2.1.13)$$

В результате функция Лагранжа (2.1.12) принимает вид

$$L = M_0^2 \iint d^3 \mathbf{r} dt \left\{ (\alpha - \alpha') \frac{1}{c^2} [(\partial_t \Phi)^2 - (\partial_i \Phi)^2] - \left(b_1 + \frac{d^2}{2\delta} \right) \sin^2 \Phi \right\}.$$

Уравнение Эйлера – Лагранжа, определяющее поле $\Phi(\mathbf{r}, t)$, после масштабных преобразований пространственно-временных координат сводится к уравнению синус-Гордон (2.1.6) с коэффициентом $p = 2$.

Нетрудно проверить, что и в отсутствии взаимодействия Дзялошинского (в коллинеарных антиферромагнетиках) функция Лагранжа (2.1.12) приводит к уравнению синус-Гордон (2.1.6). Так, при наличии сильной анизотропии типа «легкая плоскость» и слабой остаточной «квадратичной» анизотропии в этой плоскости, обусловленной либо внешним магнитным полем, либо кристаллографической симметрией, получаем выражение (2.1.6) с коэффициентом $p = 2$. В отсутствие магнитного поля, когда остаточная анизотропия в базисной плоскости связана с кубической кристаллографической симметрией, приходим к соотношению (2.1.6) с $p = 4$.

При построении модели (2.1.6) магнитостатика не учитывалась. Поэтому такая модель лучше описывает динамические и статические распределения намагниченности в антиферромагнетиках и слабых ферромагнетиках.

Когда поле Φ зависит от одной из пространственных координат и времени, например $\Phi = \Phi(x, t)$, модель (2.1.6) сводится к одномерному гиперболическому уравнению синус-Гордон:

$$(\partial_x^2 - \partial_t^2) \Phi = \sin p\Phi. \quad (2.1.14)$$

Выражение (2.1.14) описывает одномерные волновые процессы, которые достаточно полно изучены с помощью метода обратной задачи рассеяния.

Исследование двумерных статических распределений намагниченности, например $\Phi = \Phi(x, y)$, сводится к решению двумерного эллиптического уравнения синус-Гордон:

$$\Delta \Phi = \sin p\Phi, \quad \Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2. \quad (2.1.15)$$

В отличие от известного гиперболического уравнения (2.1.14) модель (2.1.15) описывает не волновые процессы, а двумерные магнитные дефекты, и еще не рассмотрена столь же детально.

Широко известна роль дислокаций при интерпретации физических свойств реальных кристаллов. Подобные дефекты – вихри и

антивихри – важны и при рассмотрении двумерных систем. Под двумерными вихревыми конфигурациями в дальнейшем подразумеваем дефекты, которые характеризуются топологическим зарядом:

$$Q = \frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma} (\nabla\Phi \cdot d\mathbf{r}), \quad d\mathbf{r} = (dx, dy), \quad (2.1.16)$$

где Γ – произвольный контур в xOy -плоскости, окружающий некоторую точку (x_0, y_0) – центр вихря – и ориентированный против часовой стрелки. Согласно определению, поле вихря $\Phi(x, y)$ неоднозначно. Однако физически наблюдаемые величины в ферромагнетиках выражаются через намагниченность \mathbf{M} , а в антиферромагнетиках – через поле \mathbf{I} . В рассматриваемой модели отличными от нуля компонентами этих векторов будут функции $\cos \Phi$ и $\sin \Phi$ (см. формулы (2.1.5), (2.1.13)). Отсюда следует, что в ферромагнетиках обозначенные величины однозначны тогда, когда число Q принимает целые значения. В то же время в антиферромагнетиках и слабых ферромагнетиках состояния с параметрами порядка \mathbf{I} и $-\mathbf{I}$ физически неразличимы. Поэтому в таких системах возможны вихревые конфигурации с полуцелыми значениями Q . Интерес к подобным дефектам стимулирован идеями Березинского, Костерлица и Таулеса об особенностях фазовых переходов в двумерных системах [13–15]. Показано, что в двумерных системах, описываемых уравнением $\Delta\Phi = 0$ (континуальный предел XY-модели), пары вихрь – антивихрь могут рождаться термофлуктуационным путем.

Для унификации теоретического описания вихрей в уравнении (2.1.15) удобно осуществить преобразование

$$u = p\Phi, \quad x \Rightarrow \sqrt{px}, \quad y \Rightarrow \sqrt{py} \quad (2.1.17)$$

и привести модель (2.1.15) к стандартной форме записи

$$\Delta u = \sin u. \quad (2.1.18)$$

В терминах нового поля $u(x, y)$ топологический заряд

$$\tilde{Q} = \frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma} (\nabla u \cdot d\mathbf{r})$$

вихревых конфигураций в любых физических системах всегда принимает целочисленные значения. Он связан с топологическим зарядом вихрей поля $\Phi(x, y)$ простым соотношением

$$Q = \tilde{Q} / p. \quad (2.1.19)$$

Формулы (2.1.17), (2.1.19) следует иметь в виду при переходе от вспомогательного поля $u(x, y)$ к экспериментально наблюдаемым величинам.

Модель (2.1.18) дает также упрощенное описание тонкой (вихревой) структуры отдельной доменной стенки. Поясним утверждение. Отдельной доменной стенке без дефектов соответствует одномерное решение модели (2.1.18):

$$u = 4\text{arctg}(\exp \varepsilon x), \quad \varepsilon = \pm 1. \quad (2.1.20)$$

Согласно (2.1.20), доменную стенку описывает 2π -кинк вспомогательного поля $u(x, y)$ ($0 \leq u \leq 2\pi, \text{mod} 2\pi$). Однако в магнитных кристаллах ориентация намагниченности (или вектора антиферромагнетизма) определяется не полем $u(x, y)$, а углом $\Phi = u/p$, где $p = 1, 2, 4, \dots$. Поэтому доменные границы могут быть не только 360° -ми (это возможно при $p = 1$), но и 180° -, 90° -ми при значениях $p = 2, 4$ соответственно. Если речь идет о ферромагнетиках, то в них модель (2.1.18) лучше описывает доменные стенки с блоховским типом распределений намагниченности, для которых выполняется условие $\text{div} \mathbf{M} = 0$, и потому оправдано пренебрежение магнитостатическими взаимодействиями. Например, в случае $p = 2$ решению (2.1.20) отвечает 180° -я блоховская доменная стенка, ортогональная оси Ox с винтовым разворотом намагниченности в плоскости yOz :

$$\mathbf{M} = M_0 (0, \sin \Phi, \cos \Phi), \quad \Phi = u/2. \quad (2.1.21)$$

Для такой стенки поле $0 \leq \Phi \leq \pi$ служит полярным углом вектора намагниченности. Число $\varepsilon = \pm 1$ в формулах (2.1.20), (2.1.21) задает полярность (киральность) доменной стенки, т. е. направление вращения вектора \mathbf{M} в пределах стенки.

Простейшую неоднородную доменную границу можно представить себе как границу, содержащую участки типа (2.1.20), (2.1.21) с разными значениями полярности. Эти участки отделены друг от друга переходной областью конечного радиуса, которая расположена вдоль некоторой линии в плоскости доменной границы. Переходную область называют блоховской линией. Ввиду однозначности поля $\mathbf{M}(\mathbf{r})$ блоховская линия не может закончиться в какой-нибудь точке доменной границы: она либо замыкается в кольцо, либо выходит на поверхность кристалла вместе с доменной границей. В окрестности блоховской линии распределение намагниченности имеет ярко выраженный вихревой характер и в простейших случаях может быть аппроксимировано двумерными решениями модели (2.1.18) (рис. 2.1).

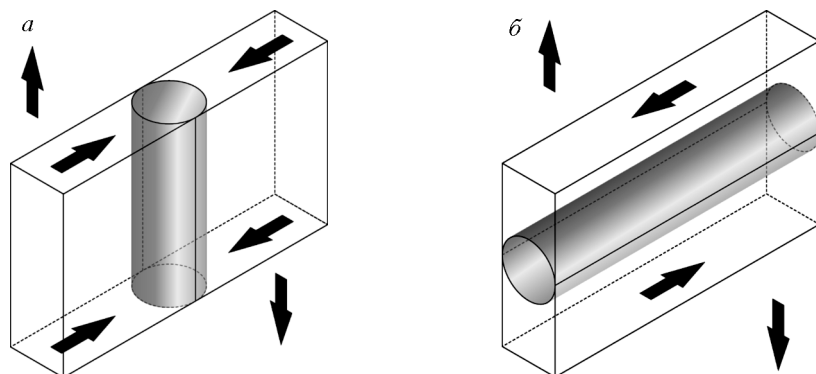


Рис. 2.1. Распределения намагниченности в плоской 180° -й доменной границе с вертикальной (а) и горизонтальной (б) блоховскими линиями

Существует широкий класс двумерных систем, где солитоны и топологические дефекты тесно связаны между собой. Это несоизмеримые магнитные структуры и несоизмеримые структуры атомов, адсорбированных на грань кристалла-подложки [16–19]. При наличии несоизмеримой фазы основное состояние таких систем не является пространственно однородным, а представляет собой сверхструктуру, которая часто может быть охарактеризована одномерной решеткой 2π -кинков (солитонов). Период решетки солитонов несоизмерим с периодом кристаллической решетки и обычно превосходит его в большое число раз. Дефекты в решетке солитонов определяют основные физические свойства несоизмеримой фазы. Описание последней с помощью солитонов и дефектов наиболее адекватно, представляет важную нерешенную задачу современной физики конденсированного состояния. К этому же кругу задач примыкают проблемы аналитического описания двумерных магнитных дефектов полосовой доменной структуры магнетиков.

К настоящему времени дана полная геометрическая классификация дефектов в несоизмеримых (полосовых доменных) структурах и доменных стенках [20–22]. При этом поля дефектов явно не вычислялись, а в зависимости от топологических особенностей подразделялись на классы эквивалентности с точностью до деформаций совместимых с кристаллографической симметрией и граничными условиями. Геометрическую классификацию дефектов удавалось дополнить аналитическими результатами лишь в частных слу-

чаях, когда уравнения, определяющие распределения параметра порядка, сводились к одномерным или линейным [16–19]. Для дальнейшего развития теории и успешной интерпретации экспериментальных данных требуются явные выражения для полей существенно нелинейных неодномерных дефектов. В простейших случаях изучение структуры и взаимодействия дефектов в несоизмеримых (полосовых доменных) структурах может быть достигнуто в рамках двумерной модели (2.1.18).

Достаточно подробное изучение решений двумерной нелинейной модели (2.1.18) возможно только на основе специальных методов интегрирования. Существующие способы интегрирования нелинейных уравнений в частных производных принято условно делить на две группы. Первая включает метод обратной задачи рассеяния и все связанные с ним методы [23–28], во вторую группу относят так называемые прямые методы (метод Хироты [26, 29–30], преобразования Бэклунда и Дарбу [26, 31–35], метод Фредгольма [36], метод вронскианов [37] и т.д.). Приемы каждой из групп по-своему эффективны, имеют преимущества и определенные недостатки. Все они позволили построить большое количество точных решений, в том числе сложные многосолитонные решения. Прямые методы в отличие от обратной задачи рассеяния не позволяют решать задачи с произвольными начальными данными и не дают ответа на вопрос об устойчивости получаемых решений. В этом плане метод обратной задачи обладает большей общностью. Тем не менее прямые методы обладают рядом достоинств. Важно, что они оказываются эффективными не только для нелинейных уравнений, интегрируемых при помощи метода обратной задачи рассеяния, но также в тех случаях, когда соответствующие задачи рассеяния не разработаны или неизвестны. На практике прямые методы часто стимулировали поиск соответствующих задач рассеяния и в отдельных случаях приводили к ним [38, 39]. Кроме того, прямые методы позволяют получать более широкие классы решений, чем метод обратной задачи, например находить решения, которые хотя и обладают быстро убывающей асимптотикой при $x \rightarrow +\infty$, но имеют особенности при конечных значениях координаты x или медленно убывают (или даже неограниченно растут) в пределе $x \rightarrow -\infty$. В таких случаях техника обратной задачи рассеяния сталкивается с серьезными трудностями, связанными с выяснением аналитических свойств лежащих в ее основе функций Иоста, с построением интегральных операторов, преобразующих асимптотические условия в решения Иоста.

Наиболее значительным и впечатляющим по количеству построенных решений всевозможных нелинейных уравнений является прямой метод Хироты. Он основан на следующих идеях.

1. Для рассматриваемого нелинейного уравнения необходимо найти функциональное преобразование исходной полевой переменной к одной (или нескольким) новым полевым переменным. Это преобразование приводит исходное уравнение к выражению (или нескольким), которое является квадратичным по новым полям. Хирота назвал уравнения такого вида билинейными.

2. Полученные билинейные уравнения решаются при помощи рядов формальной теории возмущений. Вопрос о сходимости рядов данной теории возмущений не обсуждается, так как в случае солитонных решений эти ряды обрываются, поскольку содержат только конечное число ненулевых членов. Это обстоятельство является ключевым для построения решений в явном виде.

3. Конструируются одно-, двух-, иногда трех- солитонные решения, позволяющие сделать определенные предположения относительно вида общей формулы для многосолитонных решений, справедливость которой затем доказывается методом математической индукции.

Преобразование Бэклунда [40] для модели (2.1.18) позволяет по известному частному решению этой модели с помощью сравнительно простых интегрирований и (или) посредством алгебраических вычислений строить новые решения. В этом плане применение преобразования Бэклунда напоминает «генерирование» новых решений интегрируемых моделей с помощью процедуры «одевания» (см., например: [5]). Преобразование Бэклунда оказывается чрезвычайно удобным для построения решений, описывающих двумерные вихри в несоизмеримых (полосовых доменных) структурах. Для этого в качестве «затравочного» решения модели (2.1.18) достаточно взять решение, которое описывает основное состояние несоизмеримой фазы, а именно одномерную решетку солитонов.

Преобразования Бэклунда и метод Хироты использовались ранее для построения многочисленных решений всевозможных волновых уравнений и в частности решений гиперболического уравнения синус-Гордон (2.1.14). При этом всегда получались решения, описывающие частицеподобные волны-солитоны. В этой главе мы применяем аналогичные приемы для интегрирования уравнения другого – эллиптического типа. Найденные решения двумерной модели синус-Гордон (2.1.18) являются лишь аналогами солитонов.

Они описывают статические локализованные топологические дефекты в магнетиках, которые для определенности будем называть «солитонными».

В п. 2.2 приведены результаты работ [41–44], в которых метод Хироты и подстановка Лэмба [45] используются для построения явных решений модели (2.1.15), описывающих двумерные солитонные вихри, цепочки и прямоугольные решетки из вихрей на фоне однородного основного состояния «легкоплоскостных» магнетиков с остаточной квадратичной анизотропией в базисной плоскости. Оказалось, что любой солитонный вихрь образуется в результате ортогонального пересечения двух доменных стенок, каждая из которых после пересечения изменяет полярность. Поскольку с каждым вихрем связаны бесконечные доменные стенки, энергия любой из найденных вихревых конфигураций линейно зависит от размеров системы. Показано, что взаимодействие солитонных вихрей с общим топологическим зарядом, равным нулю, имеет потенциальный барьер, препятствующий аннигиляции вихрей. Кроме того, найдены двумерные решения модели синус-Гордон (2.1.4), описывающие движение солитонных вихрей, а также доменные границы с внутренней динамикой и тонкой структурой из цепочек магнитных вихрей.

В п. 2.3 с помощью преобразования Бэклунда дано полное аналитическое описание аperiодических и периодических структур из солитонных вихрей в несоизмеримой фазе. Показано (и это важно), что в несоизмеримой фазе возможны солитонные вихри с конечной энергией. Они образуются в результате пересечения и перекручивания 2π -солитонов, формирующих основное состояние несоизмеримой фазы. В соизмеримой фазе предсказаны и аналитически описаны новые вихревые решетки, векторы трансляций которых в общем случае не ортогональны и имеют произвольную длину. Изучено взаимодействие решетки вихрей с нелинейной волной намагниченности специального вида. Эти результаты получены в работах [46–49].

Анализ солитонных вихрей, построенных в этой главе прямыми методами, а также в следующей главе на основе дискретных мод обратной задачи рассеяния приводит к любопытному заключению. С математической точки зрения все солитонные вихри модели (2.1.18) описываются решениями вида

$$u(x, y) = 4\text{arctg} [f_1(x, y)/f_2(x, y)].$$

Поле $u(x, y)$ сингулярно, когда вещественные функции $f_i(x, y)$ ($i = 1, 2$) имеют общий нуль (x_0, y_0) :

$$f_1(x_0, y_0) = 0, \quad f_2(x_0, y_0) = 0.$$

Покажем, что каждая точка (x_0, y_0) соответствует центру вихря.

Асимптотическое поведение поля $u(x, y)$ в окрестности сингулярной точки имеет вид

$$u(x, y) \approx 4 \arctg [(\alpha \Delta y + \beta \Delta x) / (\gamma \Delta y + \delta \Delta x)]. \quad (2.1.22)$$

Здесь $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$ постоянные $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ определяются первыми членами разложений в ряды Тейлора функций $f_i(x, y)$ ($i = 1, 2$) (в окрестности точки (x_0, y_0) старшие члены рядов Тейлора для $f_1(x, y)$ и $f_2(x, y)$ имеют одинаковую степень и не кратны). Используя асимптотическое разложение для поля $u(x, y)$, нетрудно вычислить топологический заряд вихря с центром в точке (x_0, y_0) :

$$Q = \frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma} (\nabla u \cdot d\mathbf{r}) = 4 \operatorname{sign}(\alpha\delta - \beta\gamma).$$

Отсюда следует важный общий вывод: все солитонные вихри имеют топологические заряды $Q = \pm 4$ (в терминах вспомогательного поля $u(x, y)$). Знак заряда совпадает со знаком комбинации чисел $(\alpha\delta - \beta\gamma)$ и в каждом конкретном случае легко определяется.

В п. 2.4 приведены результаты численного решения уравнения (2.1.18), которые показывают, что на фоне однородного основного состояния «легкоплоскостных» магнетиков вполне возможно формирование «несолитонных» вихрей с топологическими зарядами поля $u(x, y)$, меньшими по абсолютной величине, чем $|Q| = 4$ [43, 44]. Несолитонные вихри представляют собой различные струнные конфигурации из отрезков доменных границ. Важно, что среди них имеются двумерные образования с конечной энергией.

2.2. СОЛИТОННЫЕ ВИХРИ В «ЛЕГКОПЛОСКОСТНЫХ» МАГНЕТИКАХ

Все научные модели неверны, но некоторые полезны.

Д. Бокс

2.2.1. Метод Хироты. Отдельные вихри и цепочки из чередующихся вихрей и антивихрей

Одномерные статические $\Phi(x)$ и динамические $\Phi(x, t)$ солитоны модели (2.1.6) хорошо известны (см. [24–28, 31, 35] и цитированную там литературу). В этом подразделе изложены результаты работ [42–43], в которых с помощью метода Хироты получены и проанализированы двумерные решения уравнения

$$\Delta \Phi = \sin 2\Phi, \quad \Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2, \quad (2.2.1)$$

которые описывают конфигурации поля $\Phi(x, y)$ из солитонных вихрей с топологическими зарядами $Q = \pm 2$. В терминах вспомогательного поля $u(x, y) = 2\Phi(x, y)$ такие вихри имеют заряды $Q = \pm 4$.

При получении солитонных решений в методе Хироты уравнение (2.2.1) приводится к билинейному виду. При этом предполагается, что решение $\Phi(x, y)$ имеет вид

$$\Phi(x, y) = 2 \operatorname{arctg} \frac{p(x, y)}{q(x, y)}. \quad (2.2.2)$$

Вычисляя производные от функции (2.2.2) и подставляя их в выражение (2.2.1), имеем

$$(p^2 - q^2)(D_x^2 + D_y^2)q \cdot p + pq(D_x^2 + D_y^2)(q \cdot q - p \cdot p) = qp(p^2 - q^2), \quad (2.2.3)$$

где действие операторов Хироты D на функции q и p определено следующим образом:

$$D_x^n D_y^m p(x, y) \cdot q(x, y) = \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x'} \right)^n \left(\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y'} \right)^m p(x, y) \cdot q(x', y') \Big|_{x=x', y=y'};$$

$$n = 0, 1, 2, \dots; \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (2.2.4)$$

Поскольку вместо одной исходной функции $\Phi(x, y)$ вводятся две: $p(x, y)$ и $q(x, y)$, для их определения необходимо иметь два уравнения. Расщепление первоначального соотношения (2.2.3) на два новых было предложено Хиротой [30]:

$$(D_x^2 + D_y^2)q \cdot p = q \cdot p; \quad (2.2.5)$$

$$(D_x^2 + D_y^2)(q \cdot q - p \cdot p) = 0. \quad (2.2.6)$$

Для решения таких систем и получения солитонных решений Хирота предложил формальную теорию возмущений. Функции $p(x, y)$ и $q(x, y)$ ищутся в виде рядов по параметру ε :

$$p = \varepsilon p_1 + \varepsilon^3 p_3 + \varepsilon^5 p_5 + \dots, \quad q = 1 + \varepsilon^2 q_2 + \varepsilon^4 q_4 + \dots \quad (2.2.7)$$

Параметр ε служит лишь для наглядной группировки членов в формальной теории возмущений. После всех вычислений полагают $\varepsilon = 1$. Подставляя разложения (2.2.7) в уравнения (2.2.5) и (2.2.6) и приравнивая члены при одинаковых степенях ε , получаем следующую бесконечную систему уравнений:

$$\varepsilon : (D_x^2 + D_y^2) p_1 = p_1; \quad (2.2.8)$$

$$\varepsilon^2 : (D_x^2 + D_y^2)(p_1^2 - 2q_2) = 0 \quad (2.2.9)$$

и т. д. Выберем в качестве p_1 сумму следующего вида:

$$p_1 = \sum_{i=1}^N \exp[\theta_i], \quad \theta_i = \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} + \gamma_i, \quad \mathbf{k}_i^2 = 1, \quad \mathbf{r} = (x, y), \quad (2.2.10)$$

зависящую от комплексных параметров \mathbf{k}_i, γ_i . Здесь скалярное произведение векторов $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ и $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$ определено формулой: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$. Непосредственными вычислениями нетрудно проверить, что все слагаемые разложения (2.2.7) однозначно определяются цепочкой уравнений (2.2.8), (2.2.9), причем ряды (2.2.7) обрываются: $p_i = q_i = 0$ при $i > N - 1, j > N$ (N – четное) или при $i > N, j > N - 1$ (N – нечетное). Из приведенной схемы интегрирования ясно, что вещественность функции $p_1(\mathbf{r})$ достаточна для вещественности решения Φ и обеспечивается следующим выбором параметров:

$$\mathbf{k}_j = \mathbf{k}_j^*, \quad \mathbf{k}_j^2 = 1, \quad \gamma_j = v_j + i\pi S_j, \quad j = 1, 2, \dots, M;$$

$$\mathbf{k}_j = \mathbf{a}_j + i\mathbf{b}_j = \mathbf{k}_{-j+N+M+1}^*, \quad \gamma_j = \alpha_j + i\beta_j = \gamma_{-j+N+M+1}^*;$$

$$\mathbf{a}_j^2 - \mathbf{b}_j^2 = 1, \quad \mathbf{a}_j \cdot \mathbf{b}_j = 0, \quad j = M+1, \dots, N, \quad (2.2.11)$$

где v_i, α_i, β_j – произвольные вещественные числа; $\mathbf{a}_j, \mathbf{b}_j$ – двумерные вещественные векторы; целое число S_i равно нулю либо единице; а четности чисел M и N совпадают. Полагая $\varepsilon = 1$, получаем N -солитонное решение уравнений (2.2.1) с параметрами (2.2.11) в виде

$$p = \sum_{n=0}^{[(N-1)/2]} \sum_{N C_{2n+1}} a(s_1, \dots, s_{2n+1}) \exp(\theta_{s_1} + \theta_{s_{2n+1}}),$$

$$q = \sum_{n=0}^{[N/2]} \sum_{N C_{2n}} a(s_1, \dots, s_{2n}) \exp(\theta_{s_1} + \theta_{s_{2n}}), \quad (2.2.12)$$

где $[B]$ – целая часть числа B , ${}_N C_n$ – символ суммирования по всем комбинациям из N элементов по n . Множители $a(s_1, \dots, s_n)$ выражаются через произведения чисел

$$a(i, j) = (\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_j)^2 / (\mathbf{k}_i + \mathbf{k}_j)^2 \quad (2.2.13)$$

в следующем виде:

$$a(r_1, r_2, \dots, r_n) = \begin{cases} \prod_{k < l}^{(n)} a(r_k, r_l), & n \geq 2, \quad k, l = 1, \dots, n; \\ 1, & n = 0, 1. \end{cases} \quad (2.2.14)$$

Используя тождества Хироты [29, 30], можно показать, что функции p и q (2.2.12) – (2.2.14) удовлетворяют уравнениям (2.2.8), (2.2.9). Случаю $N = 1$ соответствует доменная граница

$$\Phi = 2 \operatorname{arctg} \left[(-1)^S \exp[(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) + v] \right], \quad (2.2.15)$$

расположенная ортогонально вещественному вектору \mathbf{k} (рис. 2.2). Ее полярность (киральность) определяется целым числом $S = 0, 1$. В теории солитонов вместо термина «полярность доменной грани-

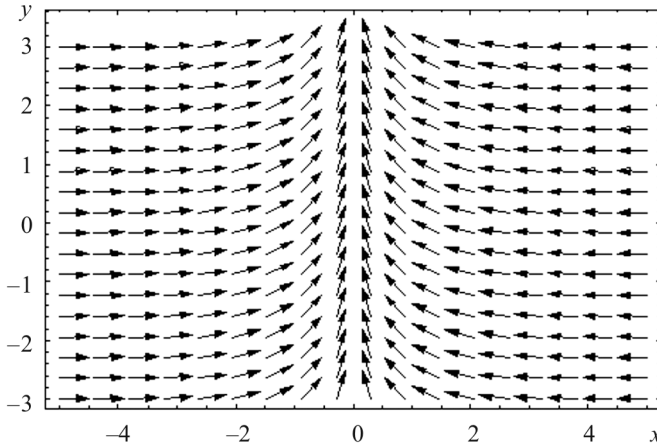


Рис. 2.2. Распределение намагниченности в 180°-й доменной границе (π -кинке), $S = 0, \mathbf{k} = (1, 0)$

цы» часто употребляется обозначение «одномерный топологический заряд доменной стенки»:

$$\sigma = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \partial_{\xi} \Phi = (-1)^S, \quad \xi = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}.$$

При $N = 2$ соответствующее решение определяется вещественными параметрами $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, v_1, v_2$:

$$\Phi(x, y) = 2 \operatorname{arctg} \frac{\exp[\theta_1] + \exp[\theta_2]}{1 + a(1, 2) \exp[\theta_1 + \theta_2]} \quad (2.2.16)$$

и имеет следующее асимптотическое поведение:

$$\Phi \rightarrow 2 \operatorname{arctg} \left\{ (-1)^{S_2} \exp[\mp(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r} + v_2) + \xi_{\pm}] \right\} \quad \text{при} \quad \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} \rightarrow \pm\infty,$$

$$\Phi \rightarrow 2 \operatorname{arctg} \left\{ (-1)^{S_1} \exp[\mp(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} + v_1) + \xi_{\pm}] \right\} \quad \text{при} \quad \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r} \rightarrow \pm\infty,$$

где $\xi_{-} = 0, \xi_{+} = -\ln[a(1, 2)]$. Оно описывает две 180°-е непрямолинейные пересекающиеся доменные границы, центры которых (т. е. геометрическое место точек с $\Phi = \pm 2\pi n + \pi/2$, где n – целое число)

сдвигаются после пересечения на расстояние $\ln[a(1, 2)]$. После пересечения происходит смена полярности доменных границ.

Характер решения существенно зависит от выбора целых чисел $S_1, S_2 = 0, 1$. Действительно, в параметризации $\mathbf{k}_a = (\cos\varphi_a, \sin\varphi_a)$ $a = 1, 2$ несложными преобразованиями искомое решение может быть приведено к виду

$$\Phi = 2 \operatorname{arctg} \left\{ \frac{\operatorname{ch} (y \sin[(\varphi_1 - \varphi_2)/2])}{\operatorname{ch} (x \cos[(\varphi_1 - \varphi_2)/2])} \operatorname{ctg} \left(\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} \right) \right\} \quad \text{при } S_1 = S_2; \quad (2.2.17)$$

$$\begin{aligned} & \Phi = 2 (S_1 - S_2) \operatorname{sign}(\varphi_1 - \varphi_2) \times \\ & \times \operatorname{arctg} \left\{ \frac{\operatorname{sh} (y \sin[(\varphi_1 - \varphi_2)/2])}{\operatorname{sh} (x \cos[(\varphi_1 - \varphi_2)/2])} \operatorname{ctg} \left(\frac{\varphi_1 - \varphi_1}{2} \right) \right\} \quad \text{при } S_1 \neq S_2. \end{aligned} \quad (2.2.18)$$

Соответствующие распределения намагниченности $\mathbf{m} = (\cos\Phi, \sin\Phi)$ при $\varphi_2 = \varphi_1 + \pi/2$ представлены на рис. 2.3 и 2.4. Видно, что (2.2.17) – решение с нулевым топологическим зарядом. В то время как решение (2.2.18) при малых x, y имеет особенность и описывает вихрь с топологическим зарядом $Q = 2(S_1 - S_2)\operatorname{sign}(\varphi_1 - \varphi_2)$, расположенный в начале координат (напомним, что $S_{1,2} = 0, 1; S_1 \neq S_2$). Решение (2.2.18) впервые было получено в работах [50–52] прямым интегрированием уравнения (2.2.1) после подстановки

$$\Phi(x, y) = 2 \operatorname{arctg} [p(y)/q(x)].$$

По виду асимптотики этот вихрь можно трактовать как пересечение двух доменных границ. Такая интерпретация справедлива лишь вдали от точки пересечения, поскольку вихревая структура ядра дефекта сохраняется даже в случае нулевой анизотропии.

Вырожденное решение

$$\Phi = 2 \operatorname{arctg} \left[\frac{x}{\operatorname{sh} y} \right] \quad (2.2.19)$$

может быть получено из двухсолитонного решения (2.2.18) в пределе $\mathbf{k}_1 \rightarrow \mathbf{k}_2$. Такой предельный переход соответствует случаю сбли-

Рис. 2.3. Нетопологическое распределение намагниченности для структуры (2.2.17)

жения двух доменных границ (угол между векторами \mathbf{k}_1 и \mathbf{k}_2 , перпендикулярными к доменным границам, стремится к нулю). В отличие от (2.2.18) структура (2.2.17) при $\mathbf{k}_1 \rightarrow \mathbf{k}_2$ становится тривиальной. Распределение векторного поля, соответствующее вихревой конфигурации (2.2.19) и представленное на рис. 2.5, имеет типичную антивихревую структуру.

Несложный анализ показывает, что плотность энергии вихря (2.1.18) уменьшается с увеличением параметра $\tau = \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2$ ($\tau > 0$) и его энергия $E \sim 4R$ при $R \gg 1$, где R – характерный размер образца.

Рассмотрим другие решения двумерной модели (2.2.1), которые для определенности будем называть бризерными. Название связано с тем обстоятельством, что для волнового уравнения (2.1.14) подобные решения описывают пульсирующие со временем солитоны – бризеры. Для статической модели (2.2.1) простейшие бризерные конфигурации определя-

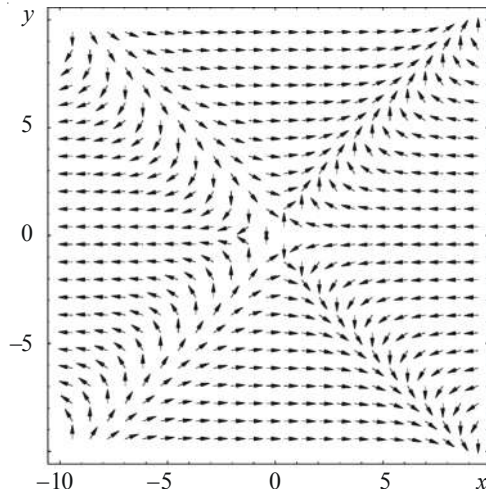
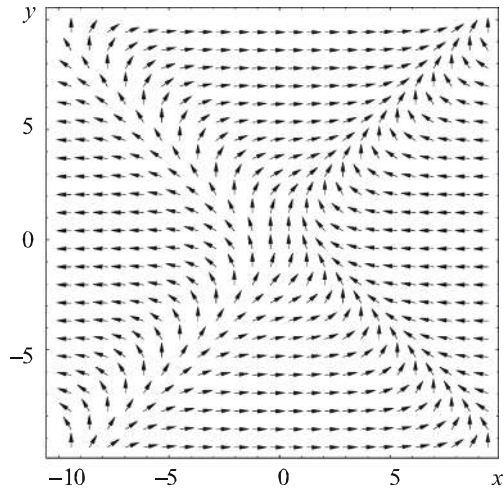


Рис. 2.4. Топологическое распределение намагниченности структуры (2.2.18). Центр вихря расположен в точке пересечения доменных границ

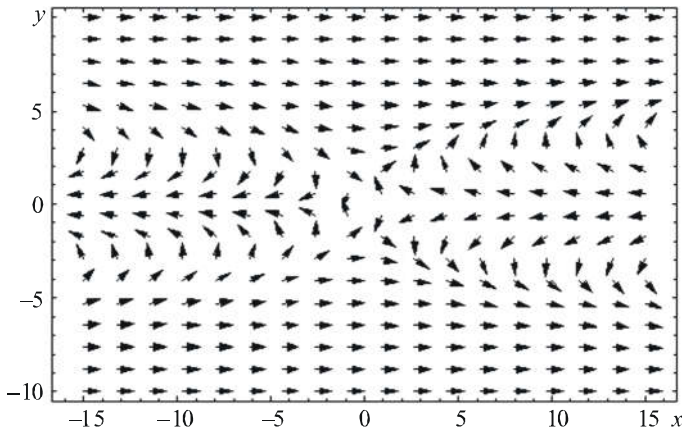


Рис. 2.5. Распределение намагниченности для вырожденной вихревой структуры (2.2.19)

ются выражением (2.1.12) при $N = 2$ и $\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2^*$. Параметризуя векторы \mathbf{a} , \mathbf{b} в виде $\mathbf{a} = (0, \text{ch}\varphi)$, $\mathbf{b} = (\text{sh}\varphi, 0)$, $-\infty < \varphi < \infty$, получаем

$$\Phi = 2 \operatorname{arctg} \left\{ \frac{\operatorname{cth} \varphi \sin[x \operatorname{sh} \varphi]}{\operatorname{sh}[y \operatorname{ch} \varphi]} \right\}. \quad (2.2.20)$$

Распределение намагниченности $\mathbf{m} = (\cos\Phi, \sin\Phi)$ описывает цепочку антивихрей и вихрей, находящихся соответственно в точках $\mathbf{r}_m = (\pi m / \operatorname{sh}\varphi, 0)$ ($m = 0, \pm 2, \dots$) и $\mathbf{r}_m = (\pi m / \operatorname{sh}\varphi, 0)$ ($m = \pm 1, \pm 3, \dots$) с произвольным периодом $T = 2\pi / \operatorname{sh}\varphi$ (рис. 2.6). Такая вихревая структура топологически совпадает с картиной распределения намагниченности, предложенной в работе [53] для описания 360°-й доменной границы с периодически расположенными блоховскими линиями.

Более наглядно цепочку из чередующихся вихрей и антивихрей (2.2.20) можно трактовать как результат перекручивания и пересечения двух 180°-х доменных стенок (π -кинков). После каждого пересечения отрезки доменных границ меняют полярность. Поскольку в окрестности точки пересечения участки доменных границ почти ортогональны, каждый вихрь или антивихрь локально воспроизводит элементарную конфигурацию, подобную изображенной на рис. 2.4. Более подробно такая интерпретация бризерных вихрей изложена в п. 2.3.

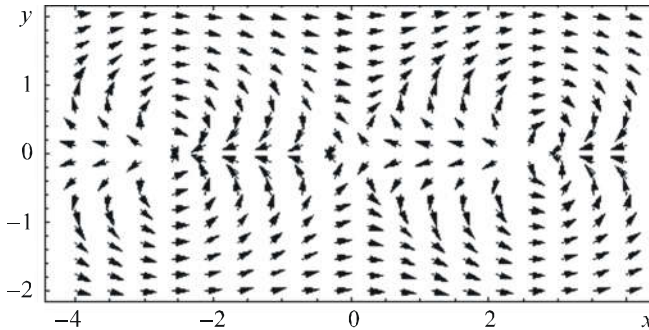


Рис. 2.6. Распределение намагниченности для вихревой цепочки (2.2.20) ($\varphi = 1$)

Общее решение (2.2.2), (2.2.11) – (2.2.14) описывает систему из M взаимодействующих доменных границ и $[(N - M)/2]$ брызговых вихрей. Далее ограничимся изучением структур с $N = M$, в которых вихри образуются пересечением взаимодействующих доменных границ. В отличие от линейных теорий, где положение вихрей задано в явном виде, необходим дополнительный анализ формул (2.2.12) (при разных значениях $S_i = 0, 1$ ($i = 1, 2, \dots, N$)) для определения центров вихрей и расстояний между ними. Решение (2.2.2), (2.2.12) при $N = M$ вихреподобно, если в окрестности некоторых точек $\mathbf{r}_i = (x_{0i}, y_{0i})$ (центров вихрей) оно совпадает с (2.1.22) ($u = 2\Phi$). Необходимые условия существования N_1 вихрей в точках \mathbf{r}_i ($i = 1, 2, \dots, N_1$) записываются в простом виде

$$p(\mathbf{r}_i) = q(\mathbf{r}_i) = 0. \quad (2.2.21)$$

Для исследования характера взаимодействия вихрей проведем подробный анализ трех- и четырехсолитонных решений. При $N = M = 3$ без потери общности ограничимся обсуждением конфигурации, образованной пересечением двух π -кинков, находящихся на минимально возможном расстоянии друг от друга ($\mathbf{k}_3 \rightarrow \mathbf{k}_1$), и перпендикулярным им π -кинком ($\mathbf{k}_2 \perp \mathbf{k}_3$). В этом случае формулы (2.2.12) несправедливы при конечных значениях v_1, v_2, v_3 поскольку выбор p_1 в виде (2.2.10) не содержит трех линейно независимых решений уравнения (2.2.8). Как известно из теории линейных дифференциальных уравнений, при равных корнях характеристических уравнений соответствующие решения необходимо искать в полиномиально-экспоненциальном виде. В рамках метода Хироты систематический алгоритм построения и изучения полиномиально-экспоненциальных

солитонов предложен в работах [54, 55]. Окончательный результат для вырожденного трехсолитонного решения удобно записать в виде

$$\begin{aligned} p &= (x + c - 2) \exp [x + v_1] - \operatorname{sh}(y + v_2), \\ q &= (x + c) - \operatorname{sh}(y + v_2) \exp [x + v_1], \end{aligned} \quad (2.2.22)$$

где c, v_1, v_2 — произвольные вещественные постоянные. При выборе $c = \operatorname{sh} v_2 \exp v_1$, $\operatorname{sh} v_2 = (\operatorname{sh} v_1)^{-1}$ из уравнений (2.2.21) следует, что один вихрь с зарядом $Q = 2 \operatorname{sign} v_1$ расположен в начале координат, а координаты другого вихря с $Q = 2 \operatorname{sign}(x_0 + \operatorname{cth} v_1)$ в точке (x_0, y_0) удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} (x_0 + c) \operatorname{sh}(x_0 + v_1) &= \exp(x_0 + v_1); \\ \operatorname{sh}(x_0 + v_1) \operatorname{sh}(y_0 + v_2) &= 1. \end{aligned} \quad (2.2.23)$$

Решение первого из этих уравнений подчиняется условию

$$r(x_0) = \operatorname{sh} x_0 (-4x_0 \operatorname{ch} x_0 + (4 + x_0^2) \operatorname{sh} x_0) > 0. \quad (2.2.24)$$

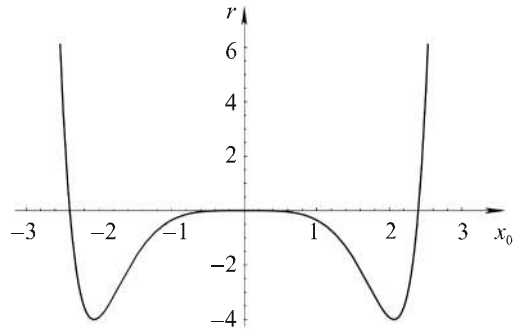
Из графика функции $r(x_0)$, изображенного на рис. 2.7, следует $|x_0| > l_0 \approx 2.4$. Поэтому вихри с противоположными зарядами не аннигилируют.

В п. 2.3 при обсуждении топологических дефектов в несоизмеримых магнитных структурах вырожденное решение (2.2.2), (2.2.22), описывающее вихревой диполь, будет получено с помощью преобразования Бэклунда. Векторное поле такого диполя при выборе $v_1 = v_2 = 0$, $c = 1$ в соотношениях (2.2.22) представлено на рис. 2.17.

Общий топологический заряд четырехсолитонного решения определяется только значениями S_i ($i = 1, 2, 3, 4$). При $\mathbf{k}_1 = -\mathbf{k}_3$, $\mathbf{k}_2 = -\mathbf{k}_4$, $\mathbf{k}_1 \perp \mathbf{k}_2$ уравнениям (2.2.8), (2.2.9) удовлетворяет структура

$$\begin{aligned} p &= s \operatorname{sh}(x + \alpha) \left[c_2 + \frac{x}{2} \right] + \operatorname{sh}(y + \beta) \left[c_1 + \frac{y}{2} \right] - s \operatorname{ch}(x + \alpha) - \operatorname{ch}(y + \beta), \\ q &= \frac{1}{2} s \operatorname{sh}(x + \alpha) \operatorname{sh}(y + \beta) + 2 \left(c_1 + \frac{y}{2} \right) \left(c_2 + \frac{x}{2} \right), \end{aligned} \quad (2.2.25)$$

где $2c_1 = \operatorname{tg} \beta / 2 [1 - s \operatorname{ch} \alpha]$; $c_2 = [\operatorname{th} \alpha / 2]^{-s} (\operatorname{ch} \beta / 2)^2$; $s = -1$ или 1 ; α, β — произвольные вещественные постоянные. Можно показать, что общий заряд такой конфигурации $n = -2[1 - s]$. Здесь для c_1, c_2 приве-

Рис. 2.7. График функции $r(x_0)$ (2.2.24)

дено одно из четырех решений, при которых вихрь или антивихрь находятся в начале координат.

При $s = -1$ решение (2.2.25) содержит антивихрь в начале координат, вихрь и два антивихря, расстояние между которыми зависит от значений параметров α , β и является произвольным. При $\alpha \rightarrow 0$, $\beta \rightarrow 0$ вихрь и два антивихря стремятся к началу координат и образуется антивихрь с зарядом $Q = -4$.

$$p = -\frac{x}{2} \operatorname{sh} x + \frac{y}{2} \operatorname{sh} y + \operatorname{ch} x - \operatorname{ch} y,$$

$$q = -\frac{1}{2} \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y + \frac{xy}{2}. \quad (2.2.26)$$

При $s = 1$ решение (2.2.26) описывает два вихря и два антивихря. Анализ уравнений для центров вихрей показывает, что минимальное расстояние между вихрями, препятствующее их аннигиляции, достигается выбором параметра $\beta = 0$. Тогда антивихри с зарядом $Q = -2$ расположены в вершинах квадрата с координатами $(0, 0)$, $(-2\alpha, 0)$, а вихри с зарядом $Q = 2$ — в вершинах с координатами $(-\alpha, \alpha)$, $(-\alpha, -\alpha)$, где параметр α удовлетворяет соотношению $\alpha/2 = \operatorname{cth} \alpha/2$ ($\alpha \approx 2.4$).

Точный вид решений (2.2.2), (2.2.12) позволяет полностью описать характер взаимодействия вихрей. Одно из необычных свойств такого взаимодействия — отсутствие аннигиляции вихрей противоположных знаков в структурах с нулевым топологическим зарядом. Связано это с тем, что солитонные вихри в рассматриваемой модели образуются из доменных границ, взаимодействия которых препятствуют сближению вихрей.

2.2.2. Подстановка Лэмба. Прямоугольные решетки из вихрей и антивихрей

Перейдем к изучению периодических по двум пространственным переменным x, y вихревых распределений намагниченности. Существование упорядоченных структур из вихрей присуще физике сверхпроводников [56, 57]. В магнитных системах такие структуры обеспечивают учет граничных условий при описании вихрей в пластине конечных размеров. Кроме того, известно, что в ферромагнетиках в определенном интервале магнитных полей наиболее энергетически выгодным является образование плоскопараллельной доменной структуры. Пересечение двух плоскопараллельных структур и приводит к возникновению решетки вихрей. Упорядоченные структуры можно получить из конечнозонных решений [58, 59]. Однако анализ этих решений, выраженных многомерными тэта-функциями, затруднен. Поэтому для изучения двоякопериодических решений (решеток) мы используем представление (2.2.2), где функции $p(q)$ зависят только от $x(y)$ и удовлетворяют уравнениям

$$\left(\frac{dp}{dx}\right)^2 = ap^2 + bp^4 + c, \quad \left(\frac{dq}{dy}\right)^2 = (1-a)q^2 + bq^4 + c. \quad (2.2.27)$$

Гиперболический аналог выражений (2.2.27) (подстановка Лэмба [45]) описывает одномерные солитоны в длинных джозефсоновских контактах с малыми поперечными размерами [60].

Согласно [61], явный вид решений системы (2.2.27) зависит от знаков постоянных a, b, c и значений корней $\pm\sqrt{p_1}, \pm\sqrt{p_2}, \pm\sqrt{q_1}, \pm\sqrt{q_2}$ многочленов в правых частях уравнений (2.2.27):

$$p_{1,2} = \frac{1}{2b} \left[-a \pm \sqrt{a^2 - 4bc} \right], \quad q_{1,2} = \frac{1}{2b} \left[(a-1) \pm \sqrt{(a-1)^2 - 4bc} \right].$$

Получаемые таким способом независимые типы солитонных вихревых решеток можно разделить на три класса (рис. 2.8).

а. Прямоугольная (шахматная) решетка ($b > 0, c < 0, a < 0$):

$$\Phi = 2\text{arctg} \left[\frac{\sqrt{p_1} \text{cn}(y\sqrt{b(q_1 - q_2)}, k_q)}{\sqrt{q_1} \text{cn}(x\sqrt{b(p_1 - p_2)}, k_p)} \right]. \quad (2.2.28)$$

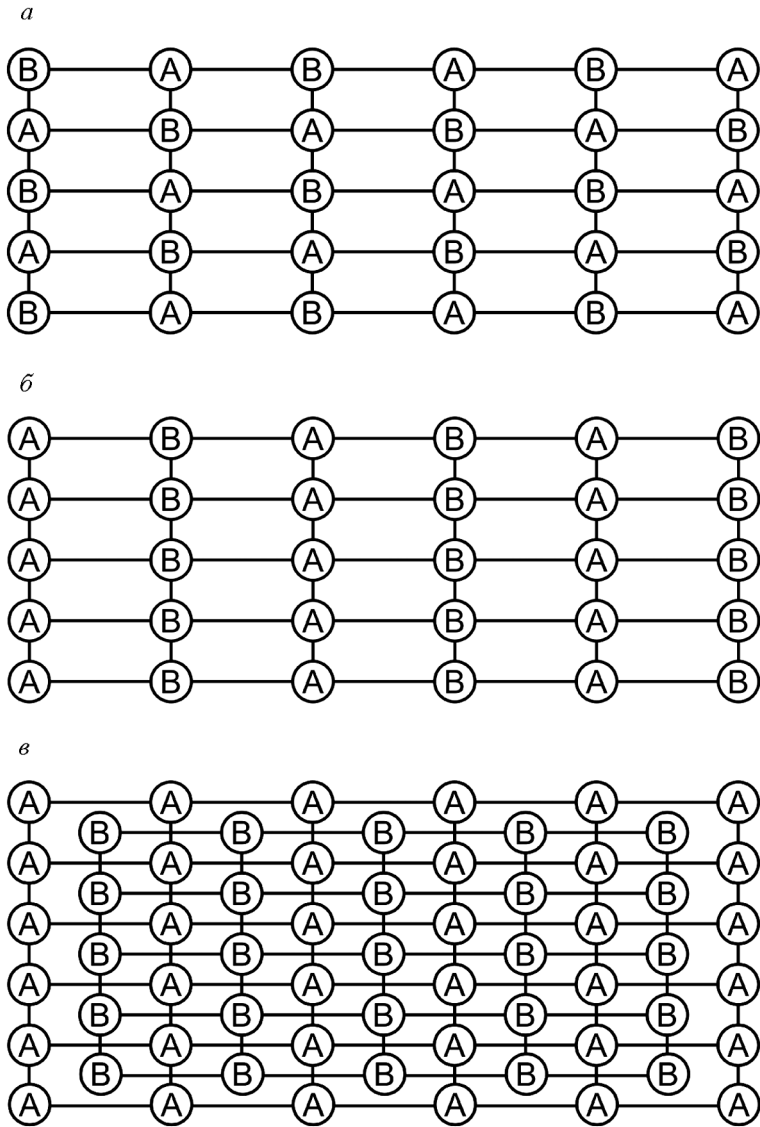


Рис. 2.8. Решетки вихрей:
a – шахматная, *б* – полосовая, *в* – прямоугольно-центрированная

Структура (2.2.28) состоит из вихрей с зарядами $2(-1)^{m+n}$ (m, n – целые числа) в точках с координатами $(K_p(2m+1)/\sqrt{b(p_1-p_2)}, K_q(2n+1)/\sqrt{b(q_1-q_2)})$. Здесь $K_{p,q} = K(k_{p,q})$ – полные эллиптические интегралы первого рода с модулями $k_p = \sqrt{p_2(-p_1+p_2)^{-1}}$ и $k_q = \sqrt{q_2(-q_1+q_2)^{-1}}$.

б. Полосовая (страйп) решетка ($b > 0, c > 0, -a > 2\sqrt{bc} - 1 > 0$) представляется в виде

$$\Phi = 2\operatorname{arctg} \left[\sqrt{\frac{-p_1}{q_2}} \operatorname{sc}(y\sqrt{-bq_2}, k_q) \operatorname{ns}(x\sqrt{bp_1}, k_p) \right],$$

$$k_p^2 = \frac{p_2}{p_1}, \quad k_q^2 = 1 - \frac{q_1}{q_2}, \quad \operatorname{sc}(u) \equiv \frac{\operatorname{snu}}{\operatorname{cnu}}, \quad \operatorname{ns}(u) \equiv \frac{1}{\operatorname{snu}}, \quad (2.2.29)$$

где $\operatorname{snu}, \operatorname{cnu}$ – эллиптические функции Якоби. Вихри с зарядами $2(-1)^m$ расположены в точках $(2mK_p/\sqrt{bp_1}, 2nK_q/\sqrt{-bq_2})$.

в. Прямоугольно-центрированная решетка ($c > 0, b > 0, 2\sqrt{bc} < a < 1$). Это решение дается формулой

$$\Phi = 2\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{p_2}{q_2}} \operatorname{cs}(y\sqrt{-bq_2}, k_g) \operatorname{sc}(x\sqrt{-bp_2}, k_p). \quad (2.2.30)$$

Здесь $k_p^2 = 1 - p_1/p_2, k_g^2 = 1 - q_1/q_2, \operatorname{csu} \equiv \operatorname{cnu}/\operatorname{snu}$. Рассматриваемая структура состоит из вихрей с зарядами $2(-1)^{(m+n)/2}$ ($(m+n)/2$ – целое число) в точках с координатами $(mK_p/\sqrt{-bp_2}, nK_g/\sqrt{-bq_2})$.

Кроме того, уравнения (2.2.27) имеют еще одно независимое решение (при $b < 0, c < 0, 2\sqrt{bc} < a < 1$):

$$\Phi = 2\operatorname{arctg} \left[\sqrt{\frac{p_2}{q_2}} \frac{\operatorname{dn}(x\sqrt{-bp_2}, k_q)}{\operatorname{dn}(y\sqrt{-bq_2}, k_p)} \right], \quad (2.2.31)$$

где $k_p^2 = 1 - p_1/p_2, k_g^2 = 1 - q_1/q_2$. В этом случае функция Φ описывает в плоскости (x, y) нутационные колебания около луча, образующего угол $2\operatorname{arctg} \sqrt{p_2/q_2}$ с осью Oy , что является двумерным обоб-

щением нутационной доменной структуры в «легкоосных» ферромагнетиках.

В пределе $b \rightarrow 0$ вихревая структура (2.2.30) переходит в (2.2.18), а распределение (2.2.31) – в (2.2.17). Отметим, что в солитонных вихревых цепочках и решетках расстояние между вихрями с противоположными топологическими зарядами в общем случае произвольно.

2.2.3. Применение метода Хироты для построения двумерных динамических решений модели

В этом разделе на основе точных решений модели (2.1.4) исследуем динамику изолированных двумерных вихрей и вихревых бризеров.

Канонические уравнения для системы прямолинейных магнитных вихрей планарного ферромагнетика получены в работах [62–65]. Как и для гидродинамических вихрей [66, 67], уравнения движения магнитных вихрей имеют гамильтонову форму. Плотность энергии пропорциональна $(\nabla\Phi)^2$, где Φ – угол поворота магнитного момента в «легкой плоскости». Выражение для энергии и уравнение $\Delta\Phi = 0$, определяющее поле $\Phi(\mathbf{r})$, справедливы всюду, кроме ядер вихрей, поскольку в области ядер компонента нормированной намагниченности m_z возрастает от нуля до значений $m_z = \pm 1$ на оси вихря. В нашем случае модель (2.1.4) также справедлива вне сердцевины вихрей, однако наличие слагаемого $\sim \sin 2\Phi$ резко усложняет вывод упрощенных уравнений динамики вихрей. По-видимому, подобные уравнения неинтегрируемы в общем случае [68, 69]. Поэтому далее мы не будем выводить уравнений вихревой динамики, а воспользуемся тем обстоятельством, что метод Хироты в отличие от других точных методов формально применим и к трехмерному динамическому уравнению sine-Gordon (2.1.4). Динамика вихрей определяется из анализа особых точек соответствующих точных решений, которые представляют определенную «интегрируемую часть» в многообразии всех решений неинтегрируемой модели (2.1.4).

Известно [70, 71], что применение метода Хироты к двумерному динамическому уравнению (2.1.4) вновь приводит к формуле (2.2.2), (2.2.12), которая справедлива при $N = 1, 2, 3$, если θ_i и $a(i, j)$ имеют следующий вид:

$$\theta_i = \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} + \omega_i t + \gamma_i, \quad \mathbf{k}_i^2 - \omega_i^2 = 1,$$

$$a(i, j) = \frac{(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_j)^2 - (\omega_i - \omega_j)^2}{(\mathbf{k}_i + \mathbf{k}_j)^2 - (\omega_i + \omega_j)^2}. \quad (2.2.32)$$

Кроме того, при $N = 3$ параметры $\mathbf{k}_i = (k_{i1}, k_{i2})$, ω_i ($i = 1, 2, 3$) не являются независимыми, а подчиняются алгебраической связи

$$\det \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \omega_1 \\ k_{21} & k_{22} & \omega_2 \\ k_{31} & k_{32} & \omega_3 \end{pmatrix} = 0.$$

Как и в предыдущем параграфе, мы не только анализируем случай вещественных \mathbf{k}_i , ω_i , γ_i , но обсуждаем точные решения, полученные аналитическим предположением по этим параметрам. Так, при вещественных значениях \mathbf{k}_i , ω_i постоянная γ_i может иметь мнимую добавку $i\gamma_j$ ($s_j = 0, 1$), рассматриваем также случай комплексных \mathbf{k}_i , ω_i , γ_i .

Обсудим двухсолитонное решение

$$\Phi = 2 \operatorname{arctg} \frac{\exp(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} + \omega_1 t + \gamma_1) + \exp(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r} + \omega_2 t + \gamma_2)}{1 + a(1, 2) \exp p \left[(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{r} + (\omega_1 + \omega_2) t + \gamma_1 + \gamma_2 \right]}. \quad (2.2.33)$$

При вещественных \mathbf{k}_1 , \mathbf{k}_2 , $\operatorname{Im} \gamma_j = i\gamma_j$ выражение (2.2.33) в случае $s_1 = s_2$ описывает рассеяние двух доменных границ. При $s_1 = 0$, $s_2 = 1$ решение (2.2.33) имеет четыре параметра (помимо γ_1, γ_2):

$$\Phi = 2 \operatorname{arctg} \left[\frac{\operatorname{sh} \left(\left(\frac{\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2}{2} \right) \cdot \mathbf{r} + \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \right)}{\sqrt{a(1, 2)} \operatorname{sh} \left(\left(\frac{\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2}{2} \right) \cdot \mathbf{r} + \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \right)} \right] \quad (2.2.34)$$

и описывает вихрь, центр которого движется в определенном направлении со скоростью $|V| < 1$ (в безразмерных переменных). Другие два параметра влияют на распределение намагниченности вблизи центра вихря. Можно показать, что при $N = M = 3$, $\mathbf{k}_3 \rightarrow \mathbf{k}_1$, $\omega_2 \rightarrow \omega_1$ и вещественных ω_1 , ω_2 трехсолитонное решение содержит два вихря, движущихся равномерно в направлениях \mathbf{k}_1 и \mathbf{k}_2 со скоростями $\omega_1/|\mathbf{k}_1|$ и $\omega_2/|\mathbf{k}_2|$ соответственно.

Явный вид решения (2.2.33) при условии $\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2^*$, $\omega_1 = \omega_2^*$, $\gamma_1 = \gamma_2^*$ существенным образом зависит от знака $a(1, 2)$. В параметризации

$$\mathbf{k}_1 = (\cos(i\beta + \pi/2), \sin(i\beta + \pi/2)) \operatorname{ch}(\mu + iv), \quad \omega_1 = \operatorname{sh}(\mu + iv);$$

$$0 \leq v \leq 2\pi, \quad -\infty < \beta, \quad \mu < \infty$$

получаем

$$\Phi = 2 \operatorname{arctg} \left\{ \frac{\cos[-x \operatorname{sh}\beta \operatorname{ch}\mu \cos v + y \operatorname{ch}\beta \operatorname{sh}\mu \sin v + t \operatorname{ch}\mu \sin v]}{|a(1, 2)|^{1/2} \operatorname{sh}[x \operatorname{sh}\beta \operatorname{sh}\mu \sin v + y \operatorname{ch}\beta \operatorname{ch}\mu \cos v + t \operatorname{sh}\mu \cos v]} \right\}$$

при $a(1, 2) < 0$; (2.2.35)

$$\Phi = 2 \operatorname{arctg} \left\{ \frac{\cos[-x \operatorname{sh}\beta \operatorname{ch}\mu \cos v + y \operatorname{ch}\beta \operatorname{sh}\mu \sin v + t \operatorname{ch}\mu \sin v]}{|a(1, 2)|^{1/2} \operatorname{ch}[x \operatorname{sh}\beta \operatorname{sh}\mu \sin v + y \operatorname{ch}\beta \operatorname{ch}\mu \cos v + t \operatorname{sh}\mu \cos v]} \right\}$$

при $a(1, 2) > 0$, (2.2.36)

где

$$a(1, 2) = [\operatorname{ch}^2 \beta \cos^2 v + \operatorname{sh}^2 \mu \operatorname{sh}^2 \beta]^{-1} - 1.$$

Выражение (2.2.35) при $\mu = v = 0$ описывает статический вихревой бризер (2.2.20), а при $\mu, v \neq 0$ оно соответствует динамической 360° -й доменной границе, которая содержит цепочку вихрей с чередующимися противоположными зарядами (рис. 2.9). В безразмерных переменных скорость вихрей меньше единицы. Они

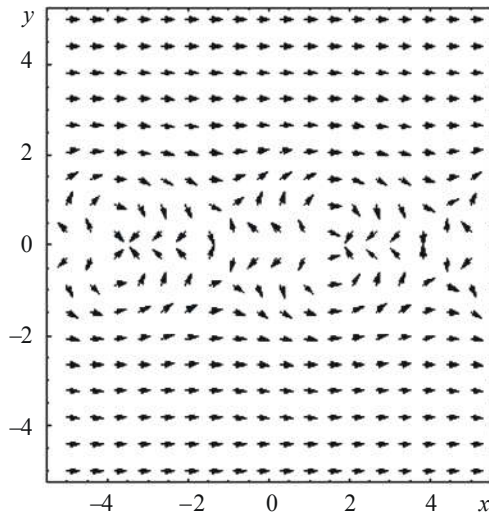


Рис. 2.9. Динамическая цепочка вихрей и антивихрей (2.2.35)
 $\mu = 0, v = 0.1, \beta = 1, t = 1$

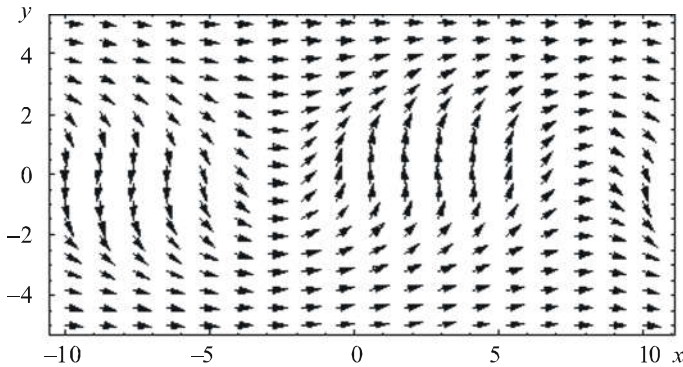


Рис. 2.10. Ориентация вектора намагниченности в двумерном динамическом бризере (2.2.36) при $\mu = 0.001$, $\nu = \pi/4$, $\beta = 0.4$, $t = 1$

движутся синхронно, поэтому расстояния между ними остаются постоянными.

Иной характер имеет решение (2.2.36), которое описывает локализованную в одном направлении 360° -ю доменную границу с шириной

$$d = \left[\text{sh}^2 \beta \text{sh}^2 \mu \sin^2 \nu + \text{ch}^2 \beta \text{ch}^2 \mu \cos^2 \nu \right]^{-1/2},$$

центр которой перемещается со скоростью $V = \text{sh} \mu \cos \nu d^{-1}$ в направлении $\mathbf{n} = d^{-1}(\text{sh} \beta \text{sh} \mu \sin \nu, \text{ch} \beta \text{ch} \mu \cos \nu)$ (рис. 2.10).

При значениях $\mu = 0$ и $\nu = \pi/2$ нелинейное возбуждение (2.2.36) не перемещается как целое, но пульсирует со временем в области своей пространственной локализации. Так, в случае $\mu = 0$ имеем решение

$$\Phi = 2 \arctg \left\{ \left(\frac{\text{ch}^2 \beta \cos^2 \nu}{1 - \text{ch}^2 \beta \cos^2 \nu} \right)^{1/2} \frac{\cos[-x \text{sh} \beta \cos \nu + t \sin \nu]}{\text{ch}[y \text{ch} \beta \cos \nu]} \right\}, \quad (2.2.37)$$

которое при $\beta = 0$ совпадает с известным одномерным бризерным решением (см., например, [24–27]). Поскольку выражение (2.2.37) не может быть получено из последнего поворотами и преобразованиями Лоренца, оно представляет собой новое динамическое двумерное решение. При значениях $\text{ch} \beta \cos \nu \approx 1$ и $t = 0$ бризер (2.2.37) можно интерпретировать как связанное состояние двух 180° -х до-

менных границ, перекрученных таким образом, что их центры тяжести периодически промодулированы с характерным расстоянием $2\pi/(sh\beta \cos v)$.

В другом предельном случае, когда $ch\beta \cos v \ll 1$, при «умеренных» значениях v выражение (2.2.37) переходит в малоамплитудный бризер

$$\Phi = 2ch\beta \cos v [chy ch\beta \cos v]^{-1} \cos[-xsh\beta \cos v + t \sin v],$$

который представляет собой спиновую волну, распространяющуюся в Ox -направлении на фоне стандартного солитона, бесконечно протяженного в этом направлении и локализованного вдоль оси Oy .

Исключительно удобной магнитной системой для наблюдения свойств и тонкой структуры вихревых распределений намагниченности являются одноосные пленки магнитных гранатов, имеющие большую константу наведенной во время роста магнитной анизотропии типа «легкая плоскость». Указанная анизотропия приводит к тому, что намагниченность образца лежит в плоскости пленки и ориентация ее в этой плоскости определяется более слабой кристаллической кубической анизотропией. Типичные примеры подобных систем – двумерные магнитные пленки $SmTmGaGe$ [72] и $EuTmGa$ [73] гранатов. Простота геометрии образцов допускает широкое применение для изучения магнитных вихрей детально разработанных и обладающих высокой чувствительностью магнитооптических методов (с использованием, в частности, эффекта Коттона – Мутона). Конфигурация вихря как пересечение двух 90° -х доменных границ была смоделирована экспериментально в тонких пленках $Eu_{0.7}Tm_{0.5}Ga_{0.85}$ ферритов-гранатов с «остаточной» кубической анизотропией в плоскости пленки [74].

Как упоминалось ранее, рассмотренная модель хорошо применима к слабым ферромагнетикам, поскольку в них, как и в антиферромагнетиках, малы магнитостатические взаимодействия. В вихревых конфигурациях слабых ферро- и антиферромагнетиков поле $\Phi(x, y)$ определяет ориентацию вектора антиферромагнетизма в плоскости разворота, например в плоскости ac в иттриевом ортоферрите или в плоскости ab в диспрозиевом ортоферрите.

2.3. СОЛИТОНОПОДОБНЫЕ ДЕФЕКТЫ В НЕСОИЗМЕРИМЫХ СТРУКТУРАХ И НА ФОНЕ ВОЛНЫ НАМАГНИЧЕННОСТИ

Проблемы зарождаются медленно, но размножаются быстро.

В. Гжегорчик

Зарождение интереса к несоизмеримым двумерным структурам исторически связано с изучением поверхностей и тонких пленок. Бурное развитие экспериментальных исследований по физике двумерных кристаллов началось в 60-е гг. XX в., когда был разработан целый арсенал методов диагностики поверхностей. Это позволило рассматривать явления в таких системах на атомном уровне в надежно контролируемых условиях. Рост научного интереса к двумерным системам стимулировался требованиями практики (микроэлектроника, выращивание кристаллов, катализ и др.), многообразием свойств двумерных кристаллов. Было обнаружено, что разные сверхструктуры на поверхности кристалла описываются двумерными точно решаемыми моделями (Изинга, Потса, Бэкстера и др.). Оказалось, что решетки адатомов изобилуют несоизмеримыми структурами. Хотя бы один из периодов подобных структур находится в иррациональном отношении с периодами как кристалла-подложки, так и кристалла, который образовали бы адатомы в отсутствие подложки. Было найдено множество фазовых переходов, связывающих состояния двумерных кристаллов. Установлено, что тепловые флуктуации существенно влияют на характер этих переходов. В несоизмеримых структурах экспериментально наблюдались топологические дефекты, и было высказано предположение о том, что они во многом определяют физические свойства двумерных систем. Однако полное аналитическое описание подобных дефектов в рамках установленных теоретических моделей до сих пор отсутствует.

Самая многочисленная группа двумерных кристаллов – решетки атомов, адсорбированных на поверхности металлов. Наиболее популярной и универсальной моделью такой системы является двумерное обобщение модели Френкеля – Конторовой [75, 76]. В рамках этой модели считается, что атомы адсорбированы на грань кристалла-подложки, потенциальный рельеф которой представляет параллельные глубокие борозды (системы Хе–Cu (110), Li–W (112), K–W (112), Li–Mo (112), Ва–Mo (112)). Тогда смещение адатомов

происходит лишь вдоль борозд потенциального рельефа (вдоль оси Ox). Плотность энергии адпленки имеет вид [16–18, 77–79]:

$$w = \frac{1}{2} [\lambda_1 (\partial_x \Phi)^2 + \lambda_2 (\partial_y \Phi)^2] + A \left[1 - \cos \frac{2\pi N}{b} \Phi \right] + v \partial_x \Phi. \quad (2.3.1)$$

Поле $\Phi(x, y)$ определяет смещение адатомов из положений, занимаемых ими в подложке. Первая и вторая скобки в (2.3.1) выражают соответственно собственную упругую энергию адатомов и энергию их взаимодействия с подложкой (λ_1, λ_2 – упругие постоянные, A – глубина потенциального рельефа, b – период подложки). Параметр v характеризует степень отличия периода подложки от периода a решетки адатомов в отсутствии подложки: $a \approx bM/N$, $v \propto (a - bM/N)$, где M, N – целые числа. Когда периоды a, b близки, $M = N = 1$. Практически важно, что модель (2.3.1) универсальна – описывает не только двумерные кристаллы.

Существует весьма распространенный тип магнитных структур, которые можно рассматривать как длинноволновую модуляцию простых ферро- и антиферромагнитных магнитных структур. Период модуляции часто зависит от температуры или внешнего поля и принимает значения, не соизмеримые с периодами кристаллической решетки. Поэтому модулированные или длиннопериодические структуры также называют несоизмеримыми. Все эти определения выступают как синонимы. Обнаружены спиральные магнитные структуры, структуры типа продольной и поперечной спиновых волн, верные и др. Модулированная структура не является единственной магнитоупорядоченной фазой кристалла. Ей может предшествовать или за ней следовать соизмеримая ферро- или антиферромагнитная структура. Было обнаружено большое число длиннопериодических фаз и переходов между со- и несоизмеримыми фазами.

Для некоторых кристаллов специальной симметрии (кристаллы без центра инверсии) модуляция обусловлена неоднородными анизотропными силами релятивистского происхождения. Простейшая модель спиральной структуры с однокомпонентным параметром порядка имеет типичное выражение для плотности свободной энергии [19, 80, 81]:

$$w = \frac{\alpha}{2} (\nabla \Phi)^2 + \kappa (1 - \cos N \Phi) + \gamma \partial_x \Phi. \quad (2.3.2)$$

Для магнетиков с анизотропией типа «легкая плоскость» (плоскость yOz) угол Φ описывает вращение вектора ферро- или антиферро-

магнетизма в «легкой плоскости»: $\mathbf{M} = (0, \cos\Phi, \sin\Phi)$, обменное взаимодействие характеризуется постоянной α . Второй член в формуле (2.3.2) описывает модуляцию длинноволновой структуры внешним магнитным полем H ($N = 1, 2$; $\kappa \propto H^N$). В антиферромагнетиках магнитное поле, приложенное в плоскости вращения спинов (перпендикулярно оси магнитной спирали), приводит к наведенной магнитной анизотропии второго порядка (см. [80] и п. 2.1). Второй член может быть также связан с магнитной кристаллографической анизотропией в базисной плоскости $N = 2, 4, 6$. В этом случае параметр κ зависит от температуры. Третий член в (2.3.2) обусловлен инвариантами Лифшица

$$\gamma(M_y \partial_x M_z - M_z \partial_x M_y) \quad (2.3.3)$$

для магнетиков кристаллических классов C_n , D_n ($n = 2, 4, 6$) и T (соединения MnSi , FeGe) или индуцирован внешним полем для кристаллов других симметрий [81–85]. Например, свободная энергия антиферромагнетиков CoTiO_3 и FeTiO_3 содержит слагаемое (2.3.3) с $\gamma \sim E$, где E – компонента внешнего электрического поля вдоль тригональной оси (ось Ox). Инварианты Лифшица могут быть также индуцированы магнитным полем и деформацией (например, в соединении ZnCr_2Se_4).

Заметим, что для холестерических жидких кристаллов в одноконстантном приближении выражение (2.3.2) совпадает с таковым для энергии искажения спиральной структуры электрическим или магнитным полем, приложенным перпендикулярно оси спирали ($N = 2$) [86, 87].

Для двумерных распределений параметра порядка после масштабных преобразований выражения для плотности энергии (2.3.1) и (2.3.2) совпадают и принимают форму, удобную для дальнейшего анализа:

$$w = \frac{1}{2} [(\partial_x u)^2 + (\partial_y u)^2] + (1 - \cos u) + q \partial_x u. \quad (2.3.4)$$

Наличие слагаемого $q \partial_x u$ в плотности энергии не влияет на форму записи уравнения для расчета поля $u(x, y)$, но существенно изменяет энергию основного состояния системы.

Распределение параметра порядка определяется эллиптическим уравнением sine-Gordon:

$$(\partial_x^2 + \partial_y^2)u = \sin u. \quad (2.3.5)$$

В зависимости от величины параметра q основному состоянию системы (2.3.4) отвечает либо однородное распределение параметра порядка: $u = 0 \pmod{2\pi}$ (соизмеримая фаза), либо сверхструктурная решетка (несоизмеримая фаза):

$$u_0(x) = 4 \operatorname{Arctg} \frac{\operatorname{cn}(\chi + \chi_0, k)}{[1 + \operatorname{sn}(\chi + \chi_0, k)]} = -2 \operatorname{am}(\chi + \chi_0, k) + \pi, \chi = \frac{x}{k}, \chi_0 = \operatorname{const}. \quad (2.3.6)$$

На периоде $L_0 = 2Kk$ решетки функция $u_0(x)$ изменяется на 2π , здесь k – модуль эллиптических функций Якоби, $K = K(k)$ – полный эллиптический интеграл первого рода. Под $\operatorname{Arctg} z$ понимается полная квазипериодическая функция, а не ее главная часть, причем для определенности считаем $\operatorname{Arctg} \operatorname{sn} K [1 + \operatorname{sn} K]^{-1} = 0$. Чтобы нагляднее проиллюстрировать распределение (2.3.6), воспользуемся его представлением в виде ряда

$$\partial_\chi u_0 \equiv -2 \operatorname{dn}(\chi + \chi_0) = -\frac{\pi}{K'} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \operatorname{sech} \left[\frac{\pi}{2K'} (\chi + \chi_0 - 2Kp) \right], \quad (2.3.7)$$

где p – целое, $K' = K(k')$, $k' = \sqrt{1 + k^2}$. Выражение (2.3.7) доказывает сравнением разложений на простые дроби [88] левой и правой частей равенства (2.3.7). В качестве условия нормировки удобно взять $\operatorname{dn}(\chi = 0) = 1$. Согласно (2.3.7), изменение поля сосредоточено вблизи точек с координатами $x = 2Kkp$. В окрестности каждой из них с характерным размером $l_0 \approx 2K'k/\pi$ функцию $u_0(x)$ можно аппроксимировать 2π -кинком, поскольку

$$\frac{\pi}{K'} \int d\chi' \operatorname{sech} \frac{\pi\chi'}{2K'} = 4 \operatorname{arctg} \exp \left(-\frac{\pi}{2K'k} x \right) + \operatorname{const}. \quad (2.3.8)$$

Таким образом, решение (2.3.6) представляет одномерную решетку 2π -солитонов типа (2.3.8), разделенных протяженными областями длиной L_0 (обычно $L_0 \gg l_0$), в пределах которых функция $u_0(x)$ изменяется слабее ($u_0(x) \approx 2\pi s$, где s – целое (см. рис. 4.2)).

Средняя энергия, приходящаяся на период сверхструктуры солитонных линий:

$$\bar{W} = \frac{1}{L_0} \int_0^{L_0} dx w(x) = -\frac{\pi q}{Kk} - 2 \left(\frac{k'}{k} \right)^2 + \frac{4E}{Kk^2}. \quad (2.3.9)$$

Здесь $E = E(k)$ – полный эллиптический интеграл второго рода. Минимизируем \bar{W} по переменной k . Отсюда получим условие, определяющее k (или L_0):

$$\pi q k - 4E = 0. \quad (2.3.10)$$

При $q < 4/\pi$ уравнение (2.3.10) не имеет решений. Основным состоянием системы (2.3.4) является соизмеримая фаза: $u = 0 \pmod{2\pi}$. При $q > 4/\pi$ выражение (2.3.10) разрешимо. Энергия, соответствующая сверхструктуре (2.3.6), ниже, чем таковая однородного распределения параметра порядка.

В двумерных кристаллах типа адсорбат-подложка параметр $q \propto (a - b M / N) \sqrt{\lambda_1 / A}$. Солитонные линии описывают области повышенной плотности адатомов. Солитонная решетка (2.3.6), период которой существенно отличается от периодов a и b , является результатом конкуренции двух взаимодействий в гамильтониане (2.3.1): а) потенциала кристалла-матрицы, благоприятствующего соизмеримой фазе; б) упругих взаимодействий адатомов, стремящихся привести систему в состояние, слегка отличающееся от соизмеримого.

В «легкоплоскостных» магнетиках без центра инверсии наличие в гамильтониане (2.3.2) инвариантов Лифшица (2.3.3) приводит к идеальному спиральному упорядочению магнитных моментов атомов. Вектор намагниченности лежит в плоскости yOz и при смещении вдоль оси Ox поворачивается так, что образуется спиральная структура с неизменным шагом. При наличии внешнего магнитного поля или магнитной анизотропии в плоскости yOz появляются взаимодействия, стремящиеся выстроить магнитные моменты атомов вдоль выделенных направлений в этой плоскости. Отметим, что в исходных (безразмерных) переменных анизотропия N -го порядка выделяет N эквивалентных направлений в плоскости yOz , к которым стремятся подстроиться атомные магнитные моменты. В результате конкуренции противоположных тенденций идеальная спираль трансформируется в модулированную спиральную структуру. Вдоль оси Ox формируются протяженные области, в пределах которых распределение намагниченности почти однородно. Соседние области разделены узким переходным слоем, где сохраняется спиральный разворот намагниченности. Такое «раскручивание» спирали описывается решеткой солитонов (2.3.6). Фазовый переход из несоизмеримой фазы в соизмеримую соответствует неограниченному росту периода солитонной решетки при изменении температуры или поля. При $q < 4/\pi$, что отвечает большим магнитным полям или

сильной анизотропии в базисной плоскости $q\alpha\gamma(\alpha k)^{-1/2}$, реализуется однородное распределение намагниченности $\Phi = 0(\text{mod } 2\pi)$.

Модель (2.3.5) дает также упрощенное описание двумерных деформаций плоскопараллельной доменной структуры (2.3.6) в магнетиках [89]. Для этих распределений намагниченности параметр порядка $u(x, y)$ определяется минимумом функционала, который в безразмерных переменных совпадает с (2.3.4) (при $q = 0$) и включает энергию обменного взаимодействия и энергию магнитной анизотропии. Поле $u(x, y)$ связано с полярным углом, описывающим ориентацию намагниченности (см. п. 2.1). Полосовые доменные структуры часто наблюдаются в тонких пленках и пластинках.

Представляют интерес изучение и классификация дефектов типа вихрей в рамках простейшей модели (2.3.4) несоизмеримой структуры. Для экспериментальной проверки результатов необходимо найти явное выражение для параметра порядка $u(x, y)$. Аналитическое описание вихрей сопряжено с серьезными трудностями, которые обусловлены:

- существенной нелинейностью уравнения (2.3.5);
- сингулярным характером требуемых решений;
- наличием нетривиального фона типа кноидальной волны;
- неразработанностью методов решения нелинейных краевых задач даже в случае уравнений, обладающих парой Лакса.

Двумерные дефекты несоизмеримой структуры представляют существенно новый класс нелинейных объектов, теоретическое описание которых ранее не проводилось. Для изучения солитонных дефектов в со- и несоизмеримых фазах мы использовали [46–49] преобразование Бэклунда [40]:

$$(\partial_x + i\partial_y)\left(\frac{u - i\beta}{2}\right) = v \sin \frac{u + i\beta}{2}, \quad (2.3.11)$$

$$(\partial_x - i\partial_y)\left(\frac{u + i\beta}{2}\right) = \frac{1}{v} \sin \frac{u - i\beta}{2}, \quad (2.3.12)$$

устанавливающее связь между решениями $u(x, y)$ уравнения (2.3.5) и решениями $\beta(x, y)$ вспомогательного уравнения:

$$(\partial_x^2 + \partial_y^2)\beta = \text{sh } \beta. \quad (2.3.13)$$

Здесь v – комплексный параметр. Преобразование (2.3.11), (2.3.12) совпадает с предложенным в [40] только при $v = \text{e}^{\text{ch} \psi}$, где ψ – вещественный параметр. В следующем разделе показано, что аналити-

ческое продолжение преобразования (2.3.11), (2.3.12) по параметру v позволяет исследовать более широкий, чем в [40], класс вещественных решений уравнения (2.3.5). Хотя применяемая процедура уступает в общности алгеброгеометрическим методам конечнозонного интегрирования, она имеет одно преимущество, важное для приложений: простейшие решения выражаются через хорошо известные эллиптические функции и интегралы.

Рассмотрим вначале решения, построенные процедурой, когда по любому частному решению β с помощью (2.3.11), (2.3.12) находится решение u . В простом случае, когда β не зависит от y , уравнение (2.3.13) имеет первый интеграл $(\partial_x \beta)^2/2 = \text{ch}\beta + s$ и элементарно интегрируется. В зависимости от выбора постоянной s существуют три типа решений $\beta = \beta(x)$. По заданным $\beta = \beta(x)$ интегрированием системы (2.3.11), (2.3.12) находим три типа решения $u = u(x, y)$.

2.3.1. Двумерная решетка вихрей в соизмеримой фазе

При $s > 1$ мы получили решение, которое описывает двумерную решетку вихрей в соизмеримой фазе (на фоне $u = 0 \pmod{2\pi}$), когда $q < 4/\pi$:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{u}{4} = k' \left\{ \operatorname{cn} \left(\frac{x}{k'}, k \right) \operatorname{tg} \left[\frac{\kappa}{2} (y + f(x)) \right] - \sin \psi \right\} \left\{ \operatorname{dn} \left(\frac{x}{k'}, k \right) - \right. \\ \left. - k' \cos \psi \operatorname{sn} \left(\frac{x}{k'}, k \right) \right\}^{-1}, \quad \kappa^2 = \cos^2 \psi + \frac{k^2}{(k')^2}, \\ f(x) = -\frac{1}{\kappa} \operatorname{arctg} \frac{\kappa}{\sin \psi} \operatorname{cn} \left(\frac{x}{k'}, k \right) + \frac{k' \sin 2\psi}{2\kappa^2} \left[\prod \left(\frac{x}{k'}, (k')^2 \kappa^2 \right) - \frac{x}{k'} \right]. \end{aligned} \quad (2.3.14)$$

Здесь $\prod(x, \alpha^2) = \int_0^x (1 - \alpha^2 \operatorname{sn}^2 x')^{-1} dx'$ – эллиптический интеграл третьего рода с параметром α^2 , $k = [(s-1)/(s+1)]^{1/2}$, $\psi = \psi^* = -i \operatorname{ln} v$. Координаты вихрей с $Q = 4$ (m – четное) и $Q = -4$ (m – нечетное) суть

$$x = k'K(k) + 2K(k)k'm, \quad y = \frac{\pi}{\kappa} \left[2n - m(1 - \Lambda(\psi, k)) + \frac{1}{2}(1 + \Lambda(\psi, k)) \right],$$

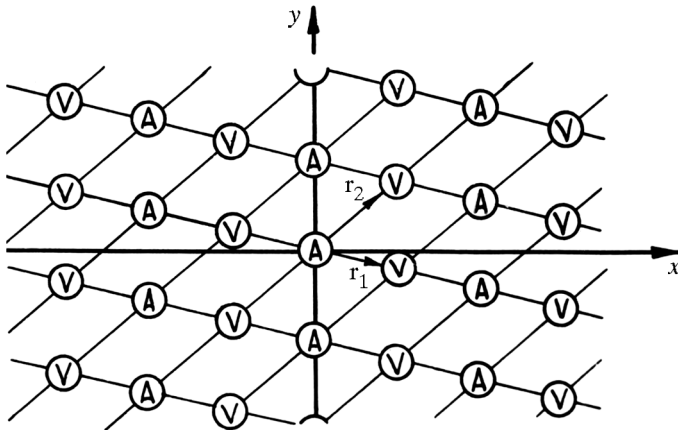


Рис. 2.11. Решетка солитонных вихрей (2.3.14) в соизмеримой фазе.
 V и A – вихри с зарядами $Q = 4$ и $Q = -4$ соответственно

где m – целое число, $\Lambda(\psi, k) = \frac{2}{\pi} [E(k)F(\psi, k') + K(k)E(\psi, k') - K(k)F(\psi, k')]$ – лямбда-функция Неймана [61]. Векторы трансляций вихревой решетки $\mathbf{r}_{1,2} = \left(2K(k)k', \mp \frac{\pi}{k} (1 \mp \Lambda(\psi, k)) \right)$ (рис. 2.11) в общем случае не ортогональны и имеют разную длину. При изменении параметра ψ меняются длины векторов $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ и угол между ними. В частности, если $\psi = 0$, то $|\mathbf{r}_1| = |\mathbf{r}_2|$, при $\psi = \pi/2$ различие длин векторов \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 максимально: $r_1^2 - r_2^2 = 4\pi(k')^2 / k^2$.

В вырожденном случае $k \rightarrow 0$ решение (2.3.14) принимает вид

$$\operatorname{tg} \frac{u}{4} = \left[\operatorname{tg} \frac{x}{2} \left(\sin \psi \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} - \cos \psi \right) - 1 \right] \left[\sin \psi - \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} - \cos \psi \right) \right]^{-1},$$

$$\gamma = y \cos \psi - x \sin \psi$$

и описывает прямоугольную решетку вихрей с векторами $\mathbf{r}_{1,2} = \pi(1, \mp \operatorname{ctg}(\pi/4 \pm \psi/2))$. В пределе $\psi \rightarrow \pi/2$ мы имеем $|\mathbf{r}_2| \rightarrow \infty$ и решетка распадается на цепочки чередующихся вихрей с $Q = \pm 4$ вида $\operatorname{tg} u/4 = (y + \cos x)/(\cos x - y)$, разделенных большим расстоянием.

янием $2\pi/\cos \psi \rightarrow \infty$. При $\psi = 0$ получаем квадратную решетку вихрей

$$\operatorname{tg} \frac{u}{4} = -\operatorname{tg} \frac{x}{2} \left(\operatorname{tg} \frac{y}{2} \right)^{-1}, \quad (2.3.15)$$

расстояние между ближайшими вихрями с $Q = 4$ и $Q = -4$ равно $\pi\sqrt{2}$.

2.3.2. Дорожка из одинаковых вихрей в несоизмеримой фазе

В случае $s < -1$ наша процедура дает решение

$$\operatorname{tg} \frac{u}{4} = (k')^{-1} \left[\operatorname{sn} \left(\frac{x}{k}, k \right) - \cos \psi \right]^{-1} \left[\mu \operatorname{cn} \left(\frac{x}{k}, k \right) \operatorname{th} \frac{\mu}{2k} (y + f(x)) + \sin \psi \operatorname{dn} \left(\frac{x}{k}, k \right) \right], \quad \mu^2 = 1 - k^2 \cos^2 \psi, \quad k = [2/(1-s)]^{1/2},$$

$$f(x) = \frac{k}{2\mu} \ln \frac{\mu \operatorname{cn} \frac{x}{k} - \sin \psi \operatorname{dn} \frac{x}{k}}{\mu \operatorname{cn} \frac{x}{k} + \sin \psi \operatorname{dn} \frac{x}{k}} - k \operatorname{tg} \psi \operatorname{Pr} \left(\frac{x}{k}, \frac{1}{\cos^2 \psi} \right), \quad (2.3.16)$$

которое описывает цепочку вихрей с $Q = 4$ в несоизмеримой фазе.

Цепочка образует угол $-\arctg k Z \left(\frac{\pi}{2} - \psi, k \right) \mu^{-1}$ с осью Ox . Здесь $Z(\psi, k)$ – зета-функция Якоби [61]: $K(k)Z(\psi, k) = K(k)E(\psi, k) - F(\psi, k)E(k)$. Расстояние между соседними вихрями в цепочке $d = 4K(k)\mu^{-1} \left[\mu^2 + Z^2 \left(\frac{\pi}{2} - \psi, k \right) k^2 \right]^{1/2}$. Вихревая цепочка образуется при стыковке солитонной структуры $u_0(x + \Delta_1)$ (2.3.6) с антисолитонной $-u_0(x + \Delta_2)$ ($\Delta_a = \text{const}$, $a = 1, 2$) и, следовательно, изменяет основное состояние системы. Действительно, асимптотика решения (2.3.16) при $y + f(x) \rightarrow \pm \infty$ имеет вид

$$\operatorname{tg} \frac{u}{4} \rightarrow \pm \operatorname{cn} \left(\frac{x}{k} + 2K \pm \Delta \right) \left[1 + \operatorname{sn} \left(\frac{x}{k} + 2K \pm \Delta \right) \right]^{-1}. \quad (2.3.17)$$

Здесь $\Delta = F(\arcsin(\mu^{-1}\sin\psi), k)$ – сдвиг фазы. Отклонение $u(x, y)$ от асимптотических значений (2.3.17) сосредоточено в полосе шириной $\sim k \left[\mu^2 + k^2 Z^2 \left(\frac{\pi}{2} - \psi, k \right) \right]^{-1/2}$, где расположены вихри.

Наиболее простой вид решение (2.3.16) имеет при $\psi = \pi/2$ и $\psi = 0$. При $\psi = 0$ сдвиг фазы Δ обращается в нуль:

$$\operatorname{tg} \frac{u}{4} = \operatorname{cn} \frac{x}{k} \left[\operatorname{sn} \frac{x}{k} - 1 \right]^{-1} \operatorname{th} \frac{k'y}{2k}. \quad (2.3.18)$$

Наглядную интерпретацию рассматриваемым вихревым конфигурациям можно дать в модели (2.3.1) несоизмеримого двумерного кристалла. Решение (2.3.18) описывает периодический ряд из дислокаций с одинаковым вектором Бюргерса $Q = 4$. Дислокации располагаются вдоль оси Ox в точках с координатами $x = kK + 4Kn$, $y = 0$ (n – целое) и разделяют солитонную (в области $y > 0$) и антисолитонную (при $y < 0$) структуры. В пределах одного периода цепочки (2.3.18) смещение атомов вдоль оси Ox изображено на рис. 2.12.

В магнетиках каждый солитонный вихрь цепочки (2.3.18) образован в результате X-образного пересечения двух доменных границ. Последние после пересечения изменяют свою полярность и на большом расстоянии от точки пересечения формируют полосовую доменную структуру (рис. 2.13).

В «легкоплоскостных» ферро- и антиферромагнетиках со слабой анизотропией второго порядка в базисной плоскости ($\gamma = 0$, $N = 2$ в (2.3.2)) распределение параметра порядка $\mathbf{M} = (\cos\Phi, \sin\Phi, 0)$ ($\Phi = u/2$) вблизи одного из вихрей цепочки (2.3.18) представлено на рис. 2.14.

2.3.3. Взаимодействие спиновой волны с решеткой магнитных вихрей

В случае $|s| < 1$ изложенная процедура дает решения, возможная интерпретация которых может быть получена в рамках волнового уравнения

$$(\partial_t^2 - \partial_x^2 - \partial_y^2) \Phi + \sin \Phi = 0. \quad (2.3.19)$$

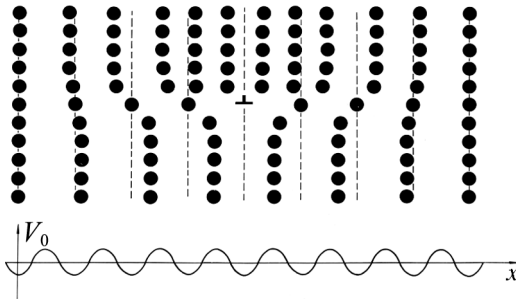


Рис. 2.12. Распределение адатомов на подложке для отдельной дислокации в периодической цепочке (2.3.18). \perp – дислокация с топологическим зарядом $Q = 4$. Штриховые линии соответствуют минимумам потенциала V_0 подложки

Рис. 2.13. Дорожка солитонных вихрей (2.3.18) как результат пересечения доменных границ плоскопараллельной доменной структуры.

Доменной границе отвечает 2π -кинк поля $u(x, y)$, большому значению u соответствует более темная часть доменной границы

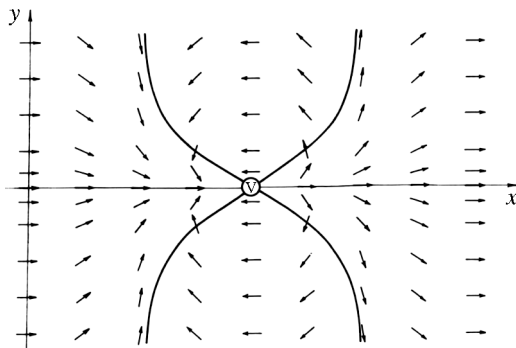
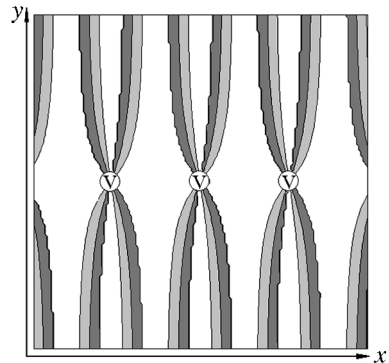


Рис. 2.14. Распределение параметра порядка $\mathbf{M} = (\cos\Phi, \sin\Phi, 0)$ ($\Phi = u/2$) вблизи одного из вихрей цепочки (2.3.18) в «легкоплоскостном» магнетике со слабой анизотропией второго порядка в базисной плоскости. Сплошные линии соответствуют центрам доменных границ

В частности, оно описывает двумерную динамику вектора ферроили антиферромагнетизма в магнетиках с анизотропией типа «легкая плоскость» (см. п. 2.1).

Рассмотрим специальный класс решений уравнения (2.3.19), соответствующий преобразованию Лоренца:

$$u(x, y) = \Phi \left[(x' - Vt)(1 - V^2)^{-1/2}, y \right], \quad x = (x' - Vt)(1 - V^2)^{-1/2}. \quad (2.3.20)$$

Тогда $u(x, y)$ удовлетворяет уравнение (2.3.5). Среди квазидномерных решений (2.3.19) имеются нелинейные спиновые волны, отвечающие следующему решению уравнения (2.3.5):

$$u_0(x) = 4 \operatorname{arctg} \operatorname{dn}(x, k) [1 + k \operatorname{sn}(x, k)]^{-1}. \quad (2.3.21)$$

В пределе малой амплитуды ($k \rightarrow 1$) они совпадают со спиновыми волнами линейной теории $\Phi \approx 2k \sin(px' - \omega t)$ ($\omega^2 = p^2 + 1$, $p = \operatorname{const}$).

Преобразование Бэклунда (при $|s| < 1$) дает следующее решение:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{u}{4} = & \left\{ -\kappa \operatorname{cn}(x, k) \operatorname{tg} \frac{\kappa}{2} (y + f(x)) + \sin \psi \operatorname{dn}(x, k) \right\} (k')^{-1} \{ 1 - \\ & - \cos \psi \operatorname{sn}(x, k) \}^{-1}, \quad \kappa^2 = \cos^2 \psi - k^2, \quad k = [(1 - s)/2]^{1/2}, \quad f_0 = \operatorname{const}, \\ f(x) = & -\frac{1}{2i\kappa} \ln \frac{\sin \psi \operatorname{dn} x + i\kappa \operatorname{cn} x}{\sin \psi \operatorname{dn} x - i\kappa \operatorname{cn} x} + \operatorname{tg} \psi \left[\prod (x, \cos^2 \psi) - x \right] + f_0. \end{aligned} \quad (2.3.22)$$

Если $\kappa^2 > 0$, $f_0 = f_0^*$, (2.3.22) описывает на фоне (2.3.21) вихревую решетку с векторами трансляций $\mathbf{r}_{1,2} = 2[K(k), \varepsilon_{1,2} - \pi\Lambda/2\kappa - \operatorname{tg}\psi K(k)]$,

где $\Lambda = \Lambda \left(\operatorname{arcsin} \frac{\kappa}{k' \cos \psi}, k \right)$, $\varepsilon_1 = 0$, $\varepsilon_2 = \frac{\pi}{\kappa}$. Условие существования

решетки вихрей $\kappa^2 = \cos^2 \psi - k^2 > 0$ нарушается при определенной амплитуде волны, зависящей от значения k . Когда κ^2 уменьшается, $|\mathbf{r}_2|$ увеличивается и в пределе $\cos \psi \rightarrow k + 0$ мы получаем «эллиптически-рациональное» решение:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{u}{4} = & \left[2\operatorname{cn} x + \operatorname{dn} x k' (y + f(x)) \right] [1 - k \operatorname{sn} x]^{-1} (y + f(x))^{-1} (k')^{-1}, \\ f(x) = & k^{-1} (k')^{-1} (E(x) - k^2 \operatorname{sd} x \operatorname{cn} x) - k' k^{-1} x - (k')^{-1} \operatorname{cd} x + f_0, \end{aligned}$$

которое описывает одну вихревую цепочку на фоне $u_0(x + 2K)$ (2.3.21). Когда $\cos\psi = 1$, имеем наиболее простую вихревую решетку:

$$\operatorname{tg} \frac{u}{2} = -\operatorname{cn} x \operatorname{tg} \frac{k'y}{2} [1 - \operatorname{sn} x]^{-1}, \quad (2.3.23)$$

которая в отсутствие волны (в пределе $k \rightarrow 0$) совпадает с (2.3.15) и лишь при большой амплитуде волны ($k \sim 1$) распадается на изолированные вихри.

При $\kappa^2 < 0$ вне области, не ограниченной в направлении $\mathbf{n} = (\cos\eta, \sin\eta)$, $\eta = -\arctg(\operatorname{ik}^{-1}Z)$, $Z = Z(\arcsin k^{-1}\cos\psi, k)$ и имеющей характерный размер $\sim [|\kappa|^2 + Z^2]^{-1/2}$ в ортогональном направлении, решение (2.3.22) приближается к асимптотическим значениям

$$u(x, y) \rightarrow u_0 [x \pm (K - u_1)]. \quad (2.3.24)$$

при $-\operatorname{ik}(y + f(x)) \rightarrow \pm \infty$, где $u_1 = F(\arcsin k^{-1}\cos\psi, k)$. Для вещественных значений f_0 (2.3.22) не содержит вихрей. Когда $f_0 = -f_0^* = \pi/\kappa$, на фоне (2.3.24) имеем цепочку чередующихся вихрей и антивихрей с $Q = \pm 4$.

Анализ показывает, что особенности взаимодействия магнитных вихрей со спиновой волной аналогичны найденным при изучении взаимодействия солитонов с нелинейными волнами намагниченности [5]. Спиновая волна искажает структуру вихрей, изменяет характер их взаимодействия и при определенных условиях может разрушать двумерные вихревые решетки.

Отметим, что при $\psi = -i \ln v = 0$ все решения, построенные с помощью преобразования Бэклунда (2.3.11), (2.3.12) по схеме $\beta(x) \rightarrow u(x, y)$, принимают особенно простой вид: $u = 4\arctg[f(y)g(x)]$, где $f(y)$ и $g(x)$ – некоторые функции. Подставляя эту форму $u(x, y)$ в (2.3.11), (2.3.12) при $v = 1$ и используя уравнение (2.3.13) для $\beta(x)$, мы получаем

$$(\partial_x g)^2 = \frac{c_1}{4} g^4 + \frac{3-s}{4} g^2 + \frac{(s+1)^2}{(4c_1)^2}, \quad \partial_y f = \frac{c_1}{2} + \frac{s+1}{4c_1} f^2, \quad s, c_1 = \text{const.}$$

Следовательно, решения, соответствующие $\psi = 0$, представляют собой частный случай решений, полученных подстановкой Лэмба (см. п. 2.2.2).

2.3.4. Цепочка из чередующихся вихрей в несоизмеримой структуре

Преобразование Бэклунда позволяет исследовать и другой класс вихревых конфигураций. Пусть u_0 – некоторое частное решение уравнения (2.3.5). Для этого u_0 из системы (2.3.11), (2.3.12) найдем решения β_1 и β_2 , соответствующие $v = v_1$ и $v = v_2$. Эти данные порождают новые решения уравнения (2.3.5) в следующем виде [40]:

$$u = 4 \arctg \left[\frac{i(v_1 + v_2)}{(v_1 - v_2)} \operatorname{tg} \frac{\beta_2 - \beta_1}{4} \right] - u_0. \quad (2.3.25)$$

Отметим, что в работе [40] использовались вещественные решения β и, следовательно, $v_k = \exp i \chi_k$ ($k = 1, 2$). В данном пункте для получения новых типов решений мы рассматриваем β в комплексной области. Вещественность решений $u(x, y)$ гарантирует редукция

$$v_2 = (v_1^{-1})^*, \quad \beta_2 = \beta_1^*. \quad (2.3.26)$$

Решения, описывающие вихри в несоизмеримой фазе (2.3.6) и на фоне нелинейной волны (2.3.21), получаются, если выбрать (2.3.6), (2.3.21) в качестве частного решения u_0 . Тогда система (2.3.11), (2.3.12) элементарно интегрируется и определяет точное решение (2.3.25), где

$$\begin{aligned} \operatorname{th} \frac{\beta}{4} &= \left(b \cos \frac{u_0}{2} - \gamma \operatorname{cth} \frac{\sigma}{2} \right) \left(\frac{\partial_x u_0}{2} + a \sin \frac{u_0}{2} \right)^{-1}, \\ \sigma &= \gamma y - \frac{1}{2} \ln \left(\gamma - b \cos \frac{u_0}{2} \right) \left(\gamma + b \cos \frac{u_0}{2} \right)^{-1} + \Phi(x), \\ a &= \frac{1}{2}(v + v^{-1}), \quad b = \frac{1}{2i}(v - v^{-1}). \end{aligned} \quad (2.3.27)$$

Явные выражения для $\Phi(x)$ и γ зависят от выбора u_0

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{u_0}{4} &= \operatorname{cn} \frac{x}{k} \left[1 + \operatorname{sn} \frac{x}{k} \right]^{-1}, \quad \Phi(x) = \frac{a\gamma}{b} \left[x - \frac{(k')^2}{k\gamma^2} \operatorname{Pr} \left(\frac{x}{k}, \frac{b^2}{\gamma^2} \right) \right], \\ \gamma &= k^{-1} \left[1 - k^2 a^2 \right]^{1/2}; \end{aligned} \quad (2.3.28)$$

$$\operatorname{tg} \frac{u_0}{4} = \operatorname{dn} x (1 + k \operatorname{sn} x)^{-1}, \quad \Phi(x) = \frac{a\gamma}{b} \left[x + \frac{(k')^2}{\gamma^2} \operatorname{П}\left(x, \frac{b^2 k^2}{\gamma^2}\right) \right],$$

$$\gamma = (k^2 - a^2)^{1/2}. \quad (2.3.29)$$

Обратимся вначале к решению (2.3.25) – (2.3.28), описывающему деформацию несоизмеримой фазы. Чтобы качественно представить характер решения, рассмотрим его в области $q \rightarrow +4/\pi$ ($k \rightarrow 1$), критичной для существования солитонной структуры (2.3.6) (при $k \rightarrow 1$ период L_0 солитонной структуры стремится к бесконечности). В этой области имеем

$$\operatorname{tg} \frac{u}{4} = \left[(\operatorname{chp} \operatorname{sh} z + \cos \varepsilon \operatorname{ch} z) \exp(-x) - \sin \varepsilon \sin \theta \operatorname{cth} \rho + \operatorname{chp} \cos \theta \right] \times$$

$$\times \left[\operatorname{chp} \operatorname{sh} z - \cos \varepsilon \operatorname{ch} z - \exp(-x) (\cos \theta \operatorname{chp} + \operatorname{cth} \rho \sin \varepsilon \sin \theta) \right]^{-1}, \quad (2.3.30)$$

где ρ, ε – произвольные вещественные параметры, $\theta = \operatorname{shp}(x \sin \varepsilon - y \cos \varepsilon) + \theta_0$, $z = \operatorname{chp}(x \cos \varepsilon + y \sin \varepsilon) + z_0$, z_0, θ_0 – вещественные константы.

Анализ показывает, что выражение (2.3.30) описывает ряд из чередующихся вихрей с зарядами ± 4 , пересекающий одиночный солитон

$$u_0 = 4 \operatorname{arctg} \exp(-x) \quad (2.3.31)$$

под углом ε . После пересечения при $z \rightarrow \pm \infty$ ($\varepsilon \neq 0$) солитон восстанавливает форму, но координата его центра сдвигается:

$u \rightarrow 4 \operatorname{arctg} \exp(-x \pm \Delta)$, $\Delta = \ln \frac{(\operatorname{chp} + \cos \varepsilon)}{(\operatorname{chp} - \cos \varepsilon)}$. При $|\theta| \gg 1$ координаты вихрей и антивихрей $z_n \approx 0$, $\theta_n = \pm(\pi n + \operatorname{arctg}|\operatorname{shp}/\sin \varepsilon|)$, n – целое ($n \gg 1$). Для конечных θ имеем $0 < |z_n| < \operatorname{Arch}|\operatorname{cth} \rho|$.

Когда $\varepsilon = \pi/2$, сдвиг $\Delta = 0$. Для этого случая линии, соответствующие значениям $u = \pi s/4 \pmod{2\pi}$, $s = 1, 2, \dots, 8$, представлены на рис. 2.15. Как и в случае $q = 0$ (см. п. 2.2), каждый вихрь является пересечением двух 2π -солитонов. Линиям центров 2π -солитонов $u = \pi \pmod{2\pi}$ отвечают линии 4 на рис. 2.15. В точке пересечения линии 4 ортогональны. После пересечения 2π -солитоны изменяют свою полярность. В пределе $\varepsilon = \pi/2$, $\rho \rightarrow 0$ получаем два вихря с

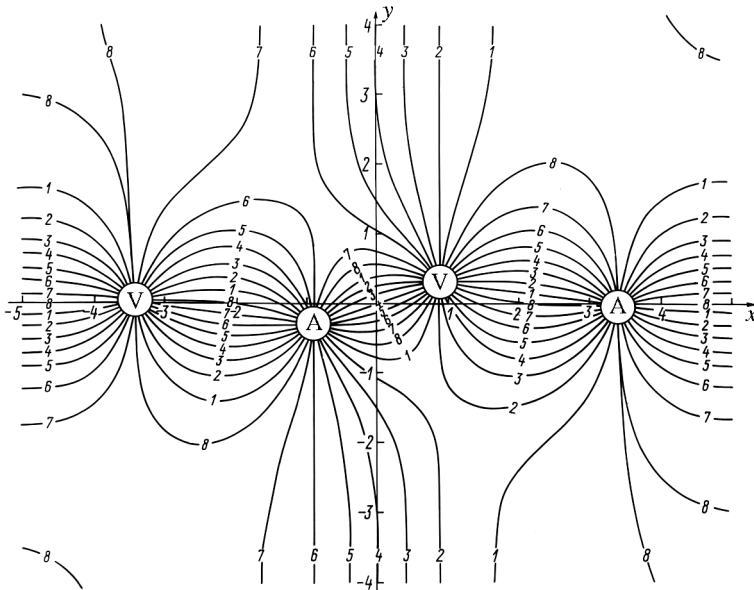


Рис. 2.15. Цепочка солитонных вихрей перпендикулярная отдельному 2π -кинку несоизмеримой структуры.

Кривые $u = \pi s/4 \pmod{2\pi}$, $s = 1, 2, \dots, 8$; $\rho = 1$; $z_0 = \theta_0 = 0$, V и A – вихри с $Q = 4$ и $Q = -4$ соответственно

противоположными зарядами на фоне одиночного солитона (2.3.31):

$$u = 4\text{arctg} \left[\frac{1 - x + \text{sh}y \exp(-x)}{\text{sh}y - (1 + x) \exp(-x)} \right]^{-1}. \quad (2.3.32)$$

В этом случае центры 2π -солитонов (линии $u = \pi \pmod{2\pi}$) логарифмически расходятся при $|x| \rightarrow \infty$ ($y \approx \pm \ln 2|x|$). В окрестности точек $(x_0, \pm \ln 2|x_0|)$ ($|x_0| \gg 1$) решение (2.3.32) имеет вид $u = \pm 4\text{arctg} \exp(\mp \zeta)$, где ζ – координата в направлении, ортогональном линии 4 (рис. 2.16). Можно показать, что энергия конфигурации (2.3.32) положительна и пропорциональна длине 2π -солитонов в области $|x| \gg 1$.

Для ферро- и антиферромагнетиков с анизотропией типа «легкая плоскость» и выражением (2.3.2) с $\gamma = 0$ для свободной энергии решения (2.3.30), (2.3.32) описывают цепочку или пару вихрей, получающихся пересечением доменных границ. При наличии анизотропии второго порядка в базисной плоскости ($\gamma = 0$, $N = 2$ в (2.3.2))

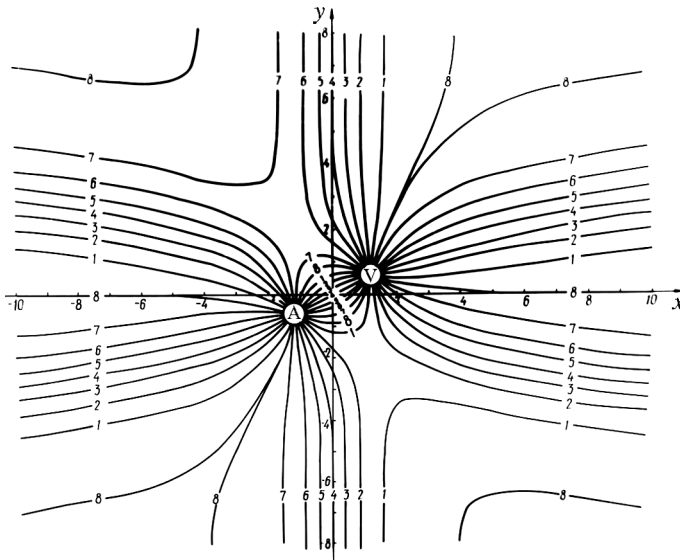


Рис. 2.16. Пара вихрь – антивихрь (2.3.32) как пересечение 2π -солитонов

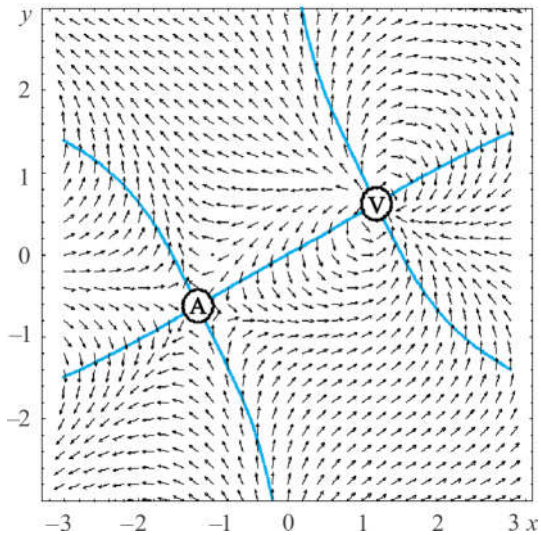
распределение параметра порядка $\mathbf{M} = (\cos u/2, \sin u/2, 0)$ вблизи центров вихрей для конфигурации (2.3.32) представлено на рис. 2.17.

Энергетически более выгодны состояния с $\varepsilon = 0$. При $\varepsilon = 0$ мы имеем периодическую цепочку вихрей с зарядами ± 4 , расположенных в точках $x_n = -z_0/\text{ch}\rho$, $y_n = [\theta_0 + 2\pi n \pm \arccos(-1/\text{ch}\rho)]/\text{sh}\rho$ пересечения кольцевых 2π -солитонов с солитоном (2.3.31) (рис. 2.18). При любых значениях ρ расстояние между вихрями с $Q = \pm 4$ на одном кольцевом солитоне больше такового между вихрями противоположных знаков соседних кольцевых солитонов. Это обстоятельство позволяет рассмотреть предел $\rho \rightarrow 0$, когда кольцевые солитоны неограниченно вытягиваются вдоль оси Oy . В пределе $\theta_0 = \arccos(-1/\text{ch}\rho)$, $\rho \rightarrow 0$, получаем

$$u = 4 \arctg \left[x - \text{ch}x \exp(-x) + y^2 \right] \left[\text{ch}x + x \exp(-x) - y^2 \exp(-x) \right]^{-1}. \quad (2.3.33)$$

Решение (2.3.33) описывает вихри с противоположными зарядами в точках пересечения ($x = 0, y = \pm 1$) солитона (2.3.31) с двумя U-образными 2π -солитонами, центры которых логарифмически расходятся ($x \approx \pm 2 \ln|y|$ при $|y| \gg 1$).

Рис. 2.17. Распределение параметра порядка $\mathbf{M} = (\cos\Phi, \sin\Phi, 0)$ ($\Phi = u/2$) для вихревого диполя (2.3.32) в «легкоплоскостном» магнетике с анизотропией второго порядка в базисной плоскости. Сплошные линии соответствуют центрам доменных границ



Данное решение (рис. 2.19) примечательно тем, что отвечающая ему энергия не зависит от размера системы R . Действительно, энергия $E = \int_{-\infty}^{\infty} w(x) dx$

основного состояния равна нулю, так как положительный вклад, пропорциональный R , от первых двух слагаемых в (2.3.4) компенсируется отрицательным вкладом от третьего слагаемого, который пропорционален произведению $Rq = 4R/\pi$ на одномерный топологический заряд 2π -солитона: $u(x = \infty) - u(x = -\infty) = -2\pi$.

Поскольку для конфигурации (2.3.33) полярности U-образных солитонов совпадают с полярностью солитона (2.3.31), следует ожидать, что ее энергия не содержит членов, линейных по R . Непосредственные вычисления показывают, что энергия не содержит также членов, пропорциональных $\ln R$, и конечна

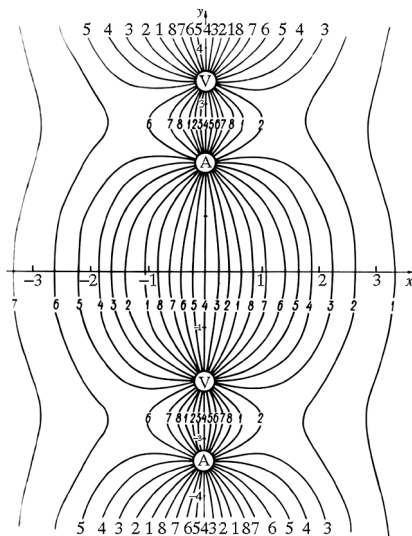


Рис. 2.18. Цепочка вихрей с зарядами $Q = \pm 4$ на центральной линии отдельного 2π -солитона несоизмеримой структуры. Кривые соответствуют $u = \pi s/4 \pmod{2\pi}$; $s = 1, 2, \dots, 8$; $\rho = 1$; $z_0 = \theta_0 = 0$.

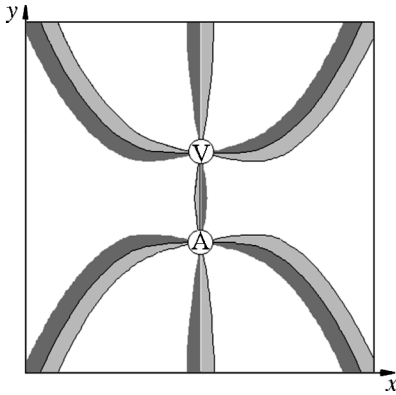


Рис. 2.19. Вихревой диполь (2.3.33) как результат пересечения доменных границ. Более темные части доменных границ соответствуют бóльшим значениям поля u

при $R \rightarrow \infty$: $W = 32\pi \ln 2/a + \text{const}$ (a – внутренний радиус обрезания (постоянная решетки)).

Отметим, что существование такого рода решений с конечной энергией не противоречит теореме Деррика (см. [90], главу 1), которая предполагает отсутствие радиуса обрезания a , непременно

присутствующего в макроскопических моделях физики конденсированных сред.

В рамках модели (2.3.1) двумерного кристалла схема расположения адатомов, соответствующая цепочке вихрей на центральной линии 2π -солитона (см. рис. 2.18), представлена на рис. 2.20.

Выражения (2.3.32), (2.3.33) показывают, что в несоизмеримой фазе, как и в соизмеримой, два вихря с топологическими зарядами $\pm Q$ не могут сблизиться на расстояние, меньшее ширины двух 2π -солитонов. Это приводит к существованию «энергетической щели», которая препятствует термофлуктуационному зарождению вихревой пары и, следовательно, должна играть важную роль при исследовании фазового перехода Костерлица – Таулеса в рассматриваемых двумерных системах.

В общем случае решение (2.3.25) – (2.3.28) описывает аперiodически расположенные вихри с $Q = \pm 4$ на фоне несоизмеримой структуры. Вдали от области, содержащей вихри, распределение параметра порядка u отличается от такого (2.3.6) лишь фазовым сдвигом. В некотором смысле эти конфигурации представляют собой повторение по оси Ox рассмотренных выше вихрей на фоне отдельного 2π -солитона. Например, при $a = ip$, $b^2 = 1 + p^2$ (p – вещественный параметр) получаем аперiodический аналог решения (2.3.32) (см. рис. 2.16). Вихри (антивихри) находятся в области $y > 0$ ($y < 0$), образуя изогнутую цепочку с неравномерной (по оси Ox) плотностью расположения вихрей. Как и на рис. 2.16, соседние вихрь и антивихрь сдвинуты по оси Ox . При $|y| \rightarrow \infty$ $u \rightarrow u_0(x)$ (см. формулу (2.3.6)).

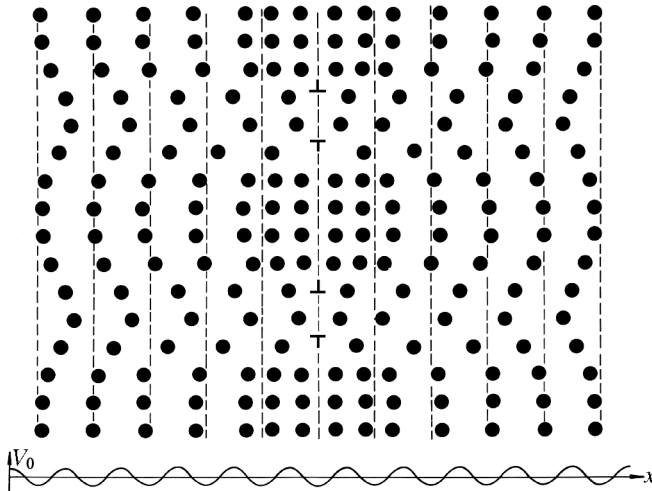


Рис. 2.20. Схема расположения атомов на подложке для цепочки дислокационных диполей (2.3.30) ($\epsilon = 0$)

В пределе $p \rightarrow 0$ решение принимает простой вид

$$u = 4 \operatorname{arctg} \left[E \left(\frac{x}{k} \right) + k \operatorname{cn} \frac{x}{k} \operatorname{sh} \frac{y}{k} - \frac{x}{k} \right] \left[k \operatorname{sh} \frac{y}{k} \operatorname{sn} \frac{x}{k} - \operatorname{dn} \frac{x}{k} \right]^{-1} - u_0(x). \quad (2.3.34)$$

Координаты вихрей (x_n, y_n) определяются уравнениями

$$\left[\frac{x_n}{k} - E \left(\frac{x_n}{k} \right) \right] \operatorname{sn} \frac{x_n}{k} = \operatorname{cn} \frac{x_n}{k} \operatorname{dn} \frac{x_n}{k}, \quad k \operatorname{sh} \frac{y_n}{k} \operatorname{sn} \frac{x_n}{k} = \operatorname{dn} \frac{x_n}{k},$$

из которых следует, что $|y_n| \rightarrow \infty$ при $|x_n| \rightarrow \infty$ (рис. 2.21).

Наиболее интересны решения, являющиеся аналогами конфигураций с конечной энергией. Такие решения соответствуют вещественному значению парамет-

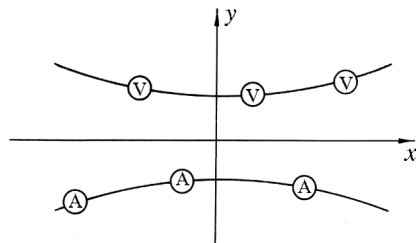


Рис. 2.21. Чередование вихрей на фоне несоизмеримой фазы для решения (2.3.34)

ра v . В зависимости от величины постоянной $a = (v + v^{-1})/2$ реализуется несколько типов вихревых конфигураций.

При $1 - a^2k^2 > 0$ получаем аperiodическое повторение конфигурации (2.3.33):

$$\begin{aligned}
 u &= 4 \operatorname{arctg} p^{-1} a w(x) \left\{ w(x) \sin \Phi(x) - p k \operatorname{sn} \frac{x}{k} \operatorname{ch} \frac{\mu y}{k} \right\} \left\{ \mu \cos \Phi(x) \operatorname{dn} \frac{x}{k} + \right. \\
 &\quad \left. + a k \operatorname{cn} \frac{x}{k} \left(w(x) \operatorname{ch} \frac{\mu y}{k} - p k \operatorname{sn} \frac{x}{k} \sin \Phi(x) \right) \right\}^{-1} - u_0(x), \\
 \mu^2 &= 1 - a^2 k^2, \quad w^2(x) = \mu^2 + p^2 k^2 \operatorname{sn}^2 \frac{x}{k}, \\
 \Phi(x) &= p^{-1} \mu a \left[\frac{x}{k} - \frac{(k')^2}{\mu^2} \operatorname{Pr} \left(\frac{x}{k}, -\frac{k^2 p^2}{\mu^2} \right) \right]. \quad (2.3.35)
 \end{aligned}$$

Здесь p – вещественный параметр, $p^2 + 1 = a^2$. Выражению (2.3.35) отвечают аperiodический ряд вихрей с зарядом $+4$ в области $y > 0$ и ряд из вихрей с $Q = -4$ при $y < 0$. Ряды из вихрей расположены на фоне структуры (2.3.6) симметрично относительно оси Ox : если (x_n, y_n) – координата вихря с зарядом $Q = 4$, то $(x_n, -y_n)$ будет координатой вихря с $Q = -4$.

В пределе $1 - a^2k^2 \rightarrow +0$ вихревые цепочки становятся периодическими $(x_n, y_n) = (2K(k)kn, \pm k)$. Решение принимает вид

$$\begin{aligned}
 u &= 4 \operatorname{arctg} \operatorname{sn} \frac{x}{k} \left[\left(\operatorname{dn} \frac{x}{k} \operatorname{cn} \frac{x}{k} + \operatorname{sn} \frac{x}{k} E \left(\frac{x}{k} \right) \right)^2 + (k')^2 \frac{y^2}{k^2} \operatorname{sn}^2 \frac{x}{k} - 1 \right] \times \\
 &\quad \times \left[2 \operatorname{dn} \frac{x}{k} \left(\operatorname{dn} \frac{x}{k} \operatorname{cn} \frac{x}{k} + \operatorname{sn} \frac{x}{k} E \left(\frac{x}{k} \right) \right) - \right. \\
 &\quad \left. - \operatorname{cn} \frac{x}{k} - \operatorname{cn} \frac{x}{k} \left(\operatorname{dn} \frac{x}{k} \operatorname{cn} \frac{x}{k} + \operatorname{sn} \frac{x}{k} E \left(\frac{x}{k} \right) \right)^2 - \right. \\
 &\quad \left. - (k')^2 \frac{y^2}{k^2} \operatorname{cn} \frac{x}{k} \operatorname{sn}^2 \frac{x}{k} \right]^{-1} - u_0(x). \quad (2.3.36)
 \end{aligned}$$

При $k \rightarrow 1$ выражение (2.3.36) переходит в (2.3.33). Случаю $a^2k^2 - 1 < 0$ отвечает периодическая цепочка чередующихся вихрей и антивихрей, параллельная оси Oy .

Отметим, что в несоизмеримых двумерных кристаллах описанные нами топологические дефекты отличаются от предложенных в работе [91] на основе качественного рассмотрения. Остановимся на этом подробнее.

Основное состояние несоизмеримого кристалла выражается периодической последовательностью (2.3.6) солитонных линий. При соотношении периодов кристалла–подложки и решетки адатомов в отсутствие подложки $a/b \sim 1$ солитонной линии соответствует полоса повышенной плотности адатомов, содержащая одну лишнюю (по сравнению с подложкой) цепочку атомов. Слева и справа от каждой солитонной линии адатомы лежат почти в минимумах потенциала подложки. Согласно [91], дефект в несоизмеримой фазе образуется при обрыве одной из линий. Остальные солитонные линии вблизи точки обрыва деформируются таким образом, что вдали от дефекта сохраняется структура основного состояния (2.3.6). Дефект представляет собой дислокацию в решетке солитонных линий с вектором Бюргерса, равным периоду L_0 несоизмеримой структуры. Упругая энергия дефекта $\frac{K_0 L_0^2}{4\pi} \ln \frac{L_0}{a}$ (K_0 – эффективный упругий модуль солитонных линий).

Вихри, рассмотренные в этом пункте, образуются не обрывом, а пересечением солитонных линий. После чего каждая из них становится антисолитонной, т. е. связанной полосой пониженной плотности адатомов (содержит на одну цепочку атомов меньше по сравнению с подложкой). Упругая энергия вихря зависит от конфигурации. Так, стенка из вихрей с $Q = 4$ (2.3.16) изменяет основное состояние адпленки, в результате упругая энергия линейно зависит от размера пленки и, по-видимому, выше, чем энергия дефекта в [91]. В то же время существуют особые конфигурации с конечной энергией типа вихрь – антивихрь (2.3.33) и ее последовательности (2.3.35), (2.3.36).

2.3.5. Цепочка чередующихся вихрей на фоне спиновой волны

Перейдем к анализу решений (2.3.20) уравнения (2.3.19), описывающих взаимодействие вихрей с нелинейной спиновой волной (2.3.21). Эти решения определяются формулами (2.3.25) – (2.3.27) и (2.3.29). Рассмотрим сначала вырожденные случаи. При $k \rightarrow 1$ решение асимптотически приближается к (2.3.30) и, следовательно,

описывает цепочку вихрей, движущуюся вместе с 2π -кинком. В пределе $k \rightarrow 0$ амплитуда спиновой волны (2.3.21) обращается в нуль, и мы получаем цепочку вихрей на однородном фоне

$$u = 4 \operatorname{arctg} [\operatorname{th} \rho \cos(x \operatorname{ch} \rho) / \operatorname{sh}(y \operatorname{sh} \rho)] + \pi,$$

где ρ – вещественный параметр.

В общем случае (2.3.25) – (2.3.27), (2.3.29) описывают цепочки вихрей, «вмороженные» в нелинейную волну (2.3.21) и движущиеся вместе с ней.

В частности, при $a = ip$, $b^2 = 1 + p^2$ (p – вещественный параметр) имеем на фоне (2.3.21) чередующиеся вихри с $Q = \pm 4$, которые расположены аperiodически вдоль оси Ox .

Только в случае $b = ip$, $a^2 = 1 + p^2$ (p – вещественный параметр) мы получаем периодическую цепочку из вихрей с зарядами $Q = \pm 4$, в точках $x_n = 0$, $y_n = \mu^{-1} [\pm \operatorname{arccos}(-a^{-1}k) + 2\pi n]$, где n – целое, $\mu = [p^2 + (k')^2]^{1/2}$. Распределение параметра порядка определяется выражением

$$u = 4 \operatorname{arctg} p^{-1} a w(x) [w(x) \operatorname{sh} \Phi(x) + p k \operatorname{sn} x \cos \mu y] [\mu k \operatorname{cn} x \operatorname{ch} \Phi(x) + a \operatorname{dn} x (w(x) \cos \mu y - p k \operatorname{sn} x \operatorname{sh} \Phi(x))]^{-1} + u_0(x),$$

$$w^2(x) = p^2 \operatorname{dn}^2 x + (k')^2, \quad \Phi(x) = p^{-1} \mu a [x - \mu^{-2} (k')^2 \operatorname{II}(x, \mu^{-2} k^2 p^2)]. \quad (2.3.37)$$

В результате взаимодействия с вихрями спиновая волна приобретает фазовый сдвиг. Действительно, на большом расстоянии от вихрей при $x \rightarrow \pm \infty$ значения (2.3.37) приближаются к асимптотическим:

$$u \approx 4 \operatorname{arctg} \operatorname{dn}(x \mp \Delta) [1 + k \operatorname{sn}(x \mp \Delta)]^{-1},$$

где $\Delta = F(\operatorname{arcsin} 2\mu a p(p^2 + a^2 \mu^2)^{-1}, k)$.

Проведенное в этом пункте исследование двумерных солитоноподобных топологических дефектов на фоне модулированной (полосовой доменной) структуры магнетиков, в двумерных кристаллах, а также на фоне нелинейных спиновых волн в магнетиках показывает, что в квазипериодических структурах из солитонных вихрей нет ограничения на расстояние между ядрами соседней пары вихрь – антивихрь. Поскольку при сближении последних энергия их ядер понижается, мы полагаем, что формирование периоди-

ческих вихревых конфигураций – специфическая черта рассмотренных двумерных систем, связанная с нетривиальным характером взаимодействия вихрей. Все солитонные вихри имеют топологические заряды $Q = \pm 4$ и формируются в результате пересечения или перекручивания доменных границ, которые принадлежат солитонной сверхструктуре основного состояния. В несоизмеримой фазе в отличие от соизмеримой возможно возникновение отдельных солитонных вихревых диполей с конечной энергией. Однако энергия таких диполей не может быть меньше некоторого критического значения. Наличие энергетической щели затрудняет термофлуктуационное зарождение пары вихрь – антивихрь по механизму Костерлица – Таулеса и должно проявиться в особенностях фазового перехода из несоизмеримой фазы в соизмеримую.

2.4. ВИХРИ С МИНИМАЛЬНЫМ ТОПОЛОГИЧЕСКИМ ЗАРЯДОМ. ЧИСЛЕННЫЕ РАСЧЕТЫ

Я предпочитаю найти одну истину, хотя бы и в незначительных вещах, нежели долго спорить о величайших вопросах, не достигая никакой истины.

Г. Галилей

Рассмотрим модельное уравнение (2.1.18) для вспомогательного поля $u(x, y)$. Вблизи центра вихря градиенты поля $u(x, y)$ велики. Поэтому в основном приближении структура ядра вихря определяется линейным уравнением: $\Delta u \approx 0$, решение которого имеет вид

$$u = c_0 + Q \arctg y/x, \quad (2.4.1)$$

где c_0 – постоянная. Центр вихря соответствует особой точке $\mathbf{r} = (0, 0)$ решения (2.4.1). Чтобы наблюдаемые величины были однозначными, величина Q должна принимать целые значения: $Q = \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots$. Построение асимптотических решений уравнения (2.1.18) вблизи центров вихрей, позволяет уточнить структуру вихрей. При $Q = \pm 1$ и $Q = \pm 4$ приближенное решение модели в области ядра вихря описывается разложением

$$u(r, \varphi) = Q(\varphi - \varphi_0) + u_1(\varphi)r + u_2(\varphi)r^2 + \dots, \quad (2.4.2)$$

где $u_n(\varphi)$ – периодические функции: $u_n(\varphi) = u_n(\varphi + 2\pi)$, φ_0 – произвольная постоянная, (r, φ) – полярная система координат с центром в сингулярной (особой) точке. При $Q = \pm 2, \pm 3$ степенной ряд по r типа (2.4.2) непригоден, так как приводит к вековым членам, нарушающим периодичность функций $u_n(\varphi)$. Справедливо другое разложение

$$u(r, \varphi) = Q(\varphi - \varphi_0) + u_1(\varphi)r + u_2(\varphi)r^2 \ln r + \dots \quad (2.4.3)$$

Приведенные в этой главе решения модели (2.1.18) описывают вихри с большими топологическими зарядами $|Q| = 4$. Поэтому в работах [43, 44] были привлечены численные методы для построения решений модели (2.1.18) с меньшими абсолютными значениями топологических зарядов. При численных расчетах удобно искать решение уравнения (2.1.18) в виде $u = u_0 + u_1$, где сингулярное поле u_0 является линейной суперпозицией вихрей (2.4.1) с топологическими зарядами $Q_i = \pm 1, \pm 2, \dots$, а поле $u_1(x, y)$ не имеет особенностей. Численное моделирование выполнено на основе модификации широко известного метода релаксации (см., например: [92, 93]). Вместо (2.1.18) рассматривалось нелинейное уравнение для поля $u_1(x, y, t)$:

$$-\partial u_1 / \partial t + \Delta u_1 = \sin(u_0 + u_1). \quad (2.4.4)$$

На границах области расчета Γ (обычно это прямоугольная область) задавались условия равенства нулю нормальной производной: $(\nabla u)_n = 0$. В качестве начального распределения выбиралось $u_1 = 0$. Затем численно исследовалась релаксация поля u_1 к стационарному состоянию $u_1(x, y, t \rightarrow \infty)$. Стационарная функция $u = u_0 + u_1(x, y, \infty)$ дает искомое решение модели (2.1.18) с вихрями в фиксированных точках. Указанный алгоритм автоматически реализует минимум функционала энергии системы

$$E = \iint dx dy \left[\frac{1}{2} (\nabla u)^2 + (1 - \cos u) \right]. \quad (2.4.5)$$

Интегрирование в (2.4.5) идет по всей области расчета за вычетом малых областей радиусом $(a/\delta) \ll 1$ вокруг особых точек (δ – толщина соответствующей доменной границы, a – внутренний радиус обрезания).

В результате численных расчетов найдены вихревые структуры различных типов. Простейшая конфигурация имеет топологический

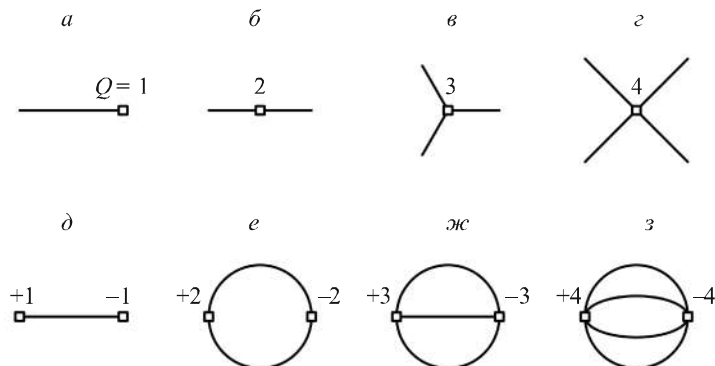


Рис. 2.22. Простейшие вихреподобные состояния, описываемые уравнением (2.1.18).

Пояснения см. в тексте

заряд $Q = 1$ или -1 . В терминах вспомогательного поля $u(x, y)$ она представляет собой полубесконечную 360° -ю доменную границу (2π -кинк), выходящую из центра вихря. Схематически вихрь с зарядом $Q = 1$ представлен в виде диаграммы *a* на рис. 2.22, где сплошная линия означает доменную границу¹.

Подобные 360° -е доменные стенки реализуются в пермалловых пленках (толщиной менее 300\AA), намагниченность которых лежит в плоскости пленки. Условия их возникновения и свойства подробно изучены в [94] с помощью метода порошковых фигур и электронно-микроскопическими методами в [95] (см. также [96]). В [94] возникновение 360° -х доменных границ связывается со взаимодействием неелевских 180° -х доменных границ с дефектами (например с отверстиями или с неферромагнитными включениями). На дефектах неелевские стенки задерживаются при перемагничивании под не очень большими углами к направлению легкого намагничивания, превращаясь при этом в 360° -е доменные стенки. Начинаящаяся на некотором включении 360° -я доменная граница может оканчиваться только на другом включении, причем величина включения должна быть критичной для взаимодействия со стенкой. В связи с этим в [95] указывалось на то, что 360° -е доменные границы могут оканчиваться только на блоховских линиях, т. е. вихрях.

¹Топологический анализ линейных солитонов, оканчивающихся на сингулярностях в упорядоченных средах (³He, нематика), проведен в [97, 98].

Более сложные одновихревые решения с $Q = \pm 2, \pm 3, \pm 4$ представляют собой Q полубесконечных 360° -х доменных границ, входящих из центра вихря, как это схематически изображено на рис. 2.22, б – г. Энергия (2.4.5) таких вихревых конфигураций пропорциональна длине составляющих их отрезков доменных границ и возрастает с увеличением размера системы.

С помощью численного анализа показано, что возможно образование вихревых конфигураций из N вихрей с нулевым суммарным топологическим зарядом, обладающих конечной энергией. Простейшая из них представляет собой отрезок 360° -й доменной стенки конечной длины l , соединяющей два вихря с $Q = 1$ и $Q = -1$ (см. рис. 2.22, д). Когда $l/\delta \gg 1$, энергия диполя пропорциональна энергии сегмента доменной границы, т. е. $E \sim l/\delta$. При условии $l/\delta \ll 1$ энергия взаимодействия вихрей такая же, как в линейной теории и соответствует пренебрежению анизотропией в базисной плоскости: $E \sim \ln(l/\delta)$. С помощью численных методов также найдены более сложные дипольные конфигурации из вихрей с $Q = \pm 2, \pm 3, \pm 4$ (см. рис. 2.22, е – з).

Рассмотренные конфигурации образуются из вихрей с зарядами $Q = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4$. В связи с этим возникает вопрос о зависимости энергии взаимодействия вихрей от расстояния между ними в таких конфигурациях. Было показано, что энергия взаимодействия двух вихрей, заряженных одноименно с $Q = 1$ и образующих при сближении доменную границу с тонкой структурой (см. рис. 2.22, б) [99], экспоненциально мала на расстояниях $R \gg \delta$, но при $R \leq \delta$ она логарифмически возрастает. Для двух вихрей с зарядами $Q_1 = -Q_2 = 1$ энергия взаимодействия на расстояниях $R \gg \delta$ также экспоненциально мала. Однако при $R \leq \delta$ она уменьшается. При этом вихри при сближении образуют доменную границу без тонкой структуры. Заметим, что хотя все конфигурации типа е, ж, з могут быть получены топологическим «сложением» вихрей типа д, вопрос о стабильности таких состояний окончательно может быть решен лишь при учете магнитостатики.

Среди полученных решений особый интерес вызывает элементарная конфигурация е (см. рис. 2.22). Учитывая формулы связей (2.1.5), (2.1.17), (2.1.19) вспомогательных поля $u(x, y)$ и заряда Q с наблюдаемыми величинами, можно сказать, что в ферромагнитных пленках с остаточной квадратичной анизотропией в плоскости пленки ($p = 2$) такая конфигурация образована из двух вихрей с зарядами $Q/p = \pm 1$, соединенных двумя отрезками 180° -х доменных границ. Она может рассматриваться как зародыш новой обратномагнитичен-

ной фазы. Условия термического зарождения подобной конфигурации исследованы в работе [44]. В модели свободных диполей зависимость среднестатистического квадрата размера $\langle l^2 \rangle$ диполя от температуры T определяется формулой [14]:

$$\langle l^2 \rangle = \frac{\int_a^\infty dl l^3 \exp[-E(l)/T]}{\int_a^\infty dl l \exp[-E(l)/T]}.$$

Здесь $E(l) = \frac{1}{2} \int d^3 \mathbf{r} \left[\alpha (\nabla \mathbf{M})^2 - \beta M_1^2 \right]$ – энергия вихревого диполя, α – обменная постоянная, β – постоянная анизотропии, $\mathbf{M}(\mathbf{r})$ – соответствующее диполю распределение намагниченности (2.1.5). Для регуляризации расходящихся интегралов введем радиус обрезания a порядка постоянной решетки. Наличие дополнительных множителей l в подинтегральных выражениях связано с тем, что в рассматриваемой задаче $d^3 \mathbf{r} = 2\pi h dl$, где h – толщина пленки.

Численный анализ показал подавление фазового перехода Березинского – Костерлица – Таулеса и возрастание среднестатистического размера диполя с температурой: $\sqrt{\langle l \rangle^2} \approx 0.31 \sqrt{\alpha/\beta} T/J$ при $T/J \gg 1$. Для того чтобы термически возбуждаемый диполь имел макроскопические размеры, необходимо, чтобы величина $J = ahM_0^2$ была как можно меньше, а следовательно, малыми должны быть толщина пленки h , намагниченность насыщения M_0 и постоянная α обменного взаимодействия. Эти условия, по-видимому, трудно выполнимы для традиционных пленочных материалов (ферриты-гранаты, пермаллои), однако могут быть реализованы в супертонких пленках, квазидвумерных магнетиках и т. д.

При численных расчетах пренебрегали магнитостатическим взаимодействием. Поскольку рассмотренные двумерные вихревые конфигурации состоят из квазиодномерных доменных стенок, влияние магнитостатики на структуру доменной границы легко учесть в локальном приближении, что приведет к изменению ее ширины; нелокальной же частью можно пренебречь. Сложнее обстоит дело с ядром вихря, где распределение намагниченности сингулярное. В ядре вихря магнитостатическое поле в общем случае имеет особенность ($\text{div } \mathbf{M} \sim r^{-1}$), поэтому магнитный момент выходит из базисной плоскости, понижая энергию системы.

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА РАССЕЯНИЯ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ SINE-GORLON С АСИМПТОТИКОЙ ТИПА КНОИДАЛЬНОЙ ВОЛНЫ

Эта задача (*обратная задача рассеяния*. – Авт.) является одним из наиболее интригующих и поучительных разделов математической физики, обнаруживает в своем развитии новые неожиданные аспекты и далеко не является исчерпанной.

Л.Д. Фаддеев

Важной проблемой физики конденсированного состояния является изучение нелинейных возмущений и дефектов на периодическом фоне. Примеры подобных задач: генерация солитонов, локализованных импульсов и структур на фоне периодической волны [1–6]; формирование дефектов в несоизмеримых структурах [7–10]. Возможный путь решения указанных задач (с неоднородным фоном) состоит в редукции определяющих уравнений к эффективному, корректно учитывающему нелинейные взаимодействия и в то же время точно интегрируемому. Одно из таких универсальных уравнений эллиптическое уравнение sine-Gordon:

$$(\partial_x^2 + \partial_y^2)u = \sin u. \quad (3.1)$$

Сравнительно простые методы интегрирования (3.1) (метод Хироты, преобразование Бэклунда, подстановка Лэмба) приводят к солитоноподобным конфигурациям, в том числе к сингулярным решениям типа вихрей на однородном и периодическом фоне (см. главу 2). Однако все исследованные этими методами вихри имеют одинаковые и сравнительно большие топологические заряды $Q = \pm 4$. Солитоноподобные дефекты изменяют краевые условия (см. главу 4), поэтому вихри с меньшими топологическими зарядами не принадлежат классу солитонных решений уравнения (3.1). Для их изучения необходимы более мощные методы интегрирования.

Для многих нелинейных волновых уравнений, обладающих $L - A$ -парой, широко известная схема Гарднера – Грина – Крускала – Миуры [11–16] позволяет найти отображение решений в данные рассеяния вспомогательной спектральной задачи. Эволюция данных рассеяния определяется линейными уравнениями и вычисляется явно по условиям, заданным в начальный момент $t = t_0$ (задача Коши). Обратное преобразование (метод обратной задачи рассеяния) дает возможность по данным рассеяния найти решение исходных нелинейных уравнений гиперболического и параболического типов.

Мы сталкиваемся со значительными трудностями при распространении метода обратной задачи рассеяния на краевые задачи. В этом случае невозможно получить простое отображение краевых условий, сформулированных для исходных полей, на вспомогательные поля. Тем не менее ряд начально-краевых задач для одномерных волновых процессов решен в работах [17–29]. Все эти решения в отличие от известных для безграничной среды обладают определенной симметрией. Связь алгебраической симметрии задачи с интегрируемыми граничными условиями обсуждалась в работах [27–34]. Проблема интегрирования двумерных нелинейных уравнений эллиптического типа с краевыми условиями не решена до сих пор даже для моделей, допускающих представление Лакса. Подход работы [31], основанный на теории конечнозонного интегрирования, дает лишь частные решения краевых задач и не допускает обобщения.

Эллиптическое уравнение (3.1) имеет обобщенное представление Лакса [13]:

$$\begin{aligned} \partial_x L - \partial_y A + [L, A] &= 0, \\ A &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial_y u}{2} \sigma_3 + \sigma_1 w_1(\alpha) \cos \frac{u}{2} + i \sigma_2 w_2(\alpha) \sin \frac{u}{2} \right\}, \quad w_1(\alpha) = \frac{1}{2} (\alpha + \alpha^{-1}), \\ L &= \frac{1}{2} \left\{ -\frac{\partial_x u}{2} \sigma_3 - \sigma_1 w_2(\alpha) \cos \frac{u}{2} + i \sigma_2 w_1(\alpha) \sin \frac{u}{2} \right\}, \quad w_2(\alpha) = \frac{1}{2i} (\alpha - \alpha^{-1}), \end{aligned} \quad (3.2)$$

где σ_i – матрица Паули, α – спектральный параметр. С помощью этого обстоятельства, в данной главе развит формализм обратной задачи рассеяния для построения точных решений $u(x, y)$ уравнения (3.1) с асимптотиками типа кноидальной волны:

$$u(x, y) \rightarrow u_0(x), \quad y \rightarrow -\infty;$$

$$u(x, y) \rightarrow u_1(x), \quad y \rightarrow +\infty. \quad (3.3)$$

Здесь $u_i(x)$ удовлетворяют (3.1) и выражаются в явном виде через эллиптические функции Якоби из соотношения

$$\frac{(\partial_x u_i)^2}{2} = c - \cos u_i, \quad (3.4)$$

где c – постоянная интегрирования, $i = 0, 1$. Заметим, что поля $u_0(x)$ и $u_1(x)$ могут отличаться постоянным сдвигом по аргументу x и (в силу инвариантности (3.1) при заменах $u \rightarrow -u$) знаком. В дальнейшем без ограничения общности будем считать, что при $c > 1$ решения имеют вид

$$\begin{aligned} \cos \frac{u_0}{2} = \operatorname{sn} \left(\frac{x}{k}, k \right), \quad \sin \frac{u_0}{2} = \operatorname{cn} \left(\frac{x}{k}, k \right), \quad \frac{\partial_x u_0}{2} = -\frac{1}{k} \operatorname{dn} \left(\frac{x}{k}, k \right), \\ k^2 = \frac{2}{1+c}, \quad u_1(x) = \varepsilon u_0(x + \delta), \quad \varepsilon = \pm 1, \quad \delta = \operatorname{const}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Для $|c| < 1$

$$\begin{aligned} \cos \frac{u_0}{2} = k \operatorname{sn}(x, k), \quad \sin \frac{u_0}{2} = \operatorname{dn}(x, k), \quad \frac{\partial_x u_0}{2} = -k \operatorname{cn}(x, k), \\ k^2 = \frac{1+c}{2}, \quad u_1(x) = \varepsilon u_0(x + \delta), \quad \varepsilon = \pm 1, \quad \delta = \operatorname{const}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Решения (3.5) и (3.6) описывают одномерную решетку солитонов (2.3.6) и волну (2.3.21) соответственно. Для волнового уравнения КдВ проблема построения решений на фоне кноидальной волны рассматривалась в [35].

В данной главе мы не решим краевую задачу для эллиптического уравнения (3.1) в полном объеме. Однако покажем, что, когда заданы асимптотическое поведение поля $u(x, y)$ при $y \rightarrow \pm\infty$ (3.3) и значения $\partial_x u(x, y)$, $u(x, y)$ на некоторой линии $x = x_0 = \operatorname{const}$, метод ОЗР дает самосогласованную схему интегрирования уравнения (3.1). Если опустить последнее условие, предлагаемая процедура в принципе позволяет исследовать все точные решения уравнения (3.1) с заданным асимптотическим поведением (3.3) по одной из пространственных переменных (например y).

Выбранная асимптотика по переменной u типа кноидальных волн соответствует классу задач в физике твердого тела, аналитическое описание которых полностью отсутствует. В частности, как указано в главе 2, эти задачи отвечают наличию несоизмеримой фазы (плоскопараллельной доменной структуры) в магнетиках и двумерных кристаллах или нелинейной спиновой волны в магнетиках с анизотропией типа «легкая плоскость». Мы рассмотрели предельные случаи, когда период кноидальных волн стремится к бесконечности. Тогда на бесконечности имеет место либо однородное распределение параметра порядка, либо асимптотическое поведение типа одиночных 2π -кинков. Последний тип краевых условий отвечает, например, задачам описания тонкой структуры доменной границы в ферро- и антиферромагнетиках. В главах 4 и 5 предложенная нами модификация ОЗР использована для аналитического описания не-солитонных двумерных дефектов в со- и несоизмеримой фазах магнетиков и кристаллов.

Необычность ОЗР для модели (3.1), (3.3) состоит в том, что проблема сопряжения аналитических функций, составляющая основу метода, формулируется не в комплексной плоскости, а на римановой поверхности, ассоциированной с кноидальными волнами $u_i(x)$. Заметим, что в данном случае риманова поверхность возникает в задаче с рациональной L - A -парой. Задача рассеяния для эллиптической L - A -пары на римановой поверхности первого рода рассматривалась в [36, 37] (см. также [38]).

Кноидальная волна (3.5) (или (3.6)) соответствует простейшему из конечнозонных потенциалов, алгебраическое построение которых интенсивно развивалось в конце 70-х гг. XX в. [11, 39–45]. Процедура интегрирования, развиваемая в этой главе (см. [46–50]), ведет к результатам, только в солитонном секторе совпадающим с вырожденными конечнозонными решениями. Решения, связанные с непрерывным спектром ОЗР, принадлежат другому классу функций и не воспроизводятся методами конечнозонного интегрирования.

План главы следующий. В п. 3.1 исследованы аналитические свойства решений прямой задачи рассеяния для вспомогательной линейной системы

$$\partial_y \Psi = L\Psi, \quad (3.7)$$

связанной с уравнением (3.1). Найдены решения Иоста и операторы преобразования для системы (3.7) с граничными условиями, следу-

ющими из (3.3). Показано, что операторы преобразования определяются из гиперболической системы уравнений с условиями на характеристиках (задача Коши – Гурса). Аналитические свойства решений Иоста и матрицы перехода S формулируются на римановой поверхности R функции $\tau = [\alpha^2 + \alpha^{-2} - 2c]^{1/2}$, связанной с кноидальными волнами $u_i(x)$. Выявлена зависимость S -матрицы от переменной x . Показано, что решение $u(x, y)$ эллиптического уравнения sine-Gordon (3.1) может быть выражено через значения функций Иоста в определенных точках, движущихся по римановой поверхности R . В п. 3.2 рассматриваются дискретные собственные значения системы (3.7), которые совпадают с нулями диагональных элементов S -матрицы и приводят к солитоноподобным решениям уравнения (3.1). Число и положение точек дискретного спектра на R определяются редукциями и свойствами кноидальных волн: сдвигом по аргументу x функций $u_0(x)$, $u_1(x)$, их относительным знаком. Это позволяет провести полную алгебраическую классификацию мульти-солитонных состояний.

Дискретный спектр и условие $\det S = \mu(\alpha, x)$ (функция $\mu(\alpha, x)$ зависит от $u_i(x)$) определяют вид S -матрицы в солитонном секторе. Дисперсионные соотношения, выражающие несолитонную часть диагональных элементов S -матрицы через коэффициент отражения, получены в п. 3.3.

В п. 3.4 решается обратная задача рассеяния. С помощью аналога преобразования Фурье на римановой поверхности R выведены линейные интегральные уравнения типа Гельфанда – Левитана – Марченко. Это позволяет вычислить поле $u(x, y)$ по заданным функциям $u(x_0, y)$, $\partial_{x_0} u(x_0, y)$ и асимптотике (3.3).

В п. 3.5 полученные результаты используются для построения в явном виде мультисолитонных решений уравнения (3.1) с асимптотикой типа кноидальной волны (3.3).

3.1. ПРЯМАЯ ЗАДАЧА РАССЕЯНИЯ

Итак, все законы выводятся из опыта. Но для выражения их нужен специальный язык. Обиходный язык слишком беден, кроме того, он слишком неопределен для выражения столь богатых содержанием точных и тонких соотношений. Таково первое основание, по которому физик не может обойтись без математики; она дает ему единственный язык, на котором он в состоянии изъясняться.

А. Пуанкаре. Ценность науки

В этой части мы обсудим прямую задачу рассеяния, ассоциированную с линейной системой (3.7).

3.1.1. Функции Иоста. Операторы преобразования

Определим фундаментальные решения Иоста $\Psi_{\pm}(\alpha, \tau)$ системы (3.7) по их асимптотическим свойствам:

$$\Psi_{-} \rightarrow \Psi_{-}^{(0)} = \begin{pmatrix} w_2 \cos \frac{u_0}{2} - w_1 \sin \frac{u_0}{2} & w_1 \sin \frac{u_0}{2} - w_2 \cos \frac{u_0}{2} \\ -\frac{i\tau}{2} - \frac{\partial_x u_0}{2} & -\frac{i\tau}{2} + \frac{\partial_x u_0}{2} \end{pmatrix} \exp \frac{i\tau}{4} \sigma_3 y,$$

$$y \rightarrow -\infty;$$

$$\Psi_{+} \rightarrow \Psi_{+}^{(0)} = \begin{pmatrix} w_2 \cos \frac{u_1}{2} - w_1 \sin \frac{u_1}{2} & w_1 \sin \frac{u_1}{2} - w_2 \cos \frac{u_1}{2} \\ -\frac{i\tau}{2} - \frac{\partial_x u_1}{2} & -\frac{i\tau}{2} + \frac{\partial_x u_1}{2} \end{pmatrix} \exp \frac{i\tau}{4} \sigma_3 y,$$

$$y \rightarrow +\infty, \quad (3.1.1)$$

где $\tau = [\alpha^2 + \alpha^2 - 2c]^{1/2}$, $\Psi_{\pm}^{(0)}$ удовлетворяют (3.7) при $u = u_0(x)$ и $u = u_1(x)$ соответственно. Покажем, что решения Иоста допускают интегральные представления:

$$\begin{aligned} \Psi_- = & \begin{pmatrix} w_2 \cos \frac{u+u_0}{4} - w_1 \sin \frac{u+u_0}{4} & w_1 \sin \frac{u+u_0}{4} - w_2 \cos \frac{u+u_0}{4} \\ -\frac{i\tau}{2} \cos \frac{u-u_0}{4} + v & -\frac{i\tau}{4} \cos \frac{u-u_0}{4} - v \end{pmatrix} \exp\left(\frac{i\tau}{4} \sigma_3 y\right) + \\ & + \int_{-\infty}^y dy' \begin{pmatrix} a(y, y') w_1 + b(y, y') w_2 & -a(y, y') w_1 - b(y, y') w_2 \\ f(y, y') + w_1 w_2 h(y, y') & -f(y, y') - w_1 w_2 h(y, y') \end{pmatrix} \exp \frac{i\tau}{4} \sigma_3 y', \\ v = & -\frac{1}{4} \left\{ \sin \frac{u-u_0}{4} \left[\partial_y u + \int_{-\infty}^y dy' \frac{\partial_x u \partial_y u}{2} \right] + \cos \frac{u-u_0}{4} \left[\partial_x (u+u_0) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \int_{-\infty}^y dy' \left(\frac{(\partial_x u)^2 - (\partial_y u)^2}{4} + \cos^2 \frac{u}{2} - \frac{1+c}{2} \right) \right] \right\}; \\ \Psi_+ = & \begin{pmatrix} w_2 \cos \frac{u+u_1}{4} - w_1 \sin \frac{u+u_1}{4} & w_1 \sin \frac{u+u_1}{4} - w_2 \cos \frac{u+u_1}{4} \\ -\frac{i\tau}{2} \cos \frac{u-u_1}{4} + v & -\frac{i\tau}{4} \cos \frac{u-u_1}{4} - v \end{pmatrix} \exp\left(\frac{i\tau}{4} \sigma_3 y\right) + \\ & + \int_y^{\infty} dy' \begin{pmatrix} \gamma(y, y') w_1 + \beta(y, y') w_2 & -\gamma(y, y') w_1 - \beta(y, y') w_2 \\ \varphi(y, y') + w_1 w_2 \kappa(y, y') & -\varphi(y, y') - w_1 w_2 \kappa(y, y') \end{pmatrix} \exp \frac{i\tau}{4} \sigma_3 y', \\ v = & \frac{1}{4} \left\{ \cos \frac{u-u_1}{4} \left[-\partial_x (u+u_1) + \int_y^{\infty} dy' \left(\frac{(\partial_x u)^2 - (\partial_y u)^2}{4} + \cos^2 \frac{u}{2} - \frac{1+c}{2} \right) \right] + \right. \\ & \left. + \sin \frac{u-u_1}{4} \left[-\partial_y u + \int_y^{\infty} dy' \frac{\partial_x u \partial_y u}{2} \right] \right\}. \quad (3.1.2) \end{aligned}$$

Интегральные представления (3.1.2) введены на множестве $\Gamma = \{\alpha | \text{Im} \tau = 0\}$. При $\alpha, \tau \in \Gamma$ функции Ψ_{\pm} имеют осциллирующее асимптотическое поведение при $y \rightarrow \pm\infty$, так что Γ составляет непрерывный спектр задачи (3.7).

Приведем вначале качественные соображения (см. [38]), которыми мы руководствовались при построении таких достаточно сложных операторов преобразования. Прежде всего заметим, что зависимость от спектрального параметра внеинтегральных членов в выражении (3.1.2) может быть установлена из соображений соответствия формул (3.1.1), (3.1.2) при $|y| \rightarrow \infty$. Для более полного выявления спектральной зависимости ядер операторов преобразования поучительно использовать теорию возмущений и рассмотреть физически оправданный случай, когда поля $u(x, y)$ близки к фону $u_i(x)$:

$$u(x, y) = u_i(x) + \varepsilon u_i^{(1)}(x, y) + \varepsilon^2 u_i^{(2)}(x, y) + \dots$$

Параметр ε введен для наглядной группировки членов одного порядка малости, в конце вычислений полагаем $\varepsilon = 1$. Напомним, что физический параметр малости выявляется в результате оценки отношений последующего и предыдущего членов асимптотического разложения. Представим $L = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m L^{(m)}$ и будем искать функции Иос-

та в виде ряда $\Psi_{\pm} = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m \Psi_{\pm}^{(m)}$. Получим рекуррентные формулы для $\Psi_{\pm}^{(m)}$:

$$\Psi_{+}^{(m)}(y) = \Psi_{+}^{(0)}(y) \int_y^{\infty} (\Psi_{+}^{(0)}(y'))^{-1} \sum_{n=1}^m L^{(n)}(y') \Psi_{+}^{(m-n)}(y') dy',$$

$$\Psi_{-}^{(m)}(y) = \Psi_{-}^{(0)}(y) \int_{-\infty}^y (\Psi_{-}^{(0)}(y'))^{-1} \sum_{n=1}^m L^{(n)}(y') \Psi_{-}^{(m-n)}(y') dy', \quad m = 1, 2, \dots$$

(3.1.3)

Правая часть (3.1.3) содержит слагаемые, коэффициенты при которых с точностью до умножения на полиномы по переменной τ сводятся к набору $w_1, w_2, w_1 w_2$. Функции $w_1, w_2, w_1 w_2$ образуют неприводимое представление группы редукций (см. далее), действующей на решения Ψ_{\pm} . После интегрирований по частям разложение для Ψ_{\pm} приводит к зависимости от спектрального параметра типа (3.1.2)

в любом порядке теории возмущений. Приведенный анализ указывает на целесообразность изучения представления в Ψ_{\pm} виде (3.1.2).

Наметим путь строгого доказательства. Представим Ψ_{-} (Ψ_{+}) в форме (3.1.2), где $a, b, f, h, v(\alpha, \beta, \varphi, \kappa, \nu)$ – пока неизвестные функции от переменных x, y . Часть из них вычисляется в явном виде из условий обращения в нуль линейно независимых внеинтегральных слагаемых в (3.7). Уравнения для другой части функций выделим из подынтегральных выражений. Поясним эту нетривиальную процедуру на конкретном примере. Подставим представление (3.1.2) для Ψ_{-} в выражение (3.7). Первую компоненту первого вектора-столбца

в (3.7) умножим последовательно на $w_1 \exp\left(-\frac{ity''}{4}\right)$, $w_2 \exp\left(-\frac{ity''}{4}\right)$, вторую компоненту – на $\exp\left(-\frac{ity''}{4}\right)$, $w_1 w_2 \exp\left(-\frac{ity''}{4}\right)$ ($y'' < y$) и про-

интегрируем уравнения вдоль Γ по τ . При интегрировании используем формулы, связанные с преобразованием Фурье на Γ (см. (3.4.2) – (3.4.5)). В результате получаем систему линейных дифференциальных уравнений на вещественные функции $a(y, y')$, $b(y, y')$, $f(y, y')$, $h(y, y')$:

$$2\left(\partial_y a + a \frac{\partial_x u}{4}\right) - f \sin \frac{u}{2} + \left(\frac{1-c}{2} \cos \frac{u}{2} + 4 \cos \frac{u}{2} \partial_{y'}^2\right) h = 0,$$

$$2\left(\partial_y b + b \frac{\partial_x u}{4}\right) + f \cos \frac{u}{2} + \left(-\frac{1+c}{2} \sin \frac{u}{2} + 4 \sin \frac{u}{2} \partial_{y'}^2\right) h = 0,$$

$$2\left(\partial_y f - f \frac{\partial_x u}{4}\right) + \left(\frac{1-c}{2} \cos \frac{u}{2} + 4 \cos \frac{u}{2} \partial_{y'}^2\right) b +$$

$$+ \left(\frac{1+c}{2} \sin \frac{u}{2} - 4 \sin \frac{u}{2} \partial_{y'}^2\right) a = 0,$$

$$2\left(\partial_y h - h \frac{\partial_x u}{4}\right) + a \cos \frac{u}{2} + b \sin \frac{u}{2} = 0, \quad (y > y') \quad (3.1.4)$$

и дополнительные условия

$$\begin{aligned}
 & b(y, y) + ia(y, y) = \\
 & = -\frac{1}{8} \exp\left(-\frac{i(u+u_0)}{4}\right) \left\{ \left[\partial_x(u-u_0) - \int_{-\infty}^y dy' \left(\frac{(\partial_x u)^2 - (\partial_y u)^2}{4} + \right. \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. \left. + \cos^2 \frac{u}{2} - \frac{1+c}{2} \right) \right] + i \left[-\partial_y u + \int_{-\infty}^y dy' \frac{\partial_x u \partial_y u}{2} \right] \right\}, \\
 & h(y, y) = -\frac{1}{2} \sin \frac{u-u_0}{4}. \tag{3.1.5}
 \end{aligned}$$

Применение подобной процедуры ко второму вектору-столбцу матричного уравнения (3.7) дает эквивалентные результаты.

Система (3.1.4) гиперболическая. Действительно, после дифференцирований и алгебраических преобразований она приводится к виду

$$\begin{aligned}
 & 4(\partial_y^2 - \partial_{y'}^2)a + 2\partial_y u \left(\partial_y b + b \frac{\partial_x u}{4} \right) + a(\partial_x \partial_y u - \mu) + h\partial_y u \sin \frac{u}{2} = 0, \\
 & -4(\partial_y^2 - \partial_{y'}^2)b + 2\partial_y u \left(\partial_y a + a \frac{\partial_x u}{4} \right) - b(\partial_x \partial_y u - \mu) + h\partial_y u \cos \frac{u}{2} = 0, \\
 & -4(\partial_y^2 - \partial_{y'}^2)h + \partial_y u \left(a \sin \frac{u}{2} - b \cos \frac{u}{2} \right) + h(\partial_x \partial_y u + \mu) = 0, \\
 & f - 2\sin \frac{u}{2} \left(\partial_y a + a \frac{\partial_x u}{4} \right) + 2\cos \frac{u}{2} \left(\partial_y b + b \frac{\partial_x u}{4} \right) - \frac{h}{2} \sin u = 0, \\
 & \mu = \left(\frac{\partial_x u}{2} \right)^2 + \cos^2 \frac{u}{2} - \frac{1+c}{2}, \quad y > y'. \tag{3.1.6}
 \end{aligned}$$

Прямые $y + y' = \text{const}$, $y - y' = \text{const}$ являются характеристиками системы (3.1.6). На характеристике $y = y'$ заданы (3.1.5) значения $a(y, y')$, $b(y, y')$, $h(y, y')$. Таким образом, вычисление ядер пре-

образования сводится к задаче Гурса (характеристической задаче Коши) [51, 52]. Дифференциальные уравнения задачи Гурса (3.1.5), (3.1.6) эквивалентны интегральным уравнениям типа Вольтерра. В дальнейшем будем предполагать, что задача Гурса разрешима.

Уравнения на функции $\gamma, \beta, \kappa, \varphi$, входящие в представление для Ψ_+ (3.1.2), получаются из (3.1.4), (3.1.6) заменой

$$a \rightarrow \gamma, b \rightarrow \beta, h \rightarrow \kappa, f \rightarrow \varphi. \quad (3.1.7)$$

Условия на характеристике в этом случае имеют вид

$$\begin{aligned} & \beta(y, y) + i\gamma(y, y) = \\ & = \frac{1}{8} \exp\left\{-\frac{i(u+u_1)}{4}\right\} \left\{ \left[\partial_x(u-u_1) + \int_y^\infty dy' \left(\frac{(\partial_x u)^2 - (\partial_y u)^2}{4} + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + \cos^2 \frac{u}{2} - \frac{1+c}{2} \right) \right] - i \left[\partial_y u + \int_y^\infty dy' \frac{\partial_x u \partial_y u}{2} \right] \right\}, \quad \kappa(y, y) = \frac{1}{2} \sin \frac{u-u_1}{4}. \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

3.1.2. Матрица перехода и редукции

Будем использовать обозначения $\chi(\alpha, \tau)$ и $\bar{\chi}(\alpha, \tau)$ ($\psi(\alpha, \tau)$, $\bar{\psi}(\alpha, \tau)$) для первого и второго векторов-столбцов матрицы $\Psi_-(\alpha, \tau)$ ($\Psi_+(\alpha, \tau)$):

$$\Psi_- = (\chi, \bar{\chi}), \quad \Psi_+ = (\psi, \bar{\psi}). \quad (3.1.9)$$

Здесь $\chi = \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix}$, $\bar{\chi} = \begin{pmatrix} \bar{\chi}_1 \\ \bar{\chi}_2 \end{pmatrix}$ и т.д.

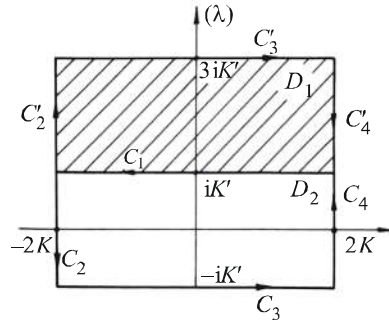
Из соотношений для Ψ_- (3.1.2) следует, что векторы-функции $\chi(\alpha, \tau)$ и $\bar{\chi}(\alpha, \tau)$ могут быть аналитически продолжены соответственно в области $D_1 = \{(\alpha, \tau) | \text{Im} \tau \leq 0\}$ и $D_2 = \{(\alpha, \tau) | \text{Im} \tau \geq 0\}$ римановой поверхности R функции $\tau = [\alpha^2 + \alpha^{-2} - 2c]^{1/2}$. Такая риманова поверхность топологически эквивалентна тору. Ее униформизация за-

Рис. 3.1. Области D_1 , D_2 и контур Γ на λ -плоскости при $c > 1$

висит от выбора постоянной c . Для $c \geq 1$ одна из возможных униформизаций

$$\alpha = \operatorname{sn}(\lambda, k) + icn(\lambda, k), \quad k = \left(\frac{2}{1+c} \right)^{1/2},$$

$$w_1 = \operatorname{sn} \lambda, \quad w_2 = \operatorname{cn} \lambda, \quad \tau = \frac{2i}{k} \operatorname{dn} \lambda. \quad (3.1.10)$$



В комплексной λ -плоскости области D_1 и D_2 и контур Γ между ними представлены на рис. 3.1 (K и K' – полные эллиптические интегралы первого рода, соответственно, с модулями k и $k' = [1 - k^2]^{1/2}$).

В исходных переменных (α, τ) римановой поверхности функции $\tau = [\alpha^2 + \alpha'^2 - 2c]^{1/2}$ отвечают два экземпляра комплексной α -плоскости, склеенные по разрезам (рис. 3.2). Склейка листов проводится так, что верхний берег одного листа соединяется с нижним берегом другого.

При $|c| \leq 1$ удобна униформизация

$$\alpha = k \operatorname{sn}(\lambda, k) + i \operatorname{dn}(\lambda, k), \quad k = \left(\frac{1+c}{2} \right)^{1/2}, \quad w_1 = k \operatorname{sn} \lambda, \quad w_2 = \operatorname{dn} \lambda, \quad \tau = 2ik \operatorname{cn} \lambda. \quad (3.1.11)$$

Области D_1 и D_2 и контур Γ представлены на рис. 3.3, 3.4. Подобным образом из представления (3.1.2) для Ψ_+ заключаем, что векторы-

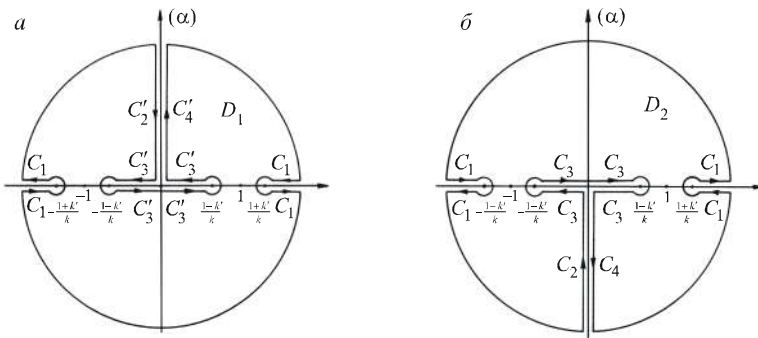


Рис. 3.2. Риманова поверхность функции $\tau = [\alpha^2 + \alpha'^2 - 2c]^{1/2}$ при $c > 1$.
а, б – листы α -плоскости

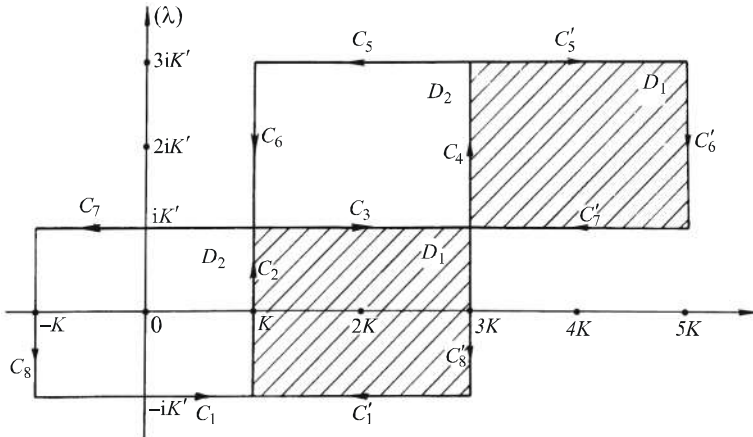


Рис. 3.3. Области D_1, D_2 и контур Γ на λ -плоскости при $c < 1$

функции ψ и $\bar{\psi}$ аналитически продолжаютя соответственно в области D_2 и D_1 римановой поверхности функции $\tau = [\alpha^2 + \alpha^{-2} - 2c]^{1/2}$.

Поскольку на контуре Γ , разделяющем области D_1 и D_2 , определены одновременно два фундаментальных решения $\Psi_-(\alpha, \tau)$ и $\Psi_+(\alpha, \tau)$, имеется связь

$$\Psi_-(\alpha, \tau) = \Psi_+(\alpha, \tau)S(\alpha, \tau), \quad (\alpha, \tau) \in \Gamma. \quad (3.1.12)$$

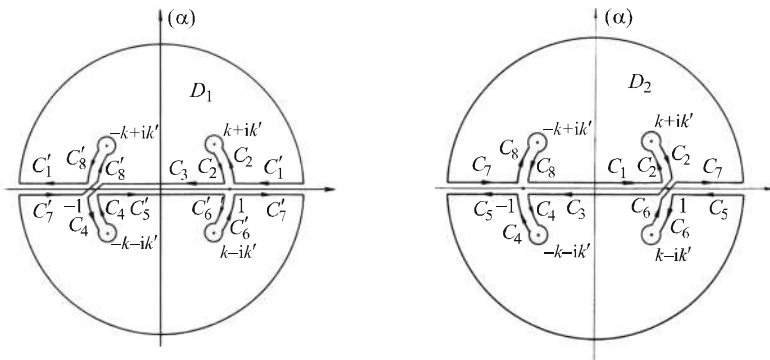


Рис. 3.4. Листы римановой поверхности при $c < 1$

Матрица перехода $S(\alpha, \tau)$ может зависеть от переменной x , но не зависит от y . Поскольку $\text{Sp}L = 0$, $\det \Psi_{\pm}$ также не зависит от y . Полагая $y \rightarrow \pm\infty$, находим

$$\begin{aligned} \det \Psi_+ &= \det \Psi_+^{(0)} = -i\tau \left(w_2 \cos \frac{u_1}{2} - w_1 \sin \frac{u_1}{2} \right), \\ \det \Psi_- &= \det \Psi_-^{(0)} = -i\tau \left(w_2 \cos \frac{u_0}{2} - w_1 \sin \frac{u_0}{2} \right); \end{aligned} \quad (3.1.13)$$

$$\det S = \left(w_2 \cos \frac{u_0}{2} - w_1 \sin \frac{u_0}{2} \right) \left(w_2 \cos \frac{u_1}{2} - w_1 \sin \frac{u_1}{2} \right)^{-1}. \quad (3.1.14)$$

Таким образом, наличие неубывающих на бесконечности граничных условий (3.3) проявляется в том, что S -матрица оказывается не унимодулярной, а функции Иоста Ψ_{\pm} вырожденными в точках, где $\det \Psi_{\pm}^{(0)}(x, \alpha, \tau) = 0$.

Далее проблему восстановления вида функции $\Psi_{\pm}(\alpha, \tau)$ будем рассматривать как задачу комплексного анализа: на римановой поверхности R требуется найти векторы-функции $\chi, \bar{\psi}$, аналитические в D_1 , и векторы-функции $\bar{\chi}, \psi$, аналитические в D_2 , которые на контуре Γ , разграничивающем эти области, удовлетворяют условию сопряжения (3.1.12). Перейдем к конкретизации аналитических свойств искоемых функций.

Из (3.1.12) выразим элементы матрицы S через функции Иоста:

$$\begin{aligned} S_{11}(\alpha, \tau) &= \frac{\det(\chi, \bar{\psi})}{\det \Psi_+^{(0)}}, \quad S_{22}(\alpha, \tau) = \frac{\det(\psi, \bar{\chi})}{\det \Psi_+^{(0)}}, \\ S_{12}(\alpha, \tau) &= \frac{\det(\bar{\chi}, \bar{\psi})}{\det \Psi_+^{(0)}}, \quad S_{21}(\alpha, \tau) = \frac{\det(\psi, \chi)}{\det \Psi_+^{(0)}}, \quad (\alpha, \tau) \in \Gamma. \end{aligned} \quad (3.1.15)$$

Вследствие свойств функций Иоста элементы S_{11} и S_{22} могут быть аналитически продолжены с контура Γ в области D_1 и D_2 соответственно (за исключением точек, где $\det \Psi_{\pm}^{(0)}(\alpha, \tau) = 0$).

Непосредственно вытекающие из (3.7), (3.1.2) редукции на функции Иоста

$$\Psi_{\pm}^* \left((\alpha^{-1})^*, -\tau^* \right) = \Psi_{\pm}(\alpha, \tau); \quad (3.1.16)$$

$$\Psi_{\pm}(-\alpha, \tau) = -\sigma_3 \Psi_{\pm}(\alpha, \tau); \quad (3.1.17)$$

$$\Psi_{\pm}(-\alpha, -\tau) = \sigma_3 \Psi_{\pm}(\alpha, \tau) \sigma_1, \quad (\alpha, \tau) \in \Gamma, \quad (3.1.18)$$

в силу связи (3.1.12) порождают ограничения на S -матрицу:

$$S^* \left((\alpha^{-1})^*, -\tau^* \right) = S(\alpha, \tau), \quad S(-\alpha, \tau) = S(\alpha, \tau),$$

$$S(-\alpha, -\tau) = \sigma_1 S(\alpha, \tau) \sigma_1, \quad (\alpha, \tau) \in \Gamma. \quad (3.1.19)$$

Заметим, что соотношения (3.1.16), (3.1.17) справедливы не только на контуре Γ , но и в областях аналитичности каждого из векторов-столбцов функций $\Psi_{\pm}(\alpha, \tau)$. Формула (3.1.18) имеет смысл лишь на Γ и задает переход от векторов-функций, аналитических на одном из листов римановой поверхности, к функциям, аналитическим на другом листе. Из первых двух соотношений (3.1.19) следуют ограничения на функции $S_{11}(\alpha, \tau)$ и $S_{22}(\alpha, \tau)$, которые могут быть продолжены с контура Γ в области D_1 и D_2 соответственно. Переход через контур Γ от функции $S_{11}(\alpha, \tau)$ к $S_{22}(\alpha, \tau)$ определяется из последней формулы (3.1.19).

В фундаментальном прямоугольнике со сторонами $4K, 4iK'$ на введенной λ -плоскости редукции (3.1.16) – (3.1.19) для $c > 1$ принимают вид

$$\Psi_{\pm}^*(\lambda^*) = \Psi_{\pm}(\lambda); \quad (3.1.16a)$$

$$\Psi_{\pm}(\lambda + 2K) = -\sigma_3 \Psi_{\pm}(\lambda); \quad (3.1.17a)$$

$$\Psi_{\pm}(-\lambda + 2iK') = \sigma_3 \Psi_{\pm}(\lambda) \sigma_1, \quad \lambda \in \Gamma; \quad (3.1.18a)$$

$$S^*(\lambda^*) = S(\lambda), \quad S(\lambda + 2K) = S(\lambda),$$

$$S(\lambda) = \sigma_1 S(-\lambda + 2iK') \sigma_1, \quad \lambda \in \Gamma. \quad (3.1.19a)$$

При $|c| < 1$, имеем

$$\Psi_{\pm}^*(\lambda^*) = \Psi_{\pm}(\lambda); \quad (3.1.16б)$$

$$\Psi_{\pm}(\lambda + 2K + 2iK') = -\sigma_3 \Psi_{\pm}(\lambda); \quad (3.1.17б)$$

$$\Psi_{\pm}(-\lambda + 2iK') = \sigma_3 \Psi_{\pm}(\lambda) \sigma_1, \quad \lambda \in \Gamma; \quad (3.1.18б)$$

$$\begin{aligned} S^*(\lambda^*) &= S(\lambda), \quad S(\lambda + 2K + 2iK') = S(\lambda), \\ S(\lambda) &= \sigma_1 S(-\lambda + 2iK') \sigma_1, \quad \lambda \in \Gamma. \end{aligned} \quad (3.1.19б)$$

3.1.3. Поведение функций Иоста вблизи особых точек

В этом пункте мы подробно исследуем асимптотическое поведение функций Иоста вблизи особых точек представления (3.1.2). Полученные результаты необходимы в дальнейшем для применения метода обратной задачи рассеяния.

Вблизи особых точек $\alpha \sim 0$, $\alpha \sim \infty$, где $\tau \rightarrow \infty$, имеют место следующие асимптотики для функций Иоста:

$$\begin{aligned} \chi &= \left(\begin{array}{l} w_1 \left[-\sin \frac{u+u_0}{4} - \frac{4i}{\tau} \widehat{D}a \Big|_{y=y'} \right] + w_2 \left[\cos \frac{u+u_0}{4} - \frac{4i}{\tau} \widehat{D}b \Big|_{y=y'} \right] \\ -\frac{i\tau}{2} \cos \frac{u-u_0}{4} + v - \frac{4i}{\tau} \widehat{D}f \Big|_{y=y'} - w_1 w_2 \frac{4i}{\tau} \widehat{D}h \Big|_{y=y'} \end{array} \right) \exp \frac{i\tau y}{4}; \\ \bar{\chi} &= \left(\begin{array}{l} w_1 \left[\sin \frac{u+u_0}{4} - \frac{4i}{\tau} \widehat{\Delta}a \Big|_{y=y'} \right] + w_2 \left[-\cos \frac{u+u_0}{4} - \frac{4i}{\tau} \widehat{\Delta}b \Big|_{y=y'} \right] \\ -\frac{i\tau}{2} \cos \frac{u-u_0}{4} - v - \frac{4i}{\tau} \widehat{\Delta}f \Big|_{y=y'} - w_1 w_2 \frac{4i}{\tau} \widehat{\Delta}h \Big|_{y=y'} \end{array} \right) \exp \left(-\frac{i\tau y}{4} \right), \\ \psi &= \left(\begin{array}{l} w_1 \left[-\sin \frac{u+u_1}{4} + \frac{4i}{\tau} \widehat{D}\gamma \Big|_{y=y'} \right] + w_2 \left[\cos \frac{u+u_1}{4} + \frac{4i}{\tau} \widehat{D}\beta \Big|_{y=y'} \right] \\ -\frac{i\tau}{2} \cos \frac{u-u_1}{4} + v + \frac{4i}{\tau} \widehat{D}f \Big|_{y=y'} + w_1 w_2 \frac{4i}{\tau} \widehat{D}\kappa \Big|_{y=y'} \end{array} \right) \exp \frac{i\tau y}{4}, \\ \bar{\psi} &= \left(\begin{array}{l} w_1 \left[\sin \frac{u+u_1}{4} + \frac{4i}{\tau} \widehat{\Delta}\gamma \Big|_{y=y'} \right] + w_2 \left[-\cos \frac{u+u_1}{4} + \frac{4i}{\tau} \widehat{\Delta}\beta \Big|_{y=y'} \right] \\ -\frac{i\tau}{2} \cos \frac{u-u_1}{4} - v + \frac{4i}{\tau} \widehat{\Delta}f \Big|_{y=y'} + w_1 w_2 \frac{4i}{\tau} \widehat{\Delta}\kappa \Big|_{y=y'} \end{array} \right) \exp \left(-\frac{i\tau y}{4} \right). \end{aligned} \quad (3.1.20)$$

Здесь

$$\widehat{D} = 1 + \frac{4i}{\tau} \partial_{y'} + \left(\frac{4i}{\tau}\right)^2 \partial_{y'}^2 + \dots, \quad \widehat{\Delta} = 1 - \frac{4i}{\tau} \partial_{y'} + \left(\frac{4i}{\tau}\right)^2 \partial_{y'}^2 - \dots$$

Отметим, что для $\alpha \in D_1$ имеем $\tau = \alpha + O(1/\alpha)$ при $|\alpha| \rightarrow \infty$, $\text{Im}\alpha < 0$ и $\tau = -\alpha + O(1/\alpha)$ при $|\alpha| \rightarrow \infty$, $\text{Im}\alpha > 0$. В D_2 получаем $\tau = \alpha \text{sign Im}\alpha + O(1/\alpha)$ при $|\alpha| \rightarrow \infty$. Таким образом, в области D_1 при $|\alpha| \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \chi \exp\left(-\frac{i\tau y}{4}\right) &= \frac{\alpha}{2i} \left(\begin{array}{c} \exp\left(-\frac{i}{4}(u+u_0)\right) \\ -(\text{sign Im}\alpha) \exp\frac{i}{4}(u-u_0) \end{array} \right) + \\ &+ \left(\begin{array}{c} 2(\text{sign Im}\alpha)(b+ia)|_{y=y'} \\ v-4ih_{y'}|_{y=y'} \end{array} \right) + O\left(\frac{1}{\alpha}\right), \\ \bar{\psi} \exp\frac{i\tau y}{4} &= \frac{\alpha}{2i} \left(\begin{array}{c} -\exp\left(-\frac{i}{4}(u+u_1)\right) \\ -(\text{sign Im}\alpha) \exp\frac{i}{4}(u-u_1) \end{array} \right) + \\ &+ \left(\begin{array}{c} -2(\text{sign Im}\alpha)(\beta+i\gamma)|_{y=y'} \\ -v-4i\kappa_{y'}|_{y=y'} \end{array} \right) + O\left(\frac{1}{\alpha}\right). \end{aligned} \quad (3.1.21)$$

В области D_2 при $|\alpha| \rightarrow \infty$ находим

$$\bar{\chi} \exp\frac{i\tau y}{4} = \frac{\alpha}{2i} \left(\begin{array}{c} -\exp\left(-\frac{i}{4}(u+u_0)\right) \\ (\text{sign Im}\alpha) \exp\frac{i}{4}(u-u_0) \end{array} \right) +$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\begin{array}{c} -2(\operatorname{sign} \operatorname{Im} \alpha)(b + ia)|_{y=y'} \\ -v + 4i h_{y'}|_{y=y'} \end{array} \right) + O\left(\frac{1}{\alpha}\right), \\
\psi \exp\left(-\frac{i\tau y}{4}\right) & = \frac{\alpha}{2i} \left(\begin{array}{c} \exp\left(-\frac{i}{4}(u + u_1)\right) \\ (\operatorname{sign} \operatorname{Im} \alpha) \exp\frac{i}{4}(u - u_1) \end{array} \right) + \\
& + \left(\begin{array}{c} 2(\operatorname{sign} \operatorname{Im} \alpha)(\beta + i\gamma)|_{y=y'} \\ v + 4i \kappa_{y'}|_{y=y'} \end{array} \right) + O\left(\frac{1}{\alpha}\right). \quad (3.1.22)
\end{aligned}$$

Значения $(b + ia)|_{y=y'}$, $h|_{y=y'}$, $\kappa|_{y=y'}$, $(\beta + i\gamma)|_{y=y'}$ приведены ранее в формулах (3.1.5), (3.1.8). Производные типа $h_{y'}|_{y=y'}$, $\kappa_{y'}|_{y=y'}$ могут быть вычислены по этим данным из уравнений (3.1.4), (3.1.7):

$$\begin{aligned}
h_{y'}|_{y=y'} & = \frac{1}{16} \left\{ \left[\partial_x(u + u_0) + \int_{-\infty}^y dy' \left(\frac{(\partial_x u)^2 - (\partial_y u)^2}{4} + \cos^2 \frac{u}{2} - \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. - \frac{1+c}{2} \right) \right] \sin \frac{u - u_0}{4} - \left[\partial_y u + \int_{-\infty}^y dy' \frac{\partial_x u \partial_y u}{2} \right] \cos \frac{u - u_0}{4} \right\}, \\
\kappa_{y'}|_{y=y'} & = \frac{1}{16} \left\{ \left[\partial_y u - \int_y^{\infty} dy' \frac{\partial_x u \partial_y u}{2} \right] \cos \frac{u - u_1}{4} + \left[-\partial_x(u + u_1) + \right. \right. \\
& \left. \left. + \int_y^{\infty} dy' \left(\frac{(\partial_x u)^2 - (\partial_y u)^2}{4} + \cos^2 \frac{u}{2} - \frac{1+c}{2} \right) \right] \sin \frac{u - u_1}{4} \right\}. \quad (3.1.23)
\end{aligned}$$

Из (3.1.21), (3.1.22), (3.1.15) находим асимптотические разложения диагональных элементов S -матрицы вблизи $\alpha \sim \infty$:

$$S_{11}(\alpha, \tau) = S_{22}(\alpha, \tau) = \exp \frac{i}{4}(u_1 - u_0) \left\{ 1 + \frac{\text{sign Im } \alpha}{2\alpha} \left[\int_{-\infty}^{\infty} dy' \frac{\partial_x u \partial_{y'} u}{2} + \right. \right. \\ \left. \left. + i \left(\partial_x (u_0 - u_1) + \int_{-\infty}^{\infty} dy' \left\{ \frac{(\partial_x u)^2 - (\partial_{y'} u)^2}{4} + \cos^2 \frac{u}{2} - \frac{1+c}{2} \right\} \right) \right] \right\} + O\left(\frac{1}{\alpha^2}\right). \quad (3.1.24)$$

Как следует из (3.1.15), недиагональные элементы S -матрицы выражаются через функции $(\Psi_{\pm}(\alpha, \tau))_{kj}$, аналитические в разных областях поверхности R , в каждой из которых, согласно (3.1.21), (3.1.22), известно асимптотическое поведение этих функций при $\alpha \rightarrow \infty$. Для получения асимптотики при $\alpha \rightarrow \infty$ недиагональных элементов S -матрицы, определенных только на Γ , удобно поступить следующим образом. Рассмотрим уходящий на ∞ участок контура Γ , проходящий по берегам разреза вдоль вещественной оси α -плоскости. Отметим, что функции $(\Psi_{\pm}(\alpha, \tau))_{kj}$ заданы на разных листах римановой поверхности, но непрерывно продолжаются на Γ . Поэтому при вычислении асимптотики коэффициентов $S_{12}(\alpha, \tau)$ и $S_{21}(\alpha, \tau)$ при $\alpha \rightarrow \infty$, можно использовать формулы (3.1.15), (3.1.21), (3.1.22). Выбор $\text{sign Im } \alpha$ следует согласовать с предельным переходом из области аналитичности соответствующих функций на вещественную ось. Мы нашли

$$S_{12}(\alpha, \tau) = o(1/\alpha^2), \quad S_{21}(\alpha, \tau) = o(1/\alpha^2), \quad \alpha \rightarrow \infty. \quad (3.1.25)$$

Асимптотическое поведение рассмотренных функций в окрестности точки $\alpha = 0$ может быть извлечено из полученных разложений вблизи $\alpha \sim \infty$ с помощью редукций (3.1.16). Заметим, что в униформизации (3.1.10), (3.1.11) точке $\alpha \sim \infty$ соответствует $\lambda = iK'$, а $\alpha = 0$, $\lambda = -iK'$.

В классе быстроубывающих потенциалов для рациональных и эллиптических L -операторов полюсы (нули) коэффициента прохождения соответствуют связанным состояниям. В данном случае коэффициенты $S_{ik}(\alpha, \tau)$ имеют дополнительные полюсы в точках, где $\det \Psi_{+}^{(0)}(\alpha, \tau) = 0$. Зависящие от x полюсы (нули) S -матрицы обсуж-

даются в следующем пункте. Здесь мы приведем лишь асимптотическое поведение коэффициентов $S_{ik}(\alpha, \tau)$ в окрестности точек ветвления $\tau = 0$, $\alpha_j = \pm[c \pm (c^2 - 1)^{1/2}]^{1/2}$, $j = 1, 2, 3, 4$. Из (3.1.15) следует, что в ситуации общего положения, когда столбцы χ и $\bar{\psi}$ линейно независимы в точке $\alpha = \alpha_j$, $\tau = 0$ (при этом в силу (3.1.18), будут независимы и столбцы $\bar{\chi}$ и ψ), коэффициенты S_{11} и S_{22} сингулярны и представимы в виде

$$\begin{aligned} S_{11}(\alpha, \tau) \Big|_{\alpha=\alpha_j, \tau=0} &= \frac{a_j}{\tau} + O(1), \\ S_{22}(\alpha, \tau) \Big|_{\alpha=\alpha_j, \tau=0} &= \frac{\tilde{b}_j}{\tau} + O(1). \end{aligned} \quad (3.1.26)$$

Здесь

$$\begin{aligned} a_j &= i \det(\chi(\alpha_j, 0), \bar{\psi}(\alpha_j, 0)) / \left(w_2(\alpha_j) \cos \frac{u_1}{2} - w_1(\alpha_j) \sin \frac{u_1}{2} \right), \\ \tilde{b}_j &= i \det(\psi(\alpha_j, 0), \bar{\chi}(\alpha_j, 0)) / \left(w_2(\alpha_j) \cos \frac{u_1}{2} - w_1(\alpha_j) \sin \frac{u_1}{2} \right). \end{aligned}$$

В специальном случае, когда в некоторых из точек a_j или во всех сразу $\det(\chi(\alpha_j, 0), \bar{\psi}(\alpha_j, 0)) = 0$, функции $S_{11}(\alpha, \tau)$ и $S_{22}(\alpha, \tau)$ не сингулярны в окрестности соответствующей точки ветвления. Для уравнения Шредингера такие дополнительные нули отвечают виртуальным уровням [13].

Коэффициенты S_{12} и S_{21} сингулярны или регулярны в окрестности точек $\alpha = \alpha_j$, $\tau = 0$ одновременно с S_{11} и S_{22} . Действительно, при $\alpha = \alpha_j$, согласно (3.1.13), матрицы $\Psi_{\pm}(\alpha_j, 0)$ вырождены и из (3.1.2) следует, что

$$\bar{\psi}(\alpha_j, 0) = -\psi(\alpha_j, 0), \quad \bar{\chi}(\alpha_j, 0) = -\chi(\alpha_j, 0). \quad (3.1.27)$$

Тогда, используя выражения (3.1.27) и (3.1.15), получаем

$$\begin{aligned} S_{12}(\alpha, \tau) \Big|_{\alpha=\alpha_j, \tau=0} &= -\frac{a_j}{\tau} + O(1), \quad S_{21}(\alpha, \tau) \Big|_{\alpha=\alpha_j, \tau=0} = -\frac{\tilde{b}_j}{\tau} + O(1), \\ \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_j} \frac{S_{12}}{S_{11}} &= \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_j} \frac{S_{21}}{S_{22}} = -1, \quad a_j = -\tilde{b}_j. \end{aligned} \quad (3.1.28)$$

3.1.4. Зависимость матрицы рассеяния от переменной x . Связь функций Иоста с решениями уравнения sine-Gordon

Исследуем зависимость от x решений Иоста и элементов S -матрицы. Продифференцируем по x уравнение (3.7), которому удовлетворяют функции Ψ_{\pm} , и воспользуемся представлением Лакса (3.2) уравнения sine-Gordon (3.1):

$$\begin{aligned}\partial_x \partial_y \Psi_{\pm} &= (\partial_x L) \Psi_{\pm} + L(\partial_x \Psi_{\pm}) = (\partial_y A + AL - LA) \Psi_{\pm} + L \partial_x \Psi_{\pm} = \\ &= L(\partial_x \Psi_{\pm} - A \Psi_{\pm}) + \partial_y (A \Psi_{\pm}).\end{aligned}$$

Откуда

$$(\partial_y - L)[(\partial_x - A) \Psi_{\pm}] = 0. \quad (3.1.29)$$

Поскольку Ψ_{\pm} представляют фундаментальные решения уравнения (3.7), из (3.1.29) заключаем, что

$$(\partial_x - A) \Psi_{\pm} = \Psi_{\pm} B_{\pm}, \quad (3.1.30)$$

где матрицы B_{\pm} не зависят от y (но могут зависеть от x и (α, τ)). Используя это обстоятельство, устремляем $y \rightarrow \pm\infty$ и определяем функции B_{\pm} в явном виде:

$$B_{\pm} = (\Psi_{\pm}^{(0)})^{-1} (\partial_x - A_{\pm}^{(0)}) \Psi_{\pm}^{(0)}, \quad (3.1.31)$$

где

$$A_+^{(0)} = \frac{1}{2} \left(\sigma_1 w_1 \cos \frac{u_1}{2} + i \sigma_2 w_2 \sin \frac{u_1}{2} \right),$$

$$A_-^{(0)} = \frac{1}{2} \left(\sigma_1 w_1 \cos \frac{u_0}{2} + i \sigma_2 w_2 \sin \frac{u_0}{2} \right).$$

Для рассматриваемой задачи имеем

$$B_- = -\frac{1}{4} \frac{w_2 \sin \frac{u_0}{2} + w_1 \cos \frac{u_0}{2}}{w_2 \cos \frac{u_0}{2} - w_1 \sin \frac{u_0}{2}} \text{diag}(-i\tau + \partial_x u_0, i\tau + \partial_x u_0),$$

$$B_+ = -\frac{1}{4} \frac{w_2 \sin \frac{u_1}{2} + w_1 \cos \frac{u_1}{2}}{w_2 \cos \frac{u_1}{2} - w_1 \sin \frac{u_1}{2}} \text{diag}(-i\tau + \partial_x u_1, i\tau + \partial_x u_1). \quad (3.1.32)$$

Тогда уравнение, определяющее зависимость матрицы перехода $S = (\Psi_+(\alpha, \tau))^{-1} \Psi_-(\alpha, \tau)$ от переменной x , получим из (3.1.30):

$$\partial_x S = SB_- - B_+ S. \quad (3.1.33)$$

Линейные уравнения (3.1.33) с помощью тождеств

$$\begin{aligned} w_2^2 \cos^2 \frac{u_s}{2} - w_1^2 \sin^2 \frac{u_s}{2} &= \cos^2 \frac{u_s}{2} - w_1^2 = \left(\frac{i\tau}{2}\right)^2 - \left(\frac{\partial_x u_s}{2}\right)^2, \\ \left(w_2 \sin \frac{u_s}{2} + w_1 \cos \frac{u_s}{2}\right) \left(w_2 \cos \frac{u_s}{2} + w_1 \sin \frac{u_s}{2}\right) &= w_1 w_2 + \frac{\partial_x^2 u_s}{2}, \quad s=0, 1, \end{aligned} \quad (3.1.34)$$

элементарно интегрируются:

$$\begin{aligned} S_{11}(\alpha, \tau) &= \left[\frac{w_2 \cos \frac{u_0}{2} - w_1 \sin \frac{u_0}{2}}{w_2 \cos \frac{u_1}{2} - w_1 \sin \frac{u_1}{2}} \right]^{1/2} \left[\frac{(-i\tau + \partial_x u_1)(i\tau + \partial_x u_0)}{(i\tau + \partial_x u_1)(-i\tau + \partial_x u_0)} \right]^{1/4} \times \\ &\times \exp \left\{ \frac{i w_1 w_2 \tau}{4} \int dx' \left[\left(w_1^2 - \cos^2 \frac{u_1}{2} \right)^{-1} - \left(w_1^2 - \cos^2 \frac{u_0}{2} \right)^{-1} \right] \right\} S_{11}^0(\alpha, \tau), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{12}(\alpha, \tau) &= \left[\frac{w_2 \cos \frac{u_0}{2} - w_1 \sin \frac{u_0}{2}}{w_2 \cos \frac{u_1}{2} - w_1 \sin \frac{u_1}{2}} \right]^{1/2} \left[\frac{(-i\tau + \partial_x u_0)(-i\tau + \partial_x u_1)}{(i\tau + \partial_x u_0)(i\tau + \partial_x u_1)} \right]^{1/4} \times \\ &\times \exp \left\{ \frac{i w_1 w_2 \tau}{4} \int dx' \left[\left(w_1^2 - \cos^2 \frac{u_1}{2} \right)^{-1} + \left(w_1^2 - \cos^2 \frac{u_0}{2} \right)^{-1} \right] \right\} S_{12}^0(\alpha, \tau), \end{aligned}$$

$$S_{21}(\alpha, \tau) = S_{12}(-\alpha, -\tau), \quad S_{22}(\alpha, \tau) = S_{11}(-\alpha, -\tau). \quad (3.1.35)$$

Вследствие (3.1.14) $\det S^0(\alpha, \tau) = 1$. Если матрица $S^0(\alpha, \tau)$ задана (вычислена из уравнения (3.7) по значениям $u(x_0, y)$, $\partial_x u(x_0, y)$, в фиксированной точке $x = x_0$), то, согласно (3.1.35), S -матрица известна для произвольных x . Явный вид интегралов в (3.1.35) зависит от выбора параметра c . Для $c \geq 1$ находим

$$\int \frac{dx'}{w_1^2 - \cos^2 \frac{u_s}{2}} = \int \frac{dx'}{w_1^2 - \operatorname{sn}^2 \frac{x'+s\delta}{k}} = \frac{k}{w_1^2} \Pi \left(\frac{1}{k}(x+s\delta), \frac{1}{w_1^2} \right), \quad s=0, 1. \quad (3.1.36)$$

При $|c| \leq 1$ имеем

$$\int \frac{dx'}{w_1^2 - \cos^2 \frac{u_s}{2}} = \int \frac{dx'}{w_1^2 - k^2 \operatorname{sn}^2(x'+s\delta)} = \frac{1}{w_1^2} \Pi \left(x+s\delta, \frac{k^2}{w_1^2} \right), \quad s=0, 1. \quad (3.1.37)$$

Здесь $\Pi(x, \alpha^2)$ – эллиптический интеграл третьего рода с параметром α^2 [53, 54].

Заметим, что, хотя с первого взгляда формулы (3.1.35) содержат достаточно сложные степенные выражения, все зависящие от (α, τ) множители мероморфны на римановой поверхности R . Это ясно, если представить (3.1.35) через функции Вейерштрасса [54, 55].

В случае $c > 1$ в униформизации (3.1.10) находим

$$S_{11}(\lambda) = \frac{\sigma(\lambda + \chi_0 - 2iK')}{\sigma(\lambda + \chi_0 + \Delta - (1 + \varepsilon)iK')} \gamma(\chi_0) S_{11}^0(\lambda),$$

$$S_{12}(\lambda) = \frac{\sigma(\chi_0 - \lambda)}{\sigma(\chi_0 + \Delta + \lambda - (1 + \varepsilon)iK')} \gamma(\chi_0) \exp\left\{ \chi_0 \left[\zeta(\lambda - iK') + \zeta(\lambda + iK') - \zeta(2iK') \right] \right\} S_{12}^0(\lambda),$$

$$S_{22}(\lambda) = S_{11}(-\lambda + 2iK'), \quad S_{21}(\lambda) = S_{12}(-\lambda + 2iK'), \quad \lambda \in \Gamma,$$

$$\gamma(\chi_0) = \left[\frac{\sigma(\chi_0 + \Delta + iK'(2 - \varepsilon)) \sigma(\chi_0 + \Delta - iK'\varepsilon)}{\sigma(\chi_0 + iK') \sigma(\chi_0 - iK')} \right]^{1/2},$$

$$\varepsilon = \pm 1, \quad \chi_0 = x/k, \quad \Delta = \delta/k. \quad (3.1.38)$$

В (3.1.38) периоды ζ - и σ -функций Вейерштрасса суть $2K(k)$, $4iK(k')$ ($S(\lambda + 2K) = S(\lambda + 4iK') = S(\lambda)$), а свойства матричной функции $S^0(\lambda)$ определяют нормировка (3.1.24) и редукции (3.1.19). Учитывая

$$\begin{aligned} \det S &= \frac{w_2 \cos \frac{u_0}{2} - w_1 \sin \frac{u_0}{2}}{w_2 \cos \frac{u_1}{2} - w_1 \sin \frac{u_1}{2}} = \\ &= \frac{\sigma(\lambda - \chi_0) \sigma(\lambda + \chi_0 - 2iK')}{\sigma(\lambda - \chi_0 - \Delta - iK'(1 - \varepsilon)) \sigma(\lambda + \chi_0 + \Delta - iK'(1 + \varepsilon))} \times \\ &\quad \times \gamma^2(\chi_0) \exp\{-\zeta(2iK')[\Delta + iK'(1 - \varepsilon)]\}, \end{aligned} \quad (3.1.39)$$

находим из выражений (3.1.38), (3.1.14), что $\det S^0(\lambda) = \exp[-\zeta(2iK')(\Delta + iK'(1 - \varepsilon))]$, $\varepsilon = \pm 1$. При $|c| < 1$ внешний вид формул (3.1.38), (3.1.39) не изменяется, но периоды функций Вейерштрасса теперь $4K$, $2K + 2iK'$, $\chi_0 = x$, $\Delta = \delta$. Из уравнения (3.1.39) при $\alpha \rightarrow \infty$ ($\lambda = iK'$) получаем полезное соотношение

$$\begin{aligned} \exp \frac{i}{2}(u_1 - u_0) &= \\ &= \frac{\sigma(\chi_0 - iK') \sigma(\chi_0 + \Delta + iK'(2 - \varepsilon))}{\sigma(\chi_0 + iK') \sigma(\chi_0 + \Delta - i\varepsilon K')} \exp\{-\zeta(2iK')[\Delta + iK'(1 - \varepsilon)]\}. \end{aligned} \quad (3.1.40)$$

Формулы (3.1.38) решают вопрос о зависящих от переменной x нулях (полюсах) коэффициентов S_{11} и S_{22} . Функция $S_{11}(\lambda)$ обращается в нуль в точке $\lambda = -\chi_0 + 2iK'$ и в точках конгруэнтных ей по модулю периодов, т. е. при $(\alpha_0, \tau_0) = \left(\pm \exp \frac{i u_0}{2}, i \partial_x u_0 \right)$. Аналогичным образом $S_{22}(\tilde{\alpha}_0, \tilde{\tau}_0) = 0$ при $(\tilde{\alpha}_0, \tilde{\tau}_0) = \left(\pm \exp \frac{i u_0}{2}, -i \partial_x u_0 \right)$. Обсудим поведение функций Иоста в указанных точках. Пусть вначале $\partial_x u_0 < 0$, т. е. $(\tilde{\alpha}_0, \tilde{\tau}_0) \in D_2$. Нетрудно проверить, что в этой точке вектор-функ-

ция $(\Psi_-^{(0)}(\tilde{\alpha}_0, \tilde{\tau}_0))_{k2} = 0$. Тогда в силу единственности решения системы (3.7) справедливо тождество

$$\bar{\chi}\left(\alpha = \pm \exp \frac{i u_0}{2}, \tau = -i \partial_x u_0\right) \equiv 0, \quad \partial_x u_0 < 0, \quad (3.1.41)$$

для любых значений y и интегральное представление (3.1.2) дает замечательные соотношения, которые выражают решения $u(x, y)$ нелинейного уравнения (3.1) и производные $\partial_x u(x, y)$ через операторы преобразования:

$$\begin{aligned} \sin \frac{u - u_0}{4} &= \int_{-\infty}^y dy' \left(a(y, y') \cos \frac{u_0}{2} + b(y, y') \sin \frac{u_0}{2} \right) \exp \left[\frac{\partial_x u_0}{4} (y - y') \right], \\ -\frac{\partial_x u_0}{2} \cos \frac{u - u_0}{2} &= v + \int_{-\infty}^y dy' \left(f(y, y') + \frac{h(y, y')}{2} \sin u_0 \right) \exp \left[\frac{\partial_0 u_0}{4} (y - y') \right], \\ &\partial_x u_0 < 0. \end{aligned} \quad (3.1.42)$$

Столь же полезные соотношения получаются при рассмотрении функции $\Psi_+(\alpha, \tau)$ в точках, связанных с полюсами коэффициентов S_{11} и S_{22} . При $\partial_x u_1 > 0$ имеем

$$\begin{aligned} \psi\left(\alpha = \pm \exp \frac{i u_1}{2}, \tau = i \partial_x u_1\right) &\equiv 0, \quad \bar{\psi}\left(\alpha = \pm \exp \frac{i u_1}{2}, \tau = -i \partial_x u_1\right) \equiv 0, \\ &\partial_x u_1 > 0, \end{aligned} \quad (3.1.43)$$

и формулы для вычисления $u(x, y)$ и $\partial_x u(x, y)$:

$$\begin{aligned} \sin \frac{u - u_1}{4} &= \int_y^{\infty} dy' \left(\gamma(y, y') \cos \frac{u_1}{2} + \beta(y, y') \sin \frac{u_1}{2} \right) \exp \left[-\frac{\partial_x u_1}{4} (y' - y) \right], \\ -\frac{\partial_x u_1}{2} \cos \frac{u - u_1}{4} &= v + \int_y^{\infty} dy' \left(\varphi(y, y') + \frac{\kappa(y, y')}{2} \sin u_1 \right) \exp \left[-\frac{\partial_x u_1}{4} (y' - y) \right], \\ &\partial_x u_1 > 0. \end{aligned} \quad (3.1.44)$$

3.2. ДИСКРЕТНЫЙ СПЕКТР. КЛАССИФИКАЦИЯ СОЛИТОНОПОДОБНЫХ ДЕФЕКТОВ

Математика преследует тройкую цель. Она должна давать орудие для изучения природы. Но это не все: она преследует цель философскую и – я решаюсь сказать – эстетическую.

А. Пуанкаре. Ценность науки

Функция $S_{11}(\alpha, \tau)$ кроме нулей, зависящих от x , в области своей аналитичности D_1 может иметь нули, не зависящие от переменных x и y . Такие нули в силу редукций (3.1.16), (3.1.17) распадаются на две группы (в дальнейшем считаем все нули простыми):

$$(\alpha, \tau) = (\pm \exp i\varphi_k, \tau_k), \quad \tau_k = -2i \left(\frac{1+c}{2} - \cos^2 \varphi_k \right)^{1/2},$$

$$\cos^2 \varphi_k < \frac{1+c}{2}, \quad \varphi_k^* = \varphi_k, \quad k = 1, 2, \dots, M; \quad (3.2.1a)$$

$$(\alpha, \tau) = (\pm v_k, \tau_k), \quad (\pm v_k^{*-1}, -\tau_k^*) \in D_1, \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (3.2.1b)$$

Каждый из нулей (3.2.1a) остается неподвижным при редукции (3.1.16), в то время как нули (3.2.1b) переходят друг в друга. При $c > 1$ в фундаментальном прямоугольнике на λ -плоскости эти же нули расположены в точках

$$\lambda = -v_s + 2iK', \quad -v_s - 2K + 2iK', \quad v_s = v_s^*, \quad s = 1, 2, \dots, M; \quad (3.2.2a)$$

$$\lambda = -\mu_s + 2iK', \quad -\mu_s - 2K + 2iK', \quad -\mu_s^* + 2iK', \quad -\mu_s^* - 2K + 2iK', \\ s = 1, 2, \dots, N, \quad \text{mod}(4K, 4iK'). \quad (3.2.2b)$$

Для $|c| < 1$ находим

$$\lambda = -v_s + 2iK', \quad -v_s - 2K, \quad v_s = v_s^*, \quad s = 1, 2, \dots, M; \quad (3.2.3a)$$

$$\lambda = -\mu_s + 2iK', \quad -\mu_s - 2K, \quad -\mu_s^* + 2iK', \quad -\mu_s^* - 2K, \\ s = 1, 2, \dots, N, \quad \text{mod}(4K, 4iK'). \quad (3.2.3b)$$

Нули функции $S_{22}(\alpha, \tau)$, согласно последней из формул (3.1.19), имеют вид

$$(\alpha, \tau) = (\pm \exp i \varphi_k, -\tau_k), \quad \tau_k = -2i \left(\frac{1+c}{2} - \cos^2 \varphi_k \right)^{1/2},$$

$$\cos^2 \varphi_k < \frac{1+c}{2}, \quad \varphi_k^* = \varphi_k, \quad k = 1, 2, \dots, M; \quad (3.2.4a)$$

$$(\alpha, \tau) = (\pm v_k, -\tau_k), \quad (\pm v_k^{*-1}, \tau_k^*) \in D_1, \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (3.2.4b)$$

На λ -плоскости при $c > 1$ имеем

$$\lambda = v_s, \quad v_s + 2K, \quad v_s = v_s^*, \quad s = 1, 2, \dots, M; \quad (3.2.5a)$$

$$\lambda = \mu_s, \quad \mu_s + 2K, \quad \mu_s^*, \quad \mu_s^* + 2K, \quad s = 1, 2, \dots, N, \quad \text{mod}(4K, 4iK'). \quad (3.2.5b)$$

Для $|c| < 1$ находим

$$\lambda = v_s, \quad v_s + 2K + 2iK', \quad v_s = v_s^*, \quad s = 1, 2, \dots, M; \quad (3.2.6a)$$

$$\lambda = \mu_s, \quad \mu_s + 2K + 2iK', \quad \mu_s^*, \quad \mu_s^* + 2K + 2iK', \\ s = 1, 2, \dots, N, \quad \text{mod}(4K, 4iK'). \quad (3.2.6b)$$

Если $(\alpha_j, \tau_j) \in D_1$ – нуль коэффициента $S_{11}(\alpha, \tau)$, тогда из (3.1.15) получаем, что столбцы χ и $\bar{\psi}$ пропорциональны

$$\chi(\alpha_j, \tau_j) = \delta_j \bar{\psi}(\alpha_j, \tau_j). \quad (3.2.7)$$

Для зависящего от x нуля $(\alpha_0, \tau_0) = (\pm \exp i u_0/2, i \partial_x u_0) \in D_1$ функция $\chi(\alpha_0, \tau_0) \equiv 0$ (3.1.41) так, что $\delta_0 = 0$. В остальных нулях, как следует из интегральных представлений (3.1.2), формула (3.2.7) определяет столбец-решение уравнения (3.7), экспоненциально убывающий при $|y| \rightarrow \infty$. Такие нули соответствуют дискретному спектру системы (3.7). Инволюции (3.1.16), (3.1.17) допускают следующие наборы чисел δ_j :

$$\chi(\pm \exp i \varphi_k, \tau_k) = \delta_k \bar{\psi}(\pm \exp i \varphi_k, \tau_k), \quad \delta_k^* = \delta_k, \quad k = 1, 2, \dots, M; \quad (3.2.8a)$$

$$\chi(\pm v_k, \tau_k) = \delta_k \bar{\psi}(\pm v_k, \tau_k), \quad \chi(\pm v_k^{*-1}, -\tau_k^*) = \delta_k^* \bar{\psi}(\pm v_k^{*-1}, -\tau_k^*), \\ k = 1, 2, \dots, N. \quad (3.2.8b)$$

Заметим, что точки $(-\alpha_j, -\tau_j) \in D_2$ также отвечают дискретному спектру, согласно формулам (3.1.19), (3.1.15), получаем

$$S_{22}(-\alpha_j, -\tau_j) = 0, \quad \bar{\chi}(-\alpha_j, -\tau_j) = b_j \psi(-\alpha_j, -\tau_j). \quad (3.2.9)$$

В силу инволюции (3.1.18), $b_j = \delta_j$. В точке $(\tilde{\alpha}_0, \tilde{\tau}_0) = \left(\pm \exp \frac{i u_0}{2}, -i \partial_x u_0 \right) \in D_2$, согласно тождеству (3.1.41), мы имеем $b_0 = 0$.

Зависимость коэффициентов δ_j от x определяется уравнениями

$$\partial_x \delta_j = \delta_j \left[\left(B_- (\alpha_j, \tau_j) \right)_{11} - \left(B_+ (\alpha_j, \tau_j) \right)_{22} \right], \quad (\alpha_j, \tau_j) \in D_1, \quad (3.2.10)$$

так, что явный вид δ_j сразу следует из формул (3.1.33), (3.1.35).

Решениям солитонного типа уравнения (3.1) соответствует мероморфная на римановой поверхности диагональная матрица перехода

$$S^{\text{sol}}(\alpha, \tau) = \text{diag} \left(S_{11}^{\text{sol}}(\alpha, \tau), S_{22}^{\text{sol}}(\alpha, \tau) \right). \quad (3.2.11)$$

Покажем, что в солитонном секторе редукции условие периодичности S -матрицы и нормировка (3.1.24) определяют вид функций $S_{ii}^{\text{sol}}(\alpha, \tau)$ ($i=1, 2$) и приводят, в частности, к дальнейшим ограничениям на нули (3.2.1) – (3.2.6), необходимым для выполнения асимптотик (3.3) при $|y| \rightarrow \infty$.

Прежде всего из выражения (3.1.14) заключаем, что не зависящие от переменной x нули функции $S_{22}^{\text{sol}}(\lambda)(S_{11}^{\text{sol}}(\lambda))$ являются одновременно полюсами для $S_{11}^{\text{sol}}(\lambda)(S_{22}^{\text{sol}}(\lambda))$ и, следовательно, наиболее общее выражение для $S_{11}^{\text{sol}}(\lambda)$, согласующееся с (3.2.2) – (3.2.6), есть

$$S_{11}^{\text{sol}}(\lambda) = \frac{\sigma(\lambda + \chi_0 - 2iK')}{\sigma(\lambda + \chi_0 + \Delta - (1 + \varepsilon)iK')} \gamma(\chi_0) \exp\{-e\lambda + d\} \times \\ \times \prod_{s=1}^M \frac{\sigma(-\lambda - v_s + 2iK')}{\sigma(\lambda - v_s)} \prod_{p=1}^N \frac{\sigma(\lambda + \mu_p - 2iK') \sigma(\lambda + \mu_p^* + 2iK')}{\sigma(\lambda - \mu_p) \sigma(\lambda - \mu_p^*)}. \quad (3.2.12)$$

Здесь e и d пока произвольные комплексные числа. Заметим, что, хотя внешний вид формулы (3.2.12) остается неизменным на всем интервале допустимых значений постоянной c ($c > -1$), в случае

$c > 1$ периоды функций Вейерштрасса суть $2\omega_1 \equiv 2K$, $2\omega_3 \equiv 4iK'$, при $|c| < 1$ имеем $2\omega_1 \equiv 4K$, $2\omega_3 \equiv 2K + 2iK'$.

Поскольку σ -функции Вейерштрасса квазипериодичны [54, 55]:

$$\sigma(\lambda + 2\omega_\alpha) = -\sigma(\lambda) \exp\{2\zeta(\omega_\alpha)(\lambda + \omega_\alpha)\}, \quad \alpha = 1, 3,$$

требование периодичности S -матрицы ($S_{11}(\lambda + 2\omega_\alpha) = S_{11}(\lambda)$ (см. (3.1.19)) предполагает выполнение условий

$$\zeta(\omega_\alpha) \left[\tilde{A} - 2iK'B \right] - \omega_\alpha e = -\pi i m_\alpha, \quad \alpha = 1, 3, \quad (3.2.13)$$

где m_α – целые числа,

$$\tilde{A} = -\Delta + 2 \sum_{s=1}^M v_s + 4 \operatorname{Re} \sum_{p=1}^N \mu_p, \quad B = M + \frac{1-\varepsilon}{2}.$$

Используя тождество Лежандра: $\omega_3 \zeta(\omega_1) - \omega_1 \zeta(\omega_3) = \pi i/2$ из (3.2.13) получаем

$$e = 2\zeta(\omega_1)m_3 - 2\zeta(\omega_3)m_1, \quad 2iK'B - \tilde{A} = 2\omega_3 m_1 - 2\omega_1 m_3. \quad (3.2.14)$$

Преобразовав функции Вейерштрасса по формуле

$$\sigma(\lambda + 2iK') = -\sigma(\lambda - 2iK') \exp\{2\zeta(2iK')\lambda\},$$

можно показать, что условие вещественности $S_{11}^*(\lambda^*) = S_{11}(\lambda)$ дает

$$\zeta(2iK')(-\Delta + \sum_{s=1}^M v_s) + \frac{\pi i}{2} M - \operatorname{Im} d = -\pi i n, \quad (3.2.15)$$

где n – целое.

Наконец, нормировка $S_{11}(iK') = \exp \frac{i}{4}(u_1 - u_0)$ (см. (3.1.24)) с учетом разложения $\exp \frac{i}{4}(u_1 - u_0)$ по σ -функциям Вейерштрасса (3.1.40) приводит к соотношению

$$\begin{aligned} & \frac{\zeta(2iK')}{2} (\Delta + iK'(1-\varepsilon)) + 2\zeta(2iK')iK'N + \\ & + 2\zeta(2iK') \sum_{p=1}^N \mu_p^* + \pi i N - iK'e + d = 2\pi i s, \end{aligned} \quad (3.2.16)$$

где s – целое.

Для дальнейшего анализа требуется отделить действительную и мнимую часть комплексных выражений (3.2.14) – (3.2.16). В случае $c > 1$ эта выкладка не представляет затруднений, при $|c| < 1$ достигается с помощью формул

$$\zeta^*(\omega_3) = -\zeta(\omega_3) + \zeta(\omega_1), \quad \zeta^*(\omega_2) = \zeta(\omega_3) - 2\zeta(\omega_1),$$

$$\omega_2 = -\omega_1 - \omega_3, \quad \zeta(\omega_1) + \zeta(\omega_2) + \zeta(\omega_3) = 0, \quad \zeta(2iK') = 2\zeta(\omega_3) - \zeta(\omega_1).$$

Приведем результаты анализа соотношений (3.2.14) – (3.2.16) для $c > 1$. В этом случае

$$M + \frac{1-\varepsilon}{2} = \text{четное число.} \quad (3.2.17)$$

Иными словами, если асимптотические значения $u_0(x)$ и $u_1(x)$ не различаются знаком ($\varepsilon = +1$), а только сдвигом δ по аргументу x , число M нулей типа (3.2.1а) должно быть четным. Когда u_0 и u_1 различаются сдвигом и знаком ($\varepsilon = -1$), M – нечетное число. Нули располагаются не в произвольных точках римановой поверхности, а так, чтобы выполнялось соотношение

$$-\Delta + 2 \sum_{s=1}^M v_s + 4 \sum_{p=1}^N \operatorname{Re} \mu_p = 2m_3 K, \quad (3.2.18)$$

причем m_3 – целое число, такое, что

$$M - m_3 = \text{четное число.} \quad (3.2.19)$$

Другими словами, для заданного M явный вид нулей существенно определяется величиной $\Delta = \delta/k$. Например, в случае $M = 1$ ($\varepsilon = -1$), $N = 0$ число m_3 должно быть нечетным, так, что нуль v_1 и сдвиг Δ связаны условием

$$2v_1 - \Delta = 2K \pmod{4K}. \quad (3.2.20)$$

В общем случае соотношения (3.2.17) – (3.2.19) накладывают ограничения на четность M и численные значения нулей S -матрицы. Тогда выражение (3.2.14) и формула

$$d = -i\zeta(2iK') \left[K'(2N + M + 1 - \varepsilon) + 2 \sum_{p=1}^N \operatorname{Im} \mu_p^* \right] + \frac{\pi i}{2} (m_3 - 2N) + \zeta(2iK') (-\Delta + \sum_{s=1}^M v_s), \quad (3.2.21)$$

которая следует из (3.2.16), полностью определяют вид $S_{11}(\lambda)$, а значит, и S -матрицу в солитонном секторе ($S_{22}(\lambda) = S_{11}(-\lambda + 2iK')$).

В случае $|c| < 1$ требование самосогласованности выражений (3.2.15), (3.2.16) для $\text{Im}d$ приводит к утверждению, что $(1 - \varepsilon)/2$ — четное число, т. е. уравнение (3.1) не имеет солитонных решений с асимптотическим значением $u_1(x) = -u_0(x + \delta)$. При $\varepsilon = 1$ сдвиг $\delta = \Delta$ у функции $u_1(x) = -u_0(x + \delta)$ и нули функции $S_{11}(\lambda)$ связаны условием

$$\left[-\Delta + 2 \sum_{s=1}^M v_s + 4 \sum_{p=1}^N \text{Re} \mu_p \right] + 2KM = 4Km_3. \quad (3.2.22)$$

Постоянная d имеет вид

$$d = -i\zeta(2iK') \left[K'(2N + M) + 2 \sum_{p=1}^N \text{Im} \mu_p^* \right] + \frac{\pi i}{2} (2m_3 - M - 2N) + \zeta(2iK') \left(-\Delta + \sum_{s=1}^M v_s \right). \quad (3.2.23)$$

3.3. ДИСПЕРСИОННЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Когда вы убедитесь, что теорема верна, вы начинаете ее доказывать.

Д. Поппа

В общем случае из S -матрицы выделим ее солитонную часть:

$$S_{11}(\alpha, \tau) = S_{11}^{\text{sol}}(\alpha, \tau) S_{11}^c(\alpha, \tau), \quad S_{22}(\alpha, \tau) = S_{22}^{\text{sol}}(\alpha, \tau) S_{22}^c(\alpha, \tau). \quad (3.3.1)$$

Заметим, что произведение $S_{11}^c(\alpha, \tau) S_{22}^c(\alpha, \tau)$ на контуре Γ , как следует из формул (3.1.14), (3.1.39), можно выразить через величину $S_{12}(\alpha, \tau) S_{22}^{-1}(\alpha, \tau)$:

$$S_{11}^c(\alpha, \tau) S_{22}^c(\alpha, \tau) = \left[1 - \frac{S_{12}(\alpha, \tau) S_{12}(-\alpha, -\tau)}{S_{22}(\alpha, \tau) S_{22}(-\alpha, -\tau)} \right]^{-1}, \quad (\alpha, \tau) \in \Gamma. \quad (3.3.2)$$

Получим дисперсионные соотношения, определяющие по значениям величины $S_{11}^c(\alpha, \tau)S_{22}^c(\alpha, \tau)$ на контуре Γ функции $\ln S_{11}^c(\alpha, \tau)$ и $\ln S_{22}^c(\alpha, \tau)$, аналитические в областях D_1 и D_2 соответственно. Тем самым в силу (3.3.2), покажем, что информацию о непрерывном спектре S -матрицы содержит коэффициент отражения $S_{12}(\alpha, \tau)/S_{22}(\alpha, \tau)$.

Трудности с выводом дисперсионных соотношений обычно связаны с выбором аналога ядра Коши на торе. Однако, как показано в [38], коэффициенты L - A -пары и спектральные функции в треугольных представлениях решений Иоста можно эффективно использовать в качестве ядер Коши. Тогда дисперсионные соотношения могут быть получены применением теоремы Коши к областям аналитичности функций Иоста.

Рассмотрим сначала случай $c > 1$. Тогда из спектральных функций w_1, w_2, τ и их произведений периоды, совпадающие с периодами S -матрицы, и простые полюсы имеет только $\tau \sim \text{dn}\lambda$. Используя разложение функции $\text{dn}\lambda$ по ζ -функциям с периодами $4K$ и $4iK'$:

$$\text{dn}\lambda = i \left[-\zeta(\lambda - iK') + \zeta(\lambda + iK') - \zeta(\lambda - iK' - 2K) + \zeta(\lambda + iK' - 2K) - 2\zeta(2iK') \right] \quad (3.3.3)$$

и теорему Коши в λ -плоскости, нетрудно убедиться, что

$$-i \ln S_{22}^c(\lambda + iK') = \frac{1}{4\pi i} \int_{\Gamma} d\lambda' \ln S_{22}^c(\lambda') \text{dn}(\lambda' - \lambda), \quad \lambda + iK' \in D_2. \quad (3.3.4)$$

В пределе $\lambda = v - i\varepsilon$, $\varepsilon \rightarrow +0$ ($v^* = v$) из выражения (3.3.4) находим

$$-\frac{i}{2} \ln S_{22}^c(v + iK') = \frac{1}{4\pi i} \text{v.p.} \int_{\Gamma} d\lambda' \ln S_{22}^c(\lambda') \text{dn}(\lambda' - v). \quad (3.3.5)$$

Интеграл в правой части (3.3.5) понимается в смысле главного значения. Аналогично можно показать, что

$$\frac{i}{2} \ln S_{11}^c(v + iK') = \frac{1}{4\pi i} \text{v.p.} \int_{\Gamma} d\lambda' \ln S_{11}^c(\lambda') \text{dn}(\lambda' - v). \quad (3.3.6)$$

Применение теоремы Коши в последнем случае правомерно, поскольку вследствие периодичности подынтегральных функций ин-

теграл по контуру Γ эквивалентен интегралу по контуру $\tilde{\Gamma}$, охватывающему область D_1 и ориентированному так, что при обходе по $\tilde{\Gamma}$ область D_1 остается справа.

В результате сложения выражений (3.3.5), (3.3.6) и $\frac{1}{2} \ln S_{11}^c(v + iK') S_{22}^c(v + iK')$ находим

$$S_{11}^c(v + iK')^2 = \exp \left\{ -\frac{1}{2\pi} \text{v.p.} \int_{\Gamma} d\lambda' \ln \left[S_{11}^c(\lambda') S_{22}^c(\lambda') \right] \text{dn}(\lambda' - v) + \ln \left[S_{11}^c(v + iK') S_{22}^c(v + iK') \right] \right\}. \quad (3.3.7)$$

Из формул Сохоцкого – Племяля заключаем

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2\pi} \text{v.p.} \int_{\Gamma} d\lambda' \ln \left[S_{11}^c(\lambda') S_{22}^c(\lambda') \right] \text{dn}(\lambda' - v) + \\ & + \ln \left[S_{11}^c(v + iK') S_{22}^c(v + iK') \right] = \\ & = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} d\lambda' \ln \left[S_{11}^c(\lambda') S_{22}^c(\lambda') \right] \text{dn}(\lambda' - v - i\varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow +0, \quad (3.3.8) \end{aligned}$$

что и позволяет аналитически продолжить (3.3.7) с контура Γ в область D_1 :

$$S_{11}^c(\lambda + iK') = \exp \left\{ -\frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} d\lambda' \ln \left[S_{11}^c(\lambda') S_{22}^c(\lambda') \right] \text{dn}(\lambda' - \lambda) \right\}, \quad \lambda + iK' \in D_1. \quad (3.3.9)$$

Подобным образом мы нашли

$$S_{22}^c(\lambda + iK') = \exp \left\{ \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} d\lambda' \ln \left[S_{11}^c(\lambda') S_{22}^c(\lambda') \right] \text{dn}(\lambda' - \lambda) \right\}, \quad \lambda + iK' \in D_2. \quad (3.3.10)$$

Соотношения (3.3.9), (3.3.10) определяют функции $S_{11}^c(\lambda)$ и $S_{22}^c(\lambda)$ по заданным на контуре Γ значениям величины $S_{11}^c(\lambda)$, $S_{22}^c(\lambda)$, которая, согласно (3.3.2), выражается только через коэффициент отражения.

Когда $|c| < 1$ схема вывода дисперсионных соотношений остается прежней, но вместо функции $\operatorname{dn}\lambda$ используется $k \operatorname{sn}\lambda$:

$$k \operatorname{sn} \lambda = i[-\zeta(\lambda - iK') + \zeta(\lambda + iK') + \zeta(\lambda - iK' - 2K) - \zeta(\lambda + iK' - 2K)]. \quad (3.3.11)$$

В разложении (3.3.11) периоды ζ -функций суть $4K$, $4iK'$. Окончательные формулы для S_{ii}^c ($i = 1, 2$) в случае $|c| < 1$ получаются из выражений (3.3.9), (3.3.10) заменой $\operatorname{dn}(\lambda' - \lambda) \rightarrow k \operatorname{sn}(\lambda' - \lambda)$.

Из асимптотики (3.1.24) следует, что должно выполняться соотношение

$$\exp \frac{i}{4}(u_1 - u_0) = S_{22}^{\text{sol}}(\lambda = iK') S_{22}^c(\lambda = iK'). \quad (3.3.11)$$

Таким образом в отличие от прямой задачи рассеяния с убывающими потенциалами в задаче рассеяния с асимптотически граничными условиями (3.3), (3.1.1) от вида асимптотик зависят как данные дискретного спектра (см. (3.2.18), (3.2.22)), так и «нормировка» коэффициента рассеяния в особых точках ($\alpha = 0, \infty$) спектральной задачи.

В этом пункте найдены дисперсионные соотношения для данных рассеяния в двумерной задаче с пространственно неоднородным основным состоянием. Используя дисперсионные соотношения и технику, изложенную в [38], нетрудно построить бесконечную серию законов сохранения для данной задачи.

3.4. ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА РАССЕЯНИЯ

Слово «наглядный» определено нечетко. Оно означает в сущности лишь нечто нам привычное и доступное без глубоких размышлений... Разобраться в ней [физике] может помочь только математический формализм. Кто его не понимает, тот должен оставить физику в покое. Природе нет дела до наших математических способностей, она является гораздо лучшим математиком, чем мы, и сообразует свои законы не с простейшими, а с самыми высшими и наиболее действенными математическими методами.

*А. Зоммерфельд. Философия и физика
после 1900 г.*

Мы показали, что если функция $u(x, y)$ является решением эллиптического уравнения sine-Gordon (3.1), (3.3), то S -матрица и решения Иоста вспомогательной линейной системы (3.7) обладают вполне определенными аналитическими свойствами, причем $u(x, y)$ выражается в формулах (3.1.42), (3.1.44) через ядра $\gamma, \beta(a, b)$ интегрального представления (3.1.2). Применим полученные результаты для построения точных решений эллиптического уравнения sine-Gordon с заданными асимптотиками (3.3) при $|y| \rightarrow \infty$. А именно, решим обратную задачу. Пусть перечисленные свойства аналитичности для решений Иоста и S -матрицы выполняются. По этим данным требуется восстановить явный вид функций $\gamma, \beta(a, b)$, через которые в силу (3.1.42), (3.1.44) выражаются интересующие нас решения уравнения sine-Gordon (3.1).

Покажем, что построение функций $\gamma, \beta(a, b)$ сводится к решению системы линейных интегральных уравнений типа Гельфанда – Левитана – Марченко. Мы воспользуемся процедурой, предложенной в [46–50], и применим преобразование Фурье на торе.

Рассмотрим соотношение

$$\left(-\frac{2}{\alpha\tau}\right)g(\alpha)\exp\frac{i\tau}{4}(y''-y) \left[\frac{-\chi_1(\alpha, \tau)\exp\frac{i\tau y}{4}}{S_{22}(\alpha, \tau)} - w_1(\alpha)\sin\frac{u+u_1}{4} + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + w_2(\alpha) \cos \frac{u+u_1}{4} \Big] = \left(-\frac{2}{\alpha\tau} \right) g(\alpha) \int_y^\infty \left(-\gamma(y, y') w_1(\alpha) - \beta(y, y') w_2(\alpha) \right) \times \\
& \times \exp \frac{i\tau}{4} (y'' - y') dy' + \left(-\frac{2}{\alpha\tau} \right) g(\alpha) \frac{S_{12}(\alpha, \tau)}{S_{22}(\alpha, \tau)} \left[\left(-w_1(\alpha) \sin \frac{u+u_1}{4} + \right. \right. \\
& \left. \left. + w_2(\alpha) \cos \frac{u+u_1}{4} \right) \right] \exp \frac{i\tau}{4} (y + y'') + \int_y^\infty \left(\gamma(y, y') w_1(\alpha) + \beta(y, y') w_2(\alpha) \right) \times \\
& \times \exp \frac{i\tau}{4} (y'' + y') dy', \quad y'' > y', \tag{3.4.1}
\end{aligned}$$

вытекающее из формул связи (3.1.12) для решений Иоста ($\bar{\chi}_1 = \psi_1 S_{12} + \bar{\psi}_2 S_{22}$) и представления (3.1.2). Необходимость в общем множителе $-\frac{2}{\alpha\tau} g(\alpha)$, где $g(\alpha) = w_1(\alpha)$ или $g(\alpha) = w_2(\alpha)$, станет понятной из дальнейшего. Проинтегрируем равенство (3.4.1) по контуру Γ . Рассмотрим сначала левую часть (3.4.1). Заметим, что функция $\bar{\chi}_1$ является аналитической в D_2 , коэффициент $S_{22}(\alpha, \tau)$ аналитичен в D_2 за исключением определенного множества точек. Во-первых, это две точки ($\alpha = 0, \tau = \infty$) и ($\alpha = \infty, \tau = 0$), связанные редукцией (3.1.19). Используя асимптотики (3.1.22), (3.1.24), нетрудно показать, что квадратная скобка в левой части выражения (3.4.1) имеет порядок $O(1/\alpha)$ при $\alpha \rightarrow \infty$. Во-вторых, это точки типа ($\alpha_j, \tau = 0$), вблизи которых в силу (3.1.26) левая часть (3.4.1) не имеет особенностей. Наконец, это нули и полюсы функций $S_{22}(\alpha, \tau)$ (3.2.1). Анализ особых точек показывает, что интеграл по контуру Γ от левой части уравнения (3.4.1) может быть вычислен с помощью леммы Жордана. Существенно, что вследствие (3.1.41) вклад в интеграл дают лишь не зависящие от x нули $S_{22}(\alpha, \tau)$.

При интегрировании правой части (3.4.1) по контуру Γ оказываются полезными формулы

$$\int_{\Gamma} \exp \frac{i\tau y}{4} f(\tau) \left(-\frac{2}{\alpha\tau} \right) d\alpha = 0; \tag{3.4.2}$$

$$\int_{\Gamma} \exp \frac{i\tau y}{4} w_1(\alpha) \left(-\frac{2}{\alpha\tau} \right) d\alpha = 0; \tag{3.4.3}$$

$$\int_{\Gamma} \exp \frac{i\tau y}{4} w_2(\alpha) \left(-\frac{2}{\alpha\tau} \right) d\alpha = 0; \quad (3.4.4)$$

$$\int_{\Gamma} \exp \frac{i\tau y}{4} w_1(\alpha) w_2(\alpha) \left(-\frac{2}{\alpha\tau} \right) d\alpha = 16\pi i \delta(y). \quad (3.4.5)$$

Здесь $f(\tau)$ – произвольная функция от τ . Справедливость (3.4.2) – (3.4.4) вытекает из трансформационных свойств функций w_1 , w_2 , τ на контуре Γ . Выполнение соотношения (3.4.5) с точностью до множителя сводится к известному представлению дельта-функции Дирака: $\delta(x) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \exp ikx$.

Заметим, что все интегралы от правой части (3.4.1) хорошо определены, так как, согласно (3.1.21), (3.1.25), (3.1.26) и (3.1.28), при $\alpha \rightarrow \infty$ ($\alpha \rightarrow 0$) имеем $S_{12}/S_{22} = o(1/\alpha^2)$ ($S_{12}/S_{22} = o(\alpha^2)$) и отношение S_{12}/S_{22} не сингулярно в точках $(\alpha_j, \tau = 0)$.

Результат интегрирования (3.4.1) по контуру Γ дает замкнутую систему интегральных уравнений для определения функции $\gamma(y, y')$ и $\beta(y, y')$:

$$8\gamma(y, y'') - \sin \frac{u+u_1}{4} F_{1,1}(y+y'') + \cos \frac{u+u_1}{4} F_{0,2}(y+y'') + \int_y^{\infty} [\gamma(y, y') \times \\ \times F_{1,1}(y'+y'') + \beta(y, y') F_{0,2}(y'+y'')] dy' = 0, \quad (3.4.6)$$

$$8\beta(y, y'') - \sin \frac{u+u_1}{4} F_{2,0}(y+y'') + \cos \frac{u+u_1}{4} F_{1,1}(y+y'') + \int_y^{\infty} [\gamma(y, y') \times \\ \times F_{2,0}(y'+y'') + \beta(y, y') F_{1,1}(y'+y'')] dy' = 0.$$

Здесь $F_{s,j}(y)$ ($s, j = 0, 1, 2$) предполагаются известными и выражаются через набор данных рассеяния $\{\rho(\alpha, \tau) = S_{12}(\alpha, \tau)/S_{22}(\alpha, \tau), (\alpha, \tau) \in \Gamma, \gamma_n = -2b_n [\alpha\tau \partial_{\alpha} S_{22}(\alpha, \tau)]^{-1} \Big|_{(\alpha, \tau) = (\alpha_n, \tau_n)}, (\alpha_n, \tau_n) \in D_2\}$:

$$F_{s,j}(y) = \sum_{n=1}^{4N+2M} w_1^s(\alpha_n) w_2^j(\alpha_n) \exp \frac{i\tau_n}{4} y -$$

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left(-\frac{2d\alpha}{\alpha\tau} \right) w_1^s(\alpha) w_2^j \rho(\alpha, \tau) \exp \frac{i\tau}{4} y. \quad (3.4.7)$$

Заметим, что на λ -плоскости формулы (3.4.7) принимают более простой вид, поскольку

$$k \frac{d\lambda}{d\alpha} = -\frac{2}{\alpha\tau} \quad (c > 1), \quad \frac{d\lambda}{d\alpha} = -\frac{2}{\alpha\tau} \quad (|c| < 1). \quad (3.4.8)$$

Подобным образом из соотношения

$$\bar{\chi}_2 / S_{22} = \bar{\psi}_2 + \psi_1 (S_{12} / S_{22}) \quad (3.4.9)$$

можно получить интегральные уравнения для определения φ и κ :

$$8\kappa(y, y'') - \cos \frac{u - u_1}{4} 2\partial_y F_{0,0}(y + y'') + \nu F_{0,0}(y + y'') + \\ + \int_y^\infty \left[\varphi(y, y') F_{0,0}(y' + y'') + \kappa(y, y') F_{1,1}(y' + y'') \right] dy' = 0, \quad (3.4.10)$$

$$8\varphi(y, y') - \cos \frac{u - u_1}{4} 2\partial_y F_{1,1}(y + y'') + \nu F_{1,1}(y + y'') + \\ + \int_y^\infty \left[\varphi(y, y') F_{1,1}(y' + y'') + \kappa(y, y') F_{2,2}(y' + y'') \right] dy' = 0.$$

Солитонные решения системы (3.4.6), (3.4.10) далее предъявлены в явном виде.

Заметим, что существование и единственность решений уравнений (3.4.6), (3.4.10) в несолитонном секторе (при $\rho \neq 0$) не очевидна, так как при произвольных x операторы $F_{m,n}(y)$ не являются ограниченными. Мы полагаем, что система (3.4.6), (3.4.10) разрешима при жестких ограничениях на данные непрерывного спектра, накладываемых областью изменения переменной x и выбором функций $u(x_0, y)$, $\partial_{x_0} u(x_0, y)$. В следующей главе поясним это утверждение на конкретных примерах.

При выводе замкнутой системы для определения a, b, f, h мы исходили из формулы (первый вектор-столбец связи $\Psi_+ = \Psi_- S^{-1}$):

$$\frac{\psi \det S}{S_{22}} = \chi - \frac{\bar{\chi} S_{21}}{S_{22}}, \quad (\alpha, \tau) \in \Gamma. \quad (3.4.11)$$

Как и ранее, при вычислении интегралов по лемме Жордана вычеты подынтегральных функций в зависящих от x полюсах выражения $\det S/S_{22}$ оказываются равными нулю. Окончательный результат можно записывать в форме (3.4.6), (3.4.10). А именно, если провести формальную замену

$$\gamma \rightarrow a, \quad \beta \rightarrow b, \quad \varphi \rightarrow f, \quad \kappa \rightarrow h,$$

$$\int_y^\infty \rightarrow \int_{-\infty}^y, \quad F_{i,j}(y+y') \rightarrow \Phi_{i,j}(y+y'), \quad i, j = 0, 1, 2, \quad (3.4.12)$$

уравнения (3.4.6), (3.4.10) перейдут в систему для определения a, b, f, h . При этом ядра $\Phi_{i,j}$ интегральных операторов определяются формулами (3.4.7), в которых нужно заменить

$$\gamma_n \rightarrow c_n = -2b_n^{-1} \det S(\alpha_n, \tau_n) \left[\alpha \tau \partial_2 S_{22}(\alpha, \tau) \right]^{-1} \Big|_{(\alpha, \tau) = (\alpha_n, \tau_n)}, \quad \tau_n \rightarrow -\tau_n,$$

$$\tau \rightarrow -\tau_1, \quad u_1 \rightarrow u_0, \quad v \rightarrow v, \quad \rho(\alpha, \tau) \rightarrow r(\alpha, \tau) = -S_{21}(\alpha, \tau) / S_{22}(\alpha, \tau). \quad (3.4.13)$$

Решение уравнений (3.4.6), (3.4.12) определяет $\gamma, \beta(a, b)$ как линейные функции от $\cos \frac{u+u_1}{4}, \sin \frac{u+u_1}{4} \left(\cos \frac{u+u_0}{4}, \sin \frac{u+u_0}{4} \right)$. Далее подставляя $\gamma, \beta(a, b)$ в (3.1.42), (3.1.44) мы выражаем решение $u(x, y)$ через данные рассеяния.

3.5. МУЛЬТИСОЛИТОННЫЕ РЕШЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ SINE-GORDON С АСИМПТОТИКОЙ ТИПА КНОИДАЛЬНОЙ ВОЛНЫ

Нужно усложнять, чтобы в результате все стало проще, а не упрощать, чтобы в результате все стало сложнее.

В. Брудзинский

В солитонном секторе $S_{12} = S_{21} = 0$, так что ядра интегральных уравнений (3.4.6), (3.4.12) становятся вырожденными. Тогда система (3.4.6), (3.4.12) элементарно интегрируется и формула (3.1.44)

при $\partial_x u_1 > 0$ дает явное выражение для солитонов (на сложном фоне) эллиптического уравнения sine-Gordon:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{u}{4} = & \left\{ \operatorname{tg} \frac{u_1}{4} + 4 \sum_{m,n=1}^{4N+2M} (i\tau_n - \partial_x u_1)^{-1} \left(\cos \frac{u_1}{2} (E - DE^{-1}F)_{nm}^{-1} \times \right. \right. \\ & \times \left[\operatorname{tg} \frac{u_1}{4} (\partial_y E - DE^{-1} \partial_y F)_{mn} - (\partial_y [DE^{-1}]E)_{mn} \right] + \sin \frac{u_1}{2} (E - \\ & \left. \left. - FE^{-1}D)_{nm}^{-1} \left[\operatorname{tg} \frac{u_1}{4} (\partial_y [FE^{-1}]E)_{mn} - (\partial_y E - FE^{-1} \partial_y D)_{mn} \right] \right\} \times \\ & \times \left\{ 1 - 4 \sum_{m,n=1}^{4N+2M} (i\tau_n - \partial_x u_1)^{-1} \left(\cos \frac{u_1}{2} (E - DE^{-1}F)_{nm}^{-1} \left[(\partial_y E - DE^{-1} \partial_y F)_{mn} + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. + \operatorname{tg} \frac{u_1}{4} (\partial_y [DE^{-1}]E)_{mn} \right] + \sin \frac{u_1}{2} (E - FE^{-1}D)_{nm}^{-1} \times \right. \\ & \left. \left. \times \left[(\partial_y [FE^{-1}]E)_{mn} + \operatorname{tg} \frac{u_1}{4} (\partial_y E - FE^{-1} \partial_y D)_{mn} \right] \right\}^{-1}, \quad \partial_x u_1 > 0. \quad (3.5.1) \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} E_{nm} = & \delta_{nm} - \frac{\exp \frac{iy}{4} (\tau_n + \tau_m)}{2i(\tau_n + \tau_m)} w_1(\alpha_n) w_2(\alpha_n) \gamma_n, \quad (\alpha_n, \tau_n) \in D_2; \\ F_{nm} = & -\frac{\exp \frac{iy}{4} (\tau_n + \tau_m)}{2i(\tau_n + \tau_m)} w_1^2(\alpha_n) \gamma_n, \quad D_{nm} = -\frac{\exp \frac{iy}{4} (\tau_n + \tau_m)}{2i(\tau_n + \tau_m)} w_2^2(\alpha_n) \gamma_n. \end{aligned} \quad (3.5.2)$$

Когда $\partial_x u_0 < 0$ выражение для $u(x, y)$ находим, используя (3.1.42). Окончательная формула может быть получена из (3.5.1), (3.5.2) формальной заменой

$$\gamma_n \rightarrow -c_n, \quad \tau_n \rightarrow -\tau_n, \quad u_1(x) \rightarrow u_0(x), \quad (\alpha_n, \tau_n) \in D_2. \quad (3.5.3)$$

В качестве иллюстрации эффективности полученных результатов рассмотрим два простых случая.

Пусть $c > 1$, $M = 1$, ($\varepsilon = -1$), $N = 0$, $\Delta = 0$, тогда $u_0(x) = -u_1(x)$, $v_1 = K$, $S_{22}^0(\alpha, \tau) = [(k\tau - 2ik')/(k\tau + 2ik')]^{1/2}$ и формула (3.5.1) дает

$$\operatorname{tg} \frac{u}{4} = -\operatorname{tg} \frac{u_0}{4} \left[1 - \beta \exp\left(-\frac{k'y}{k}\right) \right] \left[1 + \beta \exp\left(-\frac{k'y}{k}\right) \right]^{-1}, \quad \beta = \beta^* = \text{const.} \quad (3.5.4)$$

Это решение эквивалентно (2.3.18).

При $|c| < 1$, $M = 1$, $N = 0$, $\Delta = 2K$ имеем

$$\operatorname{tg} \frac{u_0}{4} = \operatorname{ctg} \frac{u_1}{4}, \quad v_1 = 0, \quad S_{22}^0(\alpha, \tau) = [(\tau - 2ik)/(\tau + 2ik)]^{1/2}.$$

Солитонное решение есть

$$\operatorname{tg} \frac{u}{4} = \left(\operatorname{tg} \frac{u_1}{4} + \beta \exp(-ky) \right) \left(1 + \beta \operatorname{tg} \frac{u_1}{4} \exp(-ky) \right)^{-1}, \quad \beta = \beta^* = \text{const.} \quad (3.5.5)$$

С точностью до сдвига по аргументу x выражение (3.5.5) совпадает с пределом (2.3.22) при $\psi \rightarrow \pi/2$.

Детальный анализ всех односолитонных конфигураций ($N = 1$, $M = 0$ или $M = 1$, $N = 0$) на периодическом фоне выполнен в работах [7–10] и приведен в предыдущей главе.

В вырожденных случаях ($c \rightarrow 1$), когда период кноидальной волны (3.3) стремится к бесконечности, процедура интегрирования уравнения (3.1) нами развита в [47]: приведены рабочие формулы, необходимые для решений уравнения (3.1) с однородной асимптотикой:

$$u(x, y) \rightarrow 0, \quad y \rightarrow +\infty;$$

$$u(x, y) \rightarrow 2\pi g, \quad y \rightarrow -\infty,$$

и асимптотикой типа одиночный 2π -кинк:

$$u(x, y) \rightarrow 4\operatorname{arctg} \exp \varepsilon_0 x + 2\pi g_0, \quad y \rightarrow +\infty;$$

$$u(x, y) \rightarrow 4\operatorname{arctg} \exp \varepsilon_1 x + 2\pi g_1, \quad y \rightarrow -\infty.$$

Здесь $\varepsilon_0, \varepsilon_1 = \pm 1$; g, g_0, g_1 – целые числа. Преимущество предложенных схем интегрирования в том, что они позволяют изучать и несо-

литонные решения уравнения (3.1). Поскольку в данной главе подробно рассмотрен общий случай, не будем останавливаться на изложении других результатов. Основные расчетные формулы работы [47] представлены в главах 4 и 5.

Таким образом, в этой главе предложена основанная на методе ОЗР схема построения точных решений $u(x, y)$ нелинейного уравнения sine-Gordon (3.1) эллиптического типа. Развитая процедура позволяет проанализировать все возможные двумерные решения модели (3.1) с асимптотическим поведением типа кноидальных волн по одной из пространственных переменных (например y). Когда заданы асимптотическое поведение поля $u(x, y)$ при $y \rightarrow \pm\infty$ (3.3) и значения $\partial_x u(x, y)$, $u(x, y)$ на некоторой линии $x = x_0 = \text{const}$, метод ОЗР дает самосогласованную схему интегрирования модели (3.1). Как и в случае интегрируемых волновых уравнений, в эллиптической двумерной модели (3.1) солитонам отвечает дискретный спектр задачи рассеяния. Вычисление несолитонных деформаций модулированной структуры, связанных с непрерывным спектром задачи рассеяния, редуцировано к системе одномерных линейных интегральных уравнений.

НЕСОЛИТОННЫЕ ВИХРЕВЫЕ ДИПОЛИ В НЕСОИЗМЕРИМЫХ (ПОЛОСОВЫХ ДОМЕННЫХ) СТРУКТУРАХ

Широкий класс магнетиков и двумерных кристаллов имеет основное состояние – несоизмеримую структуру, которая описывается одномерной решеткой 2π -солитонов (2.3.6). В общем случае двумерные топологические дефекты – вихри в несоизмеримой структуре – формируются из отрезков 2π -солитонных линий. Так в сверхструктурной решетке адатомов на грани кристалла при обрыве одной из солитонных линий решетки (2.3.6) образуется вихрь с $Q = \pm 1$, подобный дислокации. В работах [1–3] высказано предположение, что в двумерных кристаллах вихревые диполи с минимально возможными топологическими зарядами $Q = \pm 1$ могут зарождаться термофлуктуационным путем и определяют фазовый переход типа плавления солитонной сверхструктуры.

Вихри со сравнительно небольшим топологическим зарядом могут образоваться и без обрыва солитонных линий, но при изменении их полярности (см. п. 2.4). Например, дефект с зарядом $Q = \pm 2$ возникает при «стыковке» двух полубесконечных 2π -кинков разной полярности. Интересным примером, где возможно подобное описание, является полосовая доменная структура ферромагнетика с анизотропией типа «легкая ось». Упрощенное описание двумерных дефектов в плоскопараллельной доменной структуре ферромагнетика может быть достигнуто в рамках модели (3.1) (см. [4, 5] и главу 2). Такой подход некорректен вблизи центров вихрей. В этих областях нельзя пренебречь возможностью выхода вектора намагниченности из плоскости границ и, следовательно, магнитостатическими полями. Тем не менее в рамках упрощенной модели (3.1) можно аналитически описать вихри с зарядами $Q = \pm 2$, которые соответствуют наличию в доменных границах плоскопараллельной структуры блоховских линий. Среди подобных дефектов особое место занимают конфигурации типа диполей, поскольку они имеют пространственно локализованные поля, а значит – меньшую энергию.

Напомним важное обстоятельство: при описании конкретных физических систем в терминах модели (3.1) наблюдаемые переменные иногда выражаются не через функцию $u(x, y)$, а через $u(x, y)/N$, где N – целое число, отражающее условия кристаллографической симметрии системы (см. главу 2). Поскольку при обходе вокруг сингулярной точки изменение параметра порядка u/N обычно должно быть кратным 2π , такие системы обладают «правилом отбора». В них реализуются только те вихри, топологические заряды которых кратны N . В приведенном примере ферромагнетика с плоскопараллельной доменной структурой мы имели дело с анизотропией, допускающей вихри с зарядами, кратными 2. В магнетиках возможны и другие значения $N = 4, 6$ (см. [6–8]).

Случай $N = 3$ реализуется, например, при рассмотрении фазовых переходов типа несоизмеримая волна зарядовой плотности – соизмеримая волна зарядовой плотности в слоистых системах (члены семейства дихалькогенидов переходных металлов TaSe_2 , TiS_2 , ZrS_2). Такой переход можно интерпретировать [9] как плавление несоизмеримой фазы путем зарождения вихревых диполей с $Q = \pm 3$. Простейший вихрь с $Q = 3$ (дискомменсурация) описывается моделью (3.1) и образуется из трех полубесконечных 2π -солитонов поля $u(x, y)$ одной полярности (см. рис. 2.22, в).

Приведенные примеры демонстрируют специфическую роль вихревых диполей в солитонной сверхструктуре двумерных систем. Хотя выражение (3.1) обладает парой Лакса, аналитическое описание диполей сопряжено со значительными трудностями, поскольку традиционная схема обратной задачи рассеяния для его интегрирования требует изменений. Для определения поля дефектов необходимо найти решение нелинейной краевой задачи для уравнения эллиптического типа. Применение метода ОЗР для решения таких задач в принципе возможно, если удастся выразить данные рассеяния через краевые условия. В общем виде (в квадратурах) это проделать не удастся, хотя имеются основанные на ОЗР схемы интегрирования, которые позволяют исследовать широкие классы точных решений нелинейных уравнений эллиптического типа [10–15]. Так, в предыдущей главе сформулирована ОЗР, дающая возможность перечислить все точные решения модели (3.1) с асимптотикой типа кноидальной волны (3.3) при $|y| \rightarrow \infty$. Поскольку при этом на решения $u(x, y)$ не налагалось никаких ограничений при $|x| \rightarrow \infty$, данные рассеяния оставались не определенными через граничные условия. В работе [16] методами алгебраической геометрии для эллиптического уравнения sine-Gordon удалось решить краевую задачу в пря-

моугольнике при специальном выборе граничных условий. В работах [17–21] показано, что метод ОЗР может быть полезен при анализе сингулярных решений уравнений эллиптического типа. В [17–20] в рамках модели (3.1) решена задача определения поля $u(x, y)$ для изолированных дефектов типа оборванных 2π -кинков поля u (доменных границ) на однородном фоне. Определение данных рассеяния потребовало анализа не только прямой задачи рассеяния, но обратной. В данной главе мы покажем, что найденный в [18] прием (аналог метода изображений в электростатике) применим для аналитического описания несолитонных вихревых диполей в несоизмеримых (полосовых доменных) структурах.

Результаты этой главы основаны на работах [23–25]. В п. 4.1 приведены основные расчетные формулы и конкретизированы трудности вычисления методом ОЗР поля диполей. Обсуждены общие для всех исследуемых диполей ограничения на матрицу перехода, налагаемые асимптотическим поведением поля $u(x, y)$ при $|x| \rightarrow \infty$. Показано, что определение данных рассеяния может быть редуцировано к решению вспомогательной линейной краевой задачи.

В п. 4.2 сформулированы краевые условия задачи о диполе с $Q = \pm 1$ на фоне несоизмеримой структуры. При определении данных рассеяния для такого диполя использованы свойства симметрии поля диполя, уравнения прямой и обратной задач рассеяния, асимптотическое поведение поля $u(x, y)$ вблизи центров вихрей.

В п. 4.3 обобщается изложенная схема интегрирования для диполей с произвольным топологическим зарядом. Диполи образуются в результате вставки отрезков солитонных линий в центр либо одной из солитонных линий решетки, либо одного из полосовых доменов солитонной сверхструктуры.

В п. 4.4 исследовано асимптотическое поведение дипольных конфигураций при $x^2 + y^2 \rightarrow \infty$. Для вычисления асимптотики развит метод перевала на римановой поверхности, ассоциированной с решеткой солитонов (3.5).

В п. 4.5 сравниваются полученные результаты с приближениями, известными для несоизмеримых структур [22]. Обсуждены возможные физические приложения. В п. 4.6 результаты исследований применены для вычисления распределения токов вокруг магнитного вихревого диполя в широком джозефсоновском контакте. Область туннельного перехода находится в смешанном состоянии, которое реализуется при наличии достаточно сильного внешнего магнитного поля, параллельного плоскости контакта. Диполь возникает в ре-

зультате проникновения абрикосовской вихревой нити из сверхпроводящих электродов в область контакта.

В п. 4.7 техника главы 3 адаптирована к построению решений модели (3.1) с асимптотикой типа доменной стенки при $y \rightarrow \pm\infty$. В п. 4.8 эффективность предложенной процедуры проиллюстрирована на примере расчета поля доменной стенки с блоховской линией.

4.1. ТРУДНОСТИ МЕТОДА ОЗР. ОСНОВНЫЕ РАСЧЕТНЫЕ ФОРМУЛЫ И УТВЕРЖДЕНИЯ

Не говорите мне, что эта проблема сложна. Будь она проста, не было бы проблемы.

Ф. Фош

Как показано в главе 3, решения нелинейного уравнения (3.1) с асимптотикой типа полосовой доменной структуры (3.5) при $y \rightarrow \pm\infty$ могут быть найдены из соотношения

$$\sin \frac{u - u_0}{4} = \int_{-\infty}^y dy' \left[a(y, y') \cos \frac{u_0}{2} + b(y, y') \sin \frac{u_0}{2} \right] \exp \left[\frac{1}{4} \partial_x u_0 (y - y') \right],$$

$$\partial_x u_0 < 0. \quad (4.1.1)$$

Функции $a(y, y')$, $b(y, y')$ определяются уравнениями ОЗР:

$$8a(y, y'') - \sin \frac{u + u_0}{4} \Phi_{1,1}(y + y'') + \cos \frac{u + u_0}{4} \Phi_{0,2}(y + y'') +$$

$$+ \int_{-\infty}^y dy' \left[a(y, y') \Phi_{1,1}(y' + y'') + b(y, y') \Phi_{0,2}(y' + y'') \right] = 0,$$

$$8b(y, y'') - \sin \frac{u + u_0}{4} \Phi_{2,0}(y + y'') + \cos \frac{u + u_0}{4} \Phi_{1,1}(y + y'') +$$

$$+ \int_{-\infty}^y dy' \left[a(y, y') \Phi_{2,0}(y' + y'') + b(y, y') \Phi_{1,1}(y' + y'') \right] = 0. \quad (4.1.2)$$

Для дальнейшего анализа нам потребуются также уравнения ОЗР, определяющие ядра $f(y, y')$, $h(y, y')$ в интегральном представлении (3.1.2) функции Ψ_- :

$$\begin{aligned} & 8f(y, y'') + v\Phi_{1,1}(y + y'') - \cos \frac{u - u_0}{4} 2\partial_y \Phi_{1,1}(y + y'') + \\ & + \int_{-\infty}^y dy' [f(y, y')\Phi_{1,1}(y' + y'') + h(y, y')\Phi_{2,2}(y' + y'')] = 0, \\ & 8h(y, y'') + v\Phi_{0,0}(y + y'') - \cos \frac{u - u_0}{4} 2\partial_y \Phi_{0,0}(y + y'') + \\ & + \int_{-\infty}^y dy' [f(y, y')\Phi_{0,0}(y' + y'') + h(y, y')\Phi_{1,1}(y' + y'')] = 0. \quad (4.1.3) \end{aligned}$$

Функция v определена формулой (3.1.2), ядра $\Phi_{m,n}(y)$ выражаются в терминах данных рассеяния $\left\{ \rho(\alpha, \tau) = S_{21}(\alpha, \tau) S_{22}^{-1}(\alpha, \tau), (\alpha, \tau) \in \Gamma, (\alpha_p, \tau_p) \in D_2, c_p = -2b_p^{-1} [\alpha \tau \partial_\alpha S_{22}]^{-1} \Big|_{(\alpha, \tau) = (\alpha_p, \tau_p)} \right\}$:

$$\begin{aligned} \Phi_{m,n}(y) = & \sum_{p=1}^{4N+2M} w_1^m(\alpha_p) w_2^n(\alpha_p) c_p \exp \left[-\frac{i\tau_p}{2} y \right] + \\ & + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left(-\frac{2d\alpha}{\alpha\tau} \right) w_1^m(\alpha) w_2^n(\alpha) \rho(\alpha, \tau, x) \exp \left(-\frac{i\tau}{4} y \right). \quad (4.1.4) \end{aligned}$$

Здесь $S_{i,j}$ – элементы матрицы перехода ($i, j = 1, 2$), не зависящие от x нули (α_p, τ_p) коэффициента $S_{22}(\alpha, \tau)$, аналитического в области $D_2 = \{(\alpha, \tau) \mid \text{Im } \tau \geq 0\}$, отвечают дискретному спектру задачи рассеяния (3.7), b_p – нормировочные множители функций дискретного спектра. Благодаря редукциям, точки дискретного спектра (α_p, τ_p) и параметры b_p распадаются на два множества, содержащие $4N$ и $2M$ элементов. Эти редукции и явная зависимость от x параметров b_p приведены в главе 3. Когда асимптотические значения поля $u(x, y)$ при $y \rightarrow \pm\infty$ совпадают, элемент $S_{22}(\alpha, \tau, x)$ матрицы перехода оказывается

независящим от x : $S_{22}(\alpha, \tau, x) = S_{22}^0(\alpha, \tau)$. Зависимость от x функции S_{21} имеет вид (3.1.35):

$$S_{21}(\alpha, \tau, x) = \left[\frac{i\tau + \partial_x u_0}{-i\tau + \partial_x u_0} \right]^{1/2} \exp \left\{ -\frac{i}{2} w_1 w_2 \tau \int_0^x dx' \left[w_1^2 - \cos^2 \frac{u_0}{2} \right]^{-1} \right\} S_{21}^0(\alpha, \tau). \quad (4.1.5)$$

Вследствие редукции (3.1.19) $S_{11}^0(\alpha, \tau) = S_{22}^0(-\alpha, -\tau)$, $S_{12}(\alpha, \tau) = S_{21}(-\alpha, -\tau)$.

Для дальнейшего важно, что не все функции $\Phi_{m,n}(y)$ в (4.1.4) являются независимыми, вследствие соотношений $w_1^2 = k^{-2} + (\tau/2)^2$; $w_2^2 = -(\tau/2)^2 - (k'/k)^2$ имеем полезные тождества:

$$\Phi_{2,0}(y) = \left[-4\partial_y^2 + k^{-2} \right] \Phi_{0,0}(y), \quad \Phi_{0,2}(y) = \left[4\partial_y^2 - (k'/k)^2 \right] \Phi_{0,0}(y), \\ \Phi_{2,2}(y) = \left[-4\partial_y^2 + k^{-2} \right] \left[4\partial_y^2 - (k'/k)^2 \right] \Phi_{0,0}(y). \quad (4.1.6)$$

Отметим следующее обстоятельство. В главах 2 и 3 детально исследованы так называемые солитонные решения эллиптического уравнения sine-Gordon с асимптотикой типа решетки солитонов (3.5) при $|y| \rightarrow \infty$. Солитонные решения отвечают наличию только дискретного спектра в задаче рассеяния ($c_p \neq 0$, $\rho = 0$) и находятся в явном виде из (4.1.1), (4.1.2) в результате алгебраических вычислений. Оказалось, что они соответствуют дефектам поля $u(x, y)$ с топологическим зарядом $Q = \pm 4$. Применение алгеброгеометрических методов конечнозонного интегрирования к уравнению (3.1) также привело лишь к дефектам с $Q = \pm 4$ [26, 27].

Анализ, проведенный в работах [17–20], показал, что дефекты поля $u(x, y)$ с меньшим топологическим зарядом принадлежат непрерывному спектру задачи рассеяния (3.7) ($c_p = 0$, $\rho \neq 0$), содержащему сингулярности. В следующем пункте обосновано это утверждение для вихрей на фоне решетки солитонов. Таким образом, задача о вихревом диполе сводится к тому, чтобы определить функции спектрального параметра $S_{22}^0(\alpha, \tau)$ и $S_{21}^0(\alpha, \tau)$. Тогда поле $u(x, y)$ определится линейными интегральными уравнениями (4.1.1), (4.1.2), где следует положить $c_p = 0$. На первый взгляд кажется, что функции $S_{ij}^0(\alpha, \tau)$ могут быть найдены в результате решения линейной системы (3.7). Для этого на линии $x = 0$ должны быть заданы две функции u и $\partial_x u$ (оператор L в (3.7) зависит от полей u и $\partial_x u$). Однако специ-

фика краевых задач для уравнений эллиптического типа состоит в том, что никогда не известны сразу две функции u и $\partial_x u$. На границе задается одна из них или их линейная комбинация. Например, для задачи Дирихле на границе известно значение функции $u(x, y)$. Таким образом, традиционная процедура интегрирования с помощью ОЗР нелинейных уравнений гиперболического и параболического типов не подходит для уравнений эллиптического типа. Излагаемая далее схема интегрирования уравнения (3.1) в некотором смысле аналогична использованию метода Фурье для решения линейных уравнений эллиптического типа. Решение конкретной краевой задачи сводится к определению по краевым условиям функций от спектрального параметра $S_{ij}^0(\alpha, \tau)$. При вычислении этих функций для дипольных конфигураций на фоне солитонной сверхструктуры оказываются полезными свойства симметрии поля вихрей.

4.1.1. Ограничения на матрицу перехода, налагаемые асимптотическим поведением поля $u(x, y)$ при $|x| \rightarrow \infty$

Мы не будем пока полностью конкретизировать краевые условия для дипольных конфигураций. Рассмотрим лишь следствия условия

$$u(x, y) \rightarrow u_0(x \pm x_0), \quad x_0 = \text{const}, \quad x \rightarrow \pm\infty, \quad (4.1.7)$$

которое является общим для всех вихревых диполей, исследуемых в этой главе. Для матрицы перехода $S(\alpha, \tau, x)$ (3.1.12), связывающей функции Иоста системы (3.7), условие (4.1.7) означает, что при $|x| \rightarrow \infty$:

$$S(\alpha, \tau, x) \rightarrow I. \quad (4.1.8)$$

Поскольку диагональные элементы матрицы S не зависят от x , соотношение (4.1.8) фиксирует спектральные функции S_{11}^0 и S_{22}^0 :

$$S_{11}^0(\alpha, \tau) = S_{22}^0(\alpha, \tau) = 1. \quad (4.1.9)$$

Отсюда следует чрезвычайно важный вывод: для вихревых диполей с асимптотическим поведением (2.3.6), (4.1.7) система (3.7) не имеет дискретного спектра. Интересно, что асимптотическое разложение функции $S_{22}(\alpha, \tau)$ вблизи точки $\alpha \sim \infty, \tau \sim \infty$:

$$S_{22}(\alpha, \tau) = 1 + \sum_{i=1}^N \alpha^{-i} \Pi^{(i)} + O(\alpha^{-N-1})$$

порождает законы сохранения типа $\partial_x \Pi^{(i)} = 0$. Условие $S_{22}(\alpha, \tau) \equiv 1$ фиксирует значения интегралов $\Pi^{(i)}$: $\Pi^{(i)} = 0$. Согласно результатам главы 3 (формула (3.1.24)), первые из серии таких интегралов имеют вид

$$\int_{-\infty}^{\infty} \partial_x u \partial_y u dy = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} dy \left[\frac{(\partial_x u)^2 - (\partial_y u)^2}{4} + \cos^2 \frac{u}{2} - k^{-2} \right] = 0.$$

Поскольку недиагональные элементы матрицы перехода зависят от координаты x , условие (4.1.8) не определяет их полностью. Однако и здесь возникает существенное ограничение: оказывается, непрерывный спектр Γ задачи рассеяния (3.7) имеет лакуны. А именно: допустимы лишь те участки контура Γ , где функции $S_{21}(\alpha, \tau, x)$ и $S_{12}(\alpha, \tau, x)$ экспоненциально убывают при $|x| \rightarrow \infty$ (см. (4.1.5)). На тех участках Γ , где функции $S_{21}(\alpha, \tau, x)$ и $S_{12}(\alpha, \tau, x)$ неограниченно растут при $|x| \rightarrow \infty$, спектральные функции $S_{21}^0(\alpha, \tau)$ и $S_{12}^0(\alpha, \tau)$ должны обращаться в нуль. Для выявления области допустимых значений параметра α удобно использовать отображение (3.1.10) двулистной римановой поверхности (α, τ) на тор. В униформизации (3.1.10) контур Γ задается простыми соотношениями

$$\lambda = t \pm iK', \quad -2K \leq t \leq 2K, \quad (4.1.10)$$

где t – вещественный параметр. Согласно (4.1.5), обращение S_{21} в нуль при $|x| \rightarrow \infty$ определяет множитель

$$\begin{aligned} A &\equiv -\frac{i w_1 w_2 \tau}{2} \int_0^x dx' \left[w_1^2 - \cos^2 \frac{u_0}{2} \right]^{-1} = \\ &= -\frac{1}{k} \frac{cn t dn t}{snt} \int_0^x dx \left[1 - k^2 \operatorname{sn}^2 t \cos^2 \frac{u_0}{2} \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (4.1.11)$$

Поскольку $\left[1 - k^2 \operatorname{sn}^2 t \cos^2 \frac{u_0}{2} \right]^{-1} > 1$, предельные значения A при $|x| \rightarrow \pm \infty$ имеют вид

$$A \rightarrow -\frac{cn t dn t}{snt} \operatorname{sign} x \infty. \quad (4.1.12)$$

Из (4.1.5), (4.1.12) следует, что S_{21}^0 отлично от нуля на Γ лишь при следующих значениях параметра t :

$$\begin{aligned} -2K \leq t \leq -K, \quad 0 \leq t \leq K \quad (x > 0); \\ -K \leq t \leq 0, \quad K \leq t \leq 2K \quad (x < 0); \end{aligned} \quad (4.1.13)$$

Участки контура Γ , где отлична от нуля спектральная функция S_{12}^0 , могут быть найдены из выражения (4.1.13) с помощью редукций (3.1.19).

4.1.2. Связь недиагональных элементов матрицы перехода с решением линеаризованного уравнения sine-Gordon

Согласно ранее изложенному, решения модели (3.1) с асимптотическим поведением

$$u(x, y) \rightarrow u_0(x \pm x_0), \quad x^2 + y^2 \rightarrow \infty, \quad (4.1.14)$$

выражаются через функцию от спектрального параметра $S_{21}^0(\alpha, \tau)$. В данной главе для построения $S_{21}^0(\alpha, \tau)$ используется вспомогательная функция $\Phi(x, y)$, которая определяет асимптотику поля $u(x, y)$ при $x^2 + y^2 = r^2 \rightarrow \infty$:

$$u - u_0 \approx \Phi(x, y), \quad r \rightarrow \infty. \quad (4.1.15)$$

Чтобы ввести эту функцию, заметим, что при $r \rightarrow \infty$

$$f(y, y'), \quad \Phi_{0,0}(y), \quad \Phi_{1,1}(y) = O(u - u_0),$$

$$h(y, y') \approx h\left(\frac{y + y'}{2}\right) \approx -\frac{1}{8}(u - u_0). \quad (4.1.16)$$

В результате из второго уравнения системы (4.1.3) в линейном по $u - u_0$ приближении находим

$$\begin{aligned} u(x, y) - u_0(x) &\approx \left[-2\partial_y - \frac{\partial_x u_0}{2} \right] \Phi_{0,0}(y + y') \Big|_{y=y'} = \\ &= \frac{1}{4\pi i} \int_{\Gamma} \left(-\frac{2d\alpha}{\alpha\tau} \right) S_{21}(\alpha, \tau, x) (i\tau - \partial_x u_0) \exp\left(-\frac{i\tau y}{2}\right) \equiv \Phi(x, y). \end{aligned} \quad (4.1.17)$$

Здесь контур $\tilde{\Gamma}$ получается из Γ с учетом ограничений (4.1.13) на область интегрирования. Существенно, что наличие этих ограничений делает связь между функциями $S_{21}^0(\alpha, \tau)$ и $\Phi(x, y)$ однозначной. Если нам удастся определить функцию $\Phi(x, y)$, то функция $S_{21}^0(\alpha, \tau)$ может быть найдена по $\Phi(x, y)$ с помощью обратного преобразования Фурье. Кроме того, указанные ограничения гарантируют следующее асимптотическое поведение поля $\Phi(x, y)$:

$$\Phi(x, y) \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty. \quad (4.1.18)$$

Выразим функцию $\Phi(x, y)$ через ядра операторов преобразования. С этой целью используем представление $S_{21}(\alpha, \tau, x)$ через функции Йоста. Из (3.7), (3.1.12) находим

$$S_{21} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\Psi_0^{-1} (L - L_{\infty}) \Psi_- \right]_{21} dy, \quad (4.1.19)$$

где $L_{\infty} = \lim_{y \rightarrow +\infty} L$. После подстановки выражений (4.1.19), (3.1.2) в формулу (4.1.17) в результате несложных, но утомительных вычислений с учетом (3.1.4) получаем простой результат:

$$\partial_s \Phi(x, s) = -8 \lim_{R \rightarrow \infty} \partial_R h(x, R, 2s - R). \quad (4.1.20)$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что функция $\Phi(x, y)$ удовлетворяет уравнению Ламе:

$$\left(\partial_x^2 + \partial_y^2 - \cos u_0 \right) \Phi = 0. \quad (4.1.21)$$

Важно, что выражение (4.1.21) является линейным. В результате получаем переход от краевой задачи для нелинейного уравнения (3.1) к более простой проблеме. Дальнейший успех зависит от возможности перенесения граничных условий для поля $u(x, y)$ на функцию $\Phi(x, y)$. Решение такой задачи возможно лишь в специальных случаях, включающих вычисление поля вихревых диполей на фоне решетки солитонов.

4.2. РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ О ВИХРЕВОМ ДИПОЛЕ С $Q = \pm 1$

Метод решения хорош, если с самого начала мы можем предвидеть – и далее подтвердить это, – что, следуя методу, мы достигнем цели.

Г. Лейбниц

Условие (2.1.16) означает, что поле $u(x, y)$ при наличии вихрей является неоднозначной функцией координат, получает заданное приращение $2\pi Q$ при обходе вокруг вихря. Физически, разумеется, никакой неоднозначности нет, так как наблюдаемые переменные определены по $\text{mod } 2\pi Q$. Как и в линейной теории дислокаций [28–30], чтобы сделать поле $u(x, y)$ однозначным, в плоскости (x, y) необходимо сделать разрез S_v , на котором функция $u(x, y)$ претерпевает скачок на $2\pi Q$. В этом разделе мы сформулируем краевые условия для вихревого диполя с топологическим зарядом $Q = 1$ в точке $(0, -l)$ и с зарядом $Q = -1$ в точке $(0, l)$ на фоне одномерной решетки солитонов.

Зададим разрез

$$S_v = \{x=0, |y| > l\}. \quad (4.2.1)$$

На разрезе поле $u(x, y)$ имеет скачок

$$u^+ - u^- = -2\pi, \quad (x, y) \in S_v. \quad (4.2.2)$$

Вне разреза поле $u(x, y)$ непрерывно, а предельные значения производных не имеют скачков даже на разрезе:

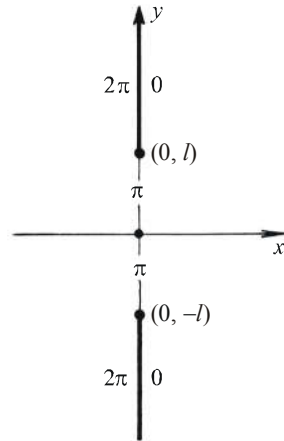
$$(\partial_x u)^+ - (\partial_x u)^- = (\partial_y u)^+ - (\partial_y u)^- = 0, \quad (x, y) \in S_v. \quad (4.2.3)$$

Здесь и далее $u^+ = u(x, y)$, $u^- = u(x, y)$.

Нелинейная задача (3.1), (4.2.2), (4.2.3) допускает симметрию:

$$u(x, y) = 2\pi - u(-x, y). \quad (4.2.4)$$

Рис. 4.1. Значения поля $u(x, y)$ на оси y для вихревого диполя с зарядами $Q = \pm 1$. Разрез обозначен жирной линией



Условия (4.2.2) – (4.2.4) определяют предельные значения $u^\pm, (\partial_y u)^\pm$ на всей оси y , кроме точек, где расположены вихри ($y \neq \pm l$, рис. 4.1):

$$u^+ = \begin{cases} 0, & |y| > l, \\ \pi, & |y| < l, \end{cases} \quad u^- = \begin{cases} 2\pi, & |y| > l, \\ \pi, & |y| < l, \end{cases}$$

$$(\partial_y u)^\pm = 0, \quad (\partial_x u)^+ = (\partial_x u)^-. \quad (4.2.5)$$

Граничные условия при $x > 0, r \rightarrow \infty$, имеют вид

$$u_0(x) = 4 \operatorname{Arctg} \operatorname{cn}(\chi + K) [1 + \operatorname{sn}(\chi + K)]^{-1}, \quad \chi = x/k, \quad (4.2.6)$$

При $x < 0, r \rightarrow \infty$, имеем

$$u_0(x) = 4 \operatorname{Arctg} \operatorname{cn}(\chi - K) [1 + \operatorname{sn}(\chi - K)]^{-1}. \quad (4.2.7)$$

График функции $u_0(x) = 4 \operatorname{Arctg} \operatorname{cn} \chi [1 + \operatorname{sn} \chi]^{-1}$ представлен на рис. 4.2.

Таким образом, задача о вихревом диполе естественным образом свелась к решению двух краевых задач Дирихле в полуплоскостях $x > 0, x < 0$ и последующей их сшивке на оси y . Для того чтобы переформулировать эту краевую задачу в терминах функции $\Phi(x, y)$ (4.1.17), необходим анализ свойств симметрии поля диполя в рамках как прямой задачи, так и обратной.

Заметим, что возможны и другие диполи с $Q = \pm 1$ на фоне кноидальной волны (2.3.6).

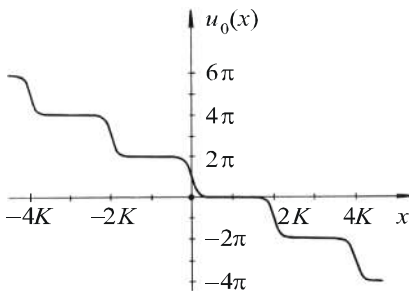


Рис. 4.2. Одномерная решетка солитонов

Поскольку при этом изменится асимптотическое поведение поля $u(x, y)$ при $r \rightarrow \infty$, мы получим другие решения уравнения (3.1). Далее мы вернемся к этому вопросу.

4.2.1. Ограничения на функции Иоста и матрицу перехода, обусловленные зеркальной симметрией конфигурации

Получим ограничения на функцию $\Phi(x, y)$, вытекающие из симметрии (4.2.4). Для этого выпишем уравнения прямой задачи рассеяния

$$\partial_y \Psi = L\Psi, \quad \partial_x \Psi = A\Psi + \Psi B. \quad (4.2.8)$$

Здесь операторы L и A определены формулой (3.2), диагональная матрица B имеет вид (3.1.32). Непосредственной проверкой нетрудно убедиться, что следствием формул (3.1.1), (4.2.4), (4.2.8) являются редукции на функции Иоста:

$$\Psi_{\pm}(x, y, \alpha, \tau) = \Psi_{\pm}(-x, y, \alpha^{-1}, \tau), \quad (4.2.9a)$$

или в λ -параметризации

$$\Psi_{\pm}(x, y, \lambda) = \Psi_{\pm}(-x, y, 2K - \lambda). \quad (4.2.9b)$$

В результате ядра операторов преобразования, заданные в полуплоскостях $x > 0$, $x < 0$, оказываются связанными:

$$\begin{aligned} a(y, y', x) &= a(y, y', -x), & b(y, y', x) &= -b(y, y', -x), \\ h(y, y', x) &= -h(y, y', -x), & f(y, y', x) &= f(y, y', -x). \end{aligned} \quad (4.2.10)$$

Соотношения для функций γ , β , κ , ϕ находим из формул (4.2.10) с помощью формальной замены (3.1.7).

Полученная редукция переносится на матрицу перехода S :

$$S(\alpha, \tau, x) = S(\alpha^{-1}, \tau, -x). \quad (4.2.11a)$$

Последнее соотношение в терминах λ имеет вид

$$S(\lambda, x) = S(-\lambda, -x). \quad (4.2.11b)$$

В свою очередь ограничения на матрицу S приводят к следующим свойствам независимых ядер $\Phi_{0,0}(y)$ и $\Phi_{1,1}(y)$ ОЗР (4.1.2), (4.1.3) и функции $\Phi_{1,1}(x, y)$:

$$\Phi_{0,0}(x, y) = -\Phi_{0,0}(-x, y), \quad \Phi_{1,1}(x, y) = \Phi_{1,1}(-x, y); \quad (4.2.12)$$

$$\Phi(x, y) = -\Phi(-x, y). \quad (4.2.13)$$

Из (4.2.13), в частности, получаем условия сшивки предельных значений функции Φ и ее производных на оси y ($y \neq \pm l$):

$$\Phi^+ = -\Phi^-, \quad (\partial_x \Phi)^+ = (\partial_x \Phi)^-, \quad (\partial_y \Phi)^+ = -(\partial_y \Phi)^-. \quad (4.2.14)$$

Связь функции $\Phi(x, y)$ с полем $u(x, y)$ (4.1.17) позволяет предположить, что свойства этих функций близки. На оси y предельные значения производных поля u совпадают всюду, за исключением точек расположения вихрей ($x = 0, y = \pm l$) (см. (4.2.5)). Если аналогичное требование наложить на Φ :

$$(\partial_x \Phi)^+ = (\partial_x \Phi)^-, \quad (\partial_y \Phi)^+ = (\partial_y \Phi)^-, \quad y \neq \pm l,$$

то совместно с (4.2.14) это равносильно утверждению, что $\Phi^\pm(y)$ является кусочно-постоянной функцией:

$$\partial_y \Phi^\pm(y) = 0, \quad y \neq \pm l.$$

В следующем пункте мы обоснуем и уточним это замечание, обратившись к уравнениям прямой и обратной задач рассеяния.

4.2.3. Ограничения на функцию $\Phi(x, y)$, следующие из анализа прямой и обратной задач рассеяния

Для дальнейшего анализа удобно переписать уравнения прямой задачи рассеяния (3.1.6) в интегральной форме:

$$a(y_0, y'_0) = a(\xi_0, \xi_0) - \frac{1}{4} \hat{J} \left[2\partial_y u \left(\partial_y b + \frac{\partial_x u}{4} b + \frac{h}{2} \sin \frac{u}{2} \right) + a(\partial_x \partial_y u - \mu) \right],$$

$$b(y_0, y'_0) = b(\xi_0, \xi_0) + \frac{1}{4} \hat{J} \left[2\partial_y u \left(\partial_y a + \frac{\partial_x u}{4} a + \frac{h}{2} \cos \frac{u}{2} \right) - b(\partial_x \partial_y u - \mu) \right],$$

$$h(y_0, y'_0) = h(\xi_0, \xi_0) + \frac{1}{4} \hat{J} \left[\partial_y u \left(a \sin \frac{u}{2} - b \cos \frac{u}{2} \right) + h(\partial_x \partial_y u + \mu) \right]. \quad (4.2.15)$$

Здесь действие оператора \hat{J} на произвольную функцию от двух переменных $f(y, y')$ определено соотношением

$$\hat{J}f \equiv \frac{1}{2} \left[\int_{-\infty}^{\xi_0} dy \int_{y-2\eta_0}^y dy' + \int_{\xi_0}^{y_0} dy \int_{y-2\eta_0}^{2\xi_0-y} dy' \right] f(y, y') = \int_0^{\eta_0} d\eta \int_{-\infty}^{\xi_0} d\xi f(\xi + \eta, \xi - \eta), \quad (4.2.16)$$

где $\xi = (y + y')/2$, $\eta = (y - y')/2$, $\xi_0 = (y_0 + y'_0)/2$, $\eta_0 = (y_0 - y'_0)/2$. В формуле (4.2.16) интегрирование производится по полубесконечной полосе $0 \leq \eta \leq \eta_0$, $\xi_0 \geq \xi > -\infty$, (рис. 4.3).

Нам необходимо проанализировать характер решений системы (4.2.15) в пределе $x \rightarrow \pm 0$. При определении значений $a(\xi_0, \xi_0)$, $b(\xi_0, \xi_0)$, $h(\xi_0, \xi_0)$ при $x \rightarrow \pm 0$ нужно с осторожностью использовать соотношения (3.1.5). В частности, на основании (4.2.5) нельзя считать,

что $\int_{-\infty}^y \partial_x u \partial_y u dy' = 0$ при $x \rightarrow \pm 0$ для произвольных значений y , по-

скольку подынтегральная функция содержит особенность в точках $y = \pm l$, где $(\partial_y u)^\pm \neq 0$. Для оценки вклада от особенности заметим, что вблизи центра вихря в уравнении (3.1) более существенны градиенты поля $u(x, y)$, чем слагаемое $\sin u$. Так что имеем $\Delta u \approx 0$ и, следова-

тельно, асимптотическое поведение поля $u(x, y)$ вблизи точки $(0, -l)$ нам известно:

$$u = \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \frac{y+l}{x},$$

$$(x, y) \approx (0, -l),$$

$$x > 0. \quad (4.2.17)$$

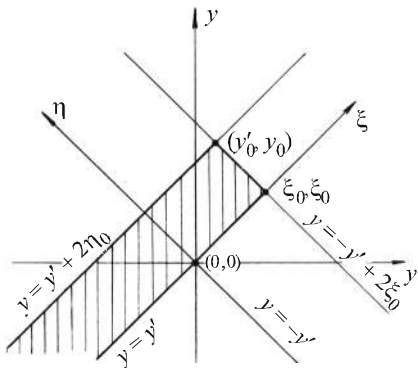


Рис. 4.3. Область интегрирования в формуле (4.2.16) – заштрихованная полуполоса, ограниченная линиями $y = y'$, $y = y' + 2\eta_0$, $y = -y' + 2\xi_0$

Тогда вклад в интеграл $\int_{-\infty}^y \partial_x u \partial_{y'} u dy'$ от окрестности точки $(0, -l)$ имеет вид

$$\int_{-\infty}^y \partial_x u \partial_{y'} u dy' \approx \frac{1}{2} \frac{x}{\left[x^2 + (y+l)^2 \right]} \rightarrow \frac{\pi}{2} \delta(y+l), \quad x \rightarrow +0. \quad (4.2.18)$$

В то же время в области $y < -l$ при $x \rightarrow \pm 0$ особенности отсутствуют, поэтому в соответствии с (4.2.5) имеем

$$\left(\int_{-\infty}^y \partial_x u \partial_{y'} u dy' \right)^\pm = 0, \quad (\partial_y u)^\pm = 0; \quad x \rightarrow \pm 0, \quad y < -l. \quad (4.2.19)$$

С учетом сказанного, при $y'_0 < y_0 < -l$, $x \rightarrow \pm 0$ из формул (3.1.5) (4.2.19) получаем

$$a^\pm(\xi_0, \xi_0) = h^\pm(\xi_0, \xi_0) = 0. \quad (4.2.20)$$

Поскольку в этом случае интегрирование в (4.2.15) производится по области, где $y, y' < -l$, в подынтегральных выражениях отсутствуют особенности и можно считать, что $(\partial_y u)^\pm = 0$. В результате из (4.2.15) получаем замкнутую однородную систему интегральных уравнений типа уравнений Вольтерра на функции $a^\pm(y, y')$, $h^\pm(y, y')$. Она имеет лишь тривиальное решение:

$$a^\pm(y, y') = h^\pm(y, y') = 0, \quad y < -l. \quad (4.2.21)$$

С учетом (4.2.21) первое из уравнений ОЗР (4.1.2) и второе из (4.1.3) также становятся однородными и дают

$$\Phi_{0,0}^\pm(y) = 0, \quad y < -l. \quad (4.2.22)$$

Чтобы получить подобное соотношение для интервала $y > l$ ($x \rightarrow \pm 0$), обратимся к уравнениям прямой и обратной задач рассеяния, ассоциированным с функцией Йоста Ψ_\pm . Как и ранее, запишем уравнения прямой задачи рассеяния (3.1.4), (3.1.7), (3.1.8) в интегральной форме:

$$\gamma(y_0, y'_0) = \gamma(\xi_0, \xi_0) - \frac{1}{4} \hat{G} \left[2\partial_y u \left(\partial_y \beta + \frac{\partial_x u}{4} \beta + \frac{\kappa}{2} \sin \frac{u}{2} \right) + \gamma(\partial_x \partial_y u - \mu) \right],$$

$$\begin{aligned}\beta(y_0, y'_0) &= \beta(\xi_0, \xi_0) + \frac{1}{4} \widehat{G} \left[2\partial_y u \left(\partial_y \gamma + \frac{\partial_x u}{4} \gamma + \frac{\kappa}{2} \cos \frac{u}{2} \right) - \beta(\partial_x \partial_y u - \mu) \right], \\ \kappa(y_0, y'_0) &= \kappa(\xi_0, \xi_0) + \frac{1}{4} \widehat{G} \left[\partial_y u \left(\gamma \sin \frac{u}{2} - \beta \cos \frac{u}{2} \right) + \kappa(\partial_x \partial_y u + \mu) \right].\end{aligned}\tag{4.2.23}$$

Здесь оператор \widehat{G} действует на функцию $f(y, y')$ по правилу

$$\begin{aligned}\widehat{G}f &\equiv -\frac{1}{2} \left[\int_{y_0}^{\xi_0} dy \int_{2\xi_0 - y}^{y-2\eta_0} dy' + \int_{\xi_0}^{\infty} dy \int_y^{y-2\eta_0} dy' \right] f(y, y') = \\ &= -\int_0^{\eta_0} d\eta \int_{\xi_0}^{\infty} d\xi f(\xi + \eta, \xi - \eta).\end{aligned}\tag{4.2.24}$$

Область в плоскости (y, y') , по которой производится интегрирование в (4.2.24), изображена на рис. 4.4.

Так как при $y > l$ подынтегральные выражения в (4.2.23) не имеют особенностей, рассмотрение, аналогичное приведенному, дает замкнутую однородную систему на функции $\gamma^\pm(y, y')$ и $\kappa^\pm(y, y')$, следовательно:

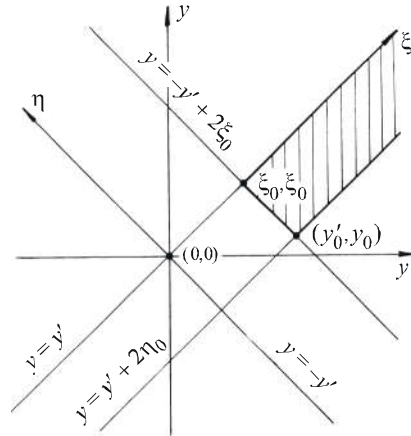
$$\gamma^\pm(y, y') = \kappa^\pm(y, y') = 0, \quad y > l.\tag{4.2.25}$$

Уравнения ОЗР (3.4.6), (3.4.10) выражают функции $\gamma(y, y')$, $\beta(y, y')$, $\kappa(y, y')$ через ядра $F_{m,n}(y)$ (3.4.7). Поскольку в данной задаче дискретный спектр отсутствует и $S_{22}(\alpha, \tau, x) \equiv 1$, формулы для $F_{m,n}(y)$ принимают простой вид:

$$F_{m,n}(y) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left(-\frac{2d\alpha}{\alpha\tau} \right) S_{12}(\alpha, \tau, x) w_1^m(\alpha) w_2^n(\alpha) \exp \frac{i\tau y}{4}.\tag{4.2.26}$$

Здесь интегрирование производится не по всему контуру Γ , а только по его части $\tilde{\Gamma}$, где $S_{12}^0(\alpha, \tau) \neq 0$. Как и ранее, из набора функций (4.2.26) функционально независимыми являются лишь $F_{0,0}(y)$ и $F_{1,1}(y)$. Более того, в результате простых замен переменной интегрирования в формуле (4.2.26) с учетом ограничений на S_{12} и Γ (3.1.19),

Рис. 4.4. Область интегрирования в формуле (4.2.24) – заштрихованная полоса, ограниченная линиями $y = y'$, $y = y' + 2\eta_0$, $y = -y' + 2\xi_0$



(4.1.13) нетрудно получить важное следствие. Оказывается, ядра $F_{m,n}(y)$ ОЗР (3.4.6), (3.4.10) выражаются через ядра $\Phi_{m,n}(y)$ задачи рассеяния (4.1.2), (4.1.3):

$$\begin{aligned} \Phi_{1,1}(y) &= -F_{1,1}(y), \\ \Phi_{0,0}(y) &= -F_{0,0}(y). \end{aligned} \quad (4.2.27)$$

Соотношения (4.2.27) позволяют использовать для уточнения вида функции $\Phi_{0,0}(y)$ уравнения ОЗР (3.4.6), (3.4.10). Согласно (4.2.25), в области $y > l$ при $x \rightarrow 0$ первые уравнения систем (3.4.6), (3.4.10) редуцируются к однородным и дают

$$-F_{0,0}^{\pm}(y) = \Phi_{0,0}^{\pm}(y) = 0, \quad y > l. \quad (4.2.28)$$

Объединяя выражения (4.1.17), (4.2.22), (4.2.28), для интересующей нас функции $\Phi^{\pm}(y)$ имеем

$$\Phi^{\pm}(y) = \begin{cases} 0, & |y| > l \\ \pm f, & |y| < l \end{cases} \quad (4.2.29)$$

Приведем аргументы в пользу того, что в формуле (4.2.29) $f = \text{const}$. С этой целью с помощью (4.2.15) преобразуем выражение для $\partial_s \Phi(s, x)$ (4.1.20) к виду

$$\begin{aligned} \partial_s \Phi(s, x) &= -2 \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{R+s} dy \left\{ \partial_y u \left[a(y, y') \sin \frac{u(y, x)}{2} - b(y, y') \cos \frac{u(y, x)}{2} \right] + \right. \\ &\quad \left. + (\partial_x \partial_y u + \mu(y, x)) h(y, y') \right\} \Big|_{y'=y-2R}. \end{aligned} \quad (4.2.30)$$

Поскольку $(\partial_y u)^{\pm} = 0$ всюду за исключением окрестности точек $y = \pm l$, в правой части (4.2.30) интегрирование первого слагаемого при $x \rightarrow \pm 0$ осуществляется фактически по конечному интервалу

оси y . Во втором слагаемом в пределе $x \rightarrow \pm 0$ имеем $h^\pm(y, y') = 0$ при $y < -l$ (см. (4.2.21)). Кроме того, из асимптотического поведения поля $u(x, y)$ (4.2.6), (4.2.7) следует:

$$\sigma^\pm(y) \equiv (\partial_x \partial_y u + \mu(y))^\pm \rightarrow 0, \quad y \rightarrow \pm\infty. \quad (4.2.31)$$

При достаточно быстром убывании $\sigma^\pm(y)$ можно считать, что подынтегральное выражение во втором слагаемом также имеет ограниченный носитель. Тогда, поскольку $a(y, y'), b(y, y'), h(y, y') \rightarrow 0$ ($y' \rightarrow -\infty$), для конечных значений y имеем

$$\partial_y \Phi^\pm(y) = 0$$

и, следовательно, в (4.2.29) $f = \text{const}$. Приведенное доказательство предполагает достаточно быстрое убывание функции $\sigma^\pm(y)$ при $y \rightarrow +\infty$. Если этого не требовать, то из соотношений (4.2.30), (4.2.31) тем не менее можно заключить, что $\partial_y^2 \Phi^\pm(y) = 0$ при конечных значениях y , а значит, $\Phi^\pm(y) = f + f_1 y; f, f_1 = \text{const}$. Выбор $f_1 = 0$ оправдывается далее верным асимптотическим поведением поля диполя при $r \rightarrow \infty$ (см. ниже), а также самосогласованностью полученных результатов.

Поскольку функциональная зависимость $\Phi^\pm(y)$ теперь известна (4.2.29), с помощью преобразования Фурье $\int_{-\infty}^{\infty} dy \exp \frac{i\tau y}{2} \Phi^\pm(y)$ находим:

$$[S_{21}(\alpha, \tau)]^\pm = \pm \frac{4w_1 w_2 f \sin(\tau l / 2)}{\tau [i\tau - \partial_x u_0(x=0)]} \quad (4.2.32)$$

и, следовательно, (см. (4.1.5)):

$$[S_{21}^0(\alpha, \tau)]^\pm = \mp \frac{4w_1 w_2 f \sin(\tau l / 2)}{\tau [\tau^2 + (\partial_x u_0(x=0))^2]^{1/2}}. \quad (4.2.33)$$

В рассматриваемой задаче $\partial_x u_0(x \rightarrow \pm 0) = -2k'/k$. Заметим, что участки контура Γ , где $S_{21}^0 \neq 0$ и определяется выражением (4.2.33), отличаются от таковых для $S_{12}^0(\alpha, \tau)$.

4.2.4. Определение параметра f по асимптотическому поведению поля $u(x, y)$ вблизи центров вихрей

Для определения постоянной f в (4.2.33) вычислим главный член асимптотического разложения функции $S_{21}(\alpha, \tau, x)$ при $\tau \rightarrow \infty$. Матрица перехода S может быть представлена через Ψ_- в форме, удобной для анализа ее асимптотики при $\tau \rightarrow +\infty$:

$$S(\alpha, \tau) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \Psi_+^{-1} \Psi_- = I + \int_{-\infty}^{\infty} dy \Psi_0^{-1}(y) [L(y) - L_0(y)] \Psi_-(y),$$

где

$$L - L_0 = \frac{1}{2} \left\{ -\frac{\sigma_3}{2} \partial_x (u - u_0) - \sigma_1 w_2 \left(\cos \frac{u}{2} - \cos \frac{u_0}{2} \right) + i w_1 \sigma_2 \left(\sin \frac{u}{2} - \sin \frac{u_0}{2} \right) \right\}.$$

Отсюда находим

$$S_{21} = \int_{-\infty}^{\infty} dy \left\{ (\Psi_-)_{11} \left[(\Psi_0^{-1})_{21} (L - L_0)_{11} + (\Psi_0^{-1})_{22} (L - L_0)_{21} \right] + (\Psi_-)_{21} \left[(\Psi_0^{-1})_{21} (L - L_0)_{12} + (\Psi_0^{-1})_{22} (L - L_0)_{22} \right] \right\}. \quad (4.2.34)$$

Существенно, что на контуре $\tilde{\Gamma}$ переменные α и τ связаны однозначно. При $\tau \rightarrow \infty$ ($\lambda \rightarrow iK' + 0$) имеем

$$\alpha = \tau + O(\tau^{-1}), \quad \alpha^{-1} = \tau^{-1} + O(\tau^{-3}), \quad w_1 = \frac{\tau}{2} + O(\tau^{-1}), \quad w_2 = \frac{\tau}{2i} + O(\tau^{-1});$$

$$\begin{aligned} (\Psi_-)_{11} &= \exp\left(\frac{i}{4}(\tau y - u - u_0)\right) \left\{ -\frac{i\tau}{2} + O(1) \right\}, \\ (\Psi_-)_{21} &= \exp\left(\frac{i}{4}(\tau y + u - u_0)\right) \left\{ -\frac{i\tau}{2} + O(1) \right\}. \end{aligned} \quad (4.2.35)$$

Последние две формулы (4.2.35) следуют из (3.1.5), (3.1.20).

Используя выражения (4.2.34), (4.2.35), для интересующего нас коэффициента S_{21} в главном приближении находим

$$S_{21} \approx -\left(\frac{\tau}{4} + O(1)\right) \int_{-\infty}^{\infty} dy \sin\left(\frac{u-u_0}{4}\right) \exp\frac{i\tau}{2}y. \quad (4.2.36)$$

Предельные значения полей $u(x, y)$ и $u_0(x)$ при $x \rightarrow +0$ нам известны из выражений (4.2.5), (4.2.7), поэтому из формулы (4.2.36) в пределе $x \rightarrow +0$ находим

$$S_{21} \approx -\frac{\tau}{4} \int_{-\infty}^{\infty} dy \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \exp\frac{i\tau}{2}y = -2 \sin\frac{\pi}{4} \sin\frac{\tau l}{2}. \quad (4.2.37)$$

Кроме того, непосредственно из соотношений (4.1.5), (4.2.33) имеем

$$S_{21} \rightarrow -f \sin\frac{\tau l}{2}, \text{ при } \tau \gg 1, x \rightarrow +0. \quad (4.2.38)$$

Сравнение результатов (4.2.37), (4.2.38) позволяет фиксировать значение постоянной f : $f = 2 \sin \pi/4$. Приведенный расчет более аккуратен, чем вычисления [25], поэтому дает другое значение параметра f .

Поскольку данные рассеяния для несолитонного вихревого дipoля (4.2.2) – (4.2.7) установлены, вычисление поля $u(x, y)$ такого существенно нелинейного двумерного дефекта, анализ его взаимодействия со сверхструктурой из солитонных линий сведены к решению одномерных линейных интегральных уравнений (4.1.1), (4.1.2) с известными ядрами. Представление (4.1.1), (4.1.2) дает полное решение краевой задачи (4.2.2) – (4.2.7) и может быть исследовано асимптотическими и численными методами.

В заключение раздела приведем явное выражение для функции $\Phi(x, y)$, которая определяет асимптотическое поведение поля $u(x, y)$ диполя (4.2.2) – (4.2.7) при $r \rightarrow \infty$. Мы показали, что в данной задаче нет резонансной области [31] и асимптотическое поведение u определяется линейным приближением (4.1.17). Согласно (4.1.17), (4.1.5), (4.2.33), имеем

$$\Phi(x, y) = \frac{f \operatorname{sign} x}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \left[\frac{\tau^2 + (\partial_x u_0)^2}{\tau^2 + (\partial_x u_0(x=0))^2} \right]^{1/2} \exp\left\{-|\chi|\varphi(\tau) - \frac{i\tau y}{2} + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + \sigma(|\chi| + K, \tau) \left\} \frac{1}{\tau} \sin \frac{\tau l}{2}, \\
 \sigma(|\chi| + K, \tau) &= \frac{1}{2} \ln \frac{\theta_4 \left[(F(\beta, k) + K + |\chi|) / 2K \right]}{\theta_4 \left[(F(\beta, k) - K - |\chi|) / 2K \right]}, \\
 \varphi(\tau) &= \frac{k|\tau| \left[\frac{\tau^2 + (2k'/k)^2}{\tau^2 + (2/k)^2} \right]^{1/2}}{2} + Z(\beta, k). \quad (4.2.39)
 \end{aligned}$$

При переходе от (4.1.17) к (4.2.39) и вычислении эллиптического интеграла третьего рода в (4.1.5) мы учли ограничения на контур Γ (4.1.13), воспользовались соотношением $2da/(\alpha\tau) = d\tau/(2iw_1w_2)$ и формулой [32]:

$$-\frac{iw_1w_2\tau}{2} \operatorname{sign} x \int_0^{|\chi|} \frac{dx'}{w_1^2 - \cos^2 u_0(x')/2} = -|\chi| \varphi(\tau) + \sigma(|\chi| + K, \tau). \quad (4.2.40)$$

В выражениях (4.2.39), (4.2.40) поле $u_0(x)$ определяется формулами (4.2.6), (4.2.7); $\cos^2 u_0/2 = \operatorname{cd}^2 \chi$; $\partial_x u_0 = -2k/(k \operatorname{dn} \chi)$; $\chi = x/k$; параметр тета-функций Якоби $q = \exp(-\pi K'/K)$; K', K – полные эллиптические интегралы первого рода; $F(\beta, k)$ – неполный эллиптический интеграл первого рода; $Z(\beta, k)$ – зета-функция Якоби [32, 33]; $\beta = \operatorname{arcsin} [1 + (k\tau/2)^2]^{-1/2}$.

4.3. ДРУГИЕ ТИПЫ ВИХРЕВЫХ ДИПОЛЕЙ В РЕШЕТКЕ СОЛИТОНОВ

Я позволю себе сравнить науку с библиотекой, которая должна непрерывно расширяться; но библиотекарь располагает для своих приобретений лишь ограниченными кредитами; он должен стараться не тратить их понапрасну. Такая обязанность делать приобретения лежит на экспериментальной физике, которая одна лишь способна обогащать библиотеку. Что касается математической физики, то ее задача в составлении каталога. Если каталог составлен хорошо, то библиотека не делается от этого богаче, но читателю облегчается пользование ее сокровищами. С другой стороны, каталог, указывая библиотекарю на пробелы в его собраниях, позволяет ему дать его кредитам рациональное употребление; а это тем более важно ввиду их совершенной недостаточности. Итак, вот в чем значение математической физики. Она должна руководить обобщением, руководить так, чтобы от этого увеличивалась производительность науки.

А. Пуанкаре. Наука и гипотеза

Изложенная процедура допускает обобщение и позволяет описать широкий класс вихревых диполей с произвольными топологическими зарядами на фоне кноидальной волны (2.3.6). Для этих диполей характерна определенная симметрия расположения вихрей в решетке солитонных линий. Мы рассмотрим диполи, поле которых обладает симметрией более общей, чем (4.2.4):

$$u(x, y) = 2\pi p - u(-x, y), \quad (4.3.1)$$

здесь p – целое число. Обсудим вначале возможные дипольные конфигурации, совместимые с симметрией (4.3.1) и выбором разреза в форме (4.2.1). Далее для определенности будем считать, что в точке с координатами $(0, -l)$ находится вихрь с топологическим зарядом q , а в точке $(0, l)$ – вихрь с зарядом $-q$. Тогда на разрезе S имеем

$$u^+ - u^- = -2\pi q. \quad (4.3.2)$$

Как и ранее, соотношения (4.3.1), (4.3.2) задают предельные значения поля $u(x, y)$ на оси y ($y \neq \pm l$) (рис. 4.5):

$$u^+ = \begin{cases} \pi(p-q), & |y| > l, \\ \pi p, & |y| < l, \end{cases} \quad u^- = \begin{cases} \pi(p+q), & |y| > l, \\ \pi p, & |y| < l, \end{cases}$$

$$(\partial_x u)^+ = (\partial_x u)^-, \quad (\partial_y u)^\pm = 0. \quad (4.3.3)$$

С условиями (4.3.3) согласуется следующее асимптотическое поведение поля $u(x, y)$ при $y \rightarrow \infty$:

$$u_0(x) = 4 \operatorname{Arctg} \frac{\operatorname{cn}[\chi + K(1 + q \operatorname{sign} x - p)]}{1 + \operatorname{sn}[\chi + K(1 + q \operatorname{sign} x - p)]}, \quad \chi = \frac{x}{k}. \quad (4.3.4)$$

Напомним, что значения поля $u_0 = \pi(2n + 1)$, где n – целое, соответствуют центрам 2π -солитонов (центрам доменных границ), а значения $u_0 = 2\pi l$ отвечают центрам протяженных областей между соседними доменными границами, т.е. центрам доменов (см. рис. 4.2). С учетом этого замечания простой анализ топологических свойств поля $u(x, y)$ приводит к заключению, что диполи с краевыми условиями (4.3.3), (4.3.4) образуются в результате вставки отрезков солитонных линий в центр либо одной из доменных границ решетки, либо одного из полосовых доменов солитонной сверхструктуры. Выбор между двумя возможностями зависит от соотношения чисел p и q .

а. Когда числа p и q оба четные или оба нечетные, в центр одного из доменов солитонной сверхструктуры вставлено $|q|$ дополнительных отрезков солитонных линий. Концы солитонных отрезков смыкаются в точках с координатами $(0, \pm l)$.

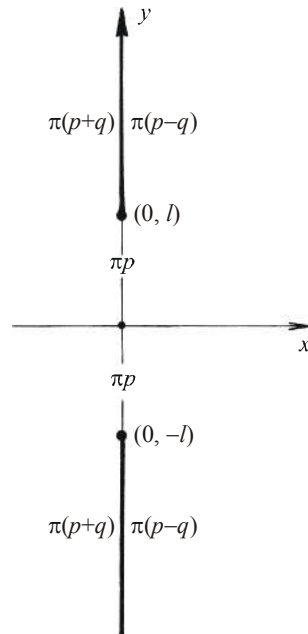


Рис. 4.5. Значения поля $u(x, y)$ на оси Oy для вихревого диполя с зарядами $\pm q$. Поле обладает симметрией (4.3.1). Разрез $S_v = \{x = 0, |y| > l\}$

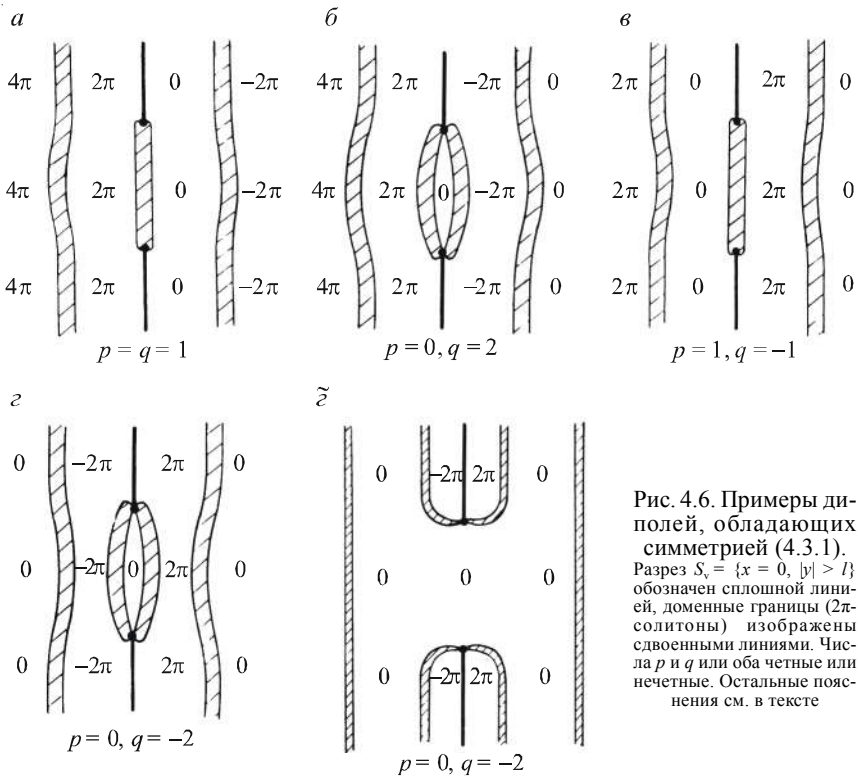


Рис. 4.6. Примеры диполей, обладающих симметрией (4.3.1). Разрез $S_c = \{x = 0, |y| > l\}$ обозначен сплошной линией, доменные границы (2π -солитоны) изображены двоянными линиями. Числа p и q или оба четные или нечетные. Остальные пояснения см. в тексте

Полярности отрезков 2π -солитонов при $q > 0$ ($q < 0$) совпадают (противоположны) с полярностью солитонных линий решетки. Случай $p = q = 1$ соответствует рассмотренному диполю (4.2.1) – (4.2.7) (см. рис. 4.1). Примеры других конфигураций представлены на рис. 4.6.

При изображении вихревых диполей мы учли, что солитонные линии одной полярности отталкиваются, а противоположной – притягиваются. Эти взаимодействия определяют характер деформаций солитонной сверхструктуры в ближайшей окрестности каждого из диполей и наводят на мысль, что некоторые из конфигураций могут стать нестабильными при достижении диполями критических размеров.

В частности, для диполя, изображенного на рис. 4.6, \tilde{z} , при сближении солитонных линий разной полярности возможны их частич-

ная аннигиляция и перезамыкание. В результате диполь изменит свою внутреннюю структуру (при сохранении величины топологических зарядов $q = \pm 2$) и примет вид, представленный на рис. 4.6, *з*. Далее для определенности будем говорить лишь о диполях, сформированных с помощью отрезков солитонных линий конечной длины. Однако мы не исключаем возможности изменения структуры перечисленных далее диполей в результате частичной аннигиляции и перезамыкания солитонных линий.

Заметим, что диполи с $p = 0$, $q = \pm 2$ допускают также другую интерпретацию. Их можно рассматривать как результат вставки в полосовую доменную структуру отрезка домена конечной длины (см. рис. 4.6, *б*, *з*) или двух полубесконечных доменов (см. рис. 4.6, *э*). Геометрия этих конфигураций определяется эффектами натяжения доменных границ и их взаимодействия. Интересно, что в полосовой доменной структуре ферромагнетика подобные дефекты наблюдались экспериментально в пленках феррит-гранатов $(\text{YGdYbBi})_3(\text{FeAl})_5\text{O}_{12}$ [34]. В терминах ферромагнетика точкам обрыва доменов ($x = 0$, $y = \pm l$) отвечают блоховские линии. Вдоль них происходит смыкание двух блоховских доменных границ с противоположными направлениями вращения вектора намагниченности.

б. Когда одно из чисел p , q является четным, а другое – нечетным, диполь формируется путем вставки $|q + 1|$ отрезков 2π -солитонов в одну из солитонных линий решетки (2.3.6). Полярности этих отрезков при $q > 0$ ($q < 0$) совпадают (противоположны) с полярностью солитонов решетки. В окрестности точек с координатами $(0, -l)$ и $(0, +l)$ солитонные отрезки сливаются и образуют две полубесконечные солитонные линии, полярности которых совпадают с таковыми бесконечных солитонных линий решетки (2.3.6) (рис. 4.7). В частности, при $p = 0$, $q = -1$ (см. рис. 4.7, *б*) диполь образован двумя полубесконечными солитонными линиями. Интересно, что при $p = 1$, $q = -2$ (см. рис. 4.7, *в*) полю $u(x, y)$ в терминах доменной структуры ферромагнетика отвечает наличие двух блоховских линий в одной из доменных границ плоскопараллельной доменной структуры.

Обратим внимание на следующее обстоятельство. Тот же самый диполь с зарядами q и $-q$ в точках $(0, -l)$ и $(0, l)$ соответственно можно описать с помощью другой формы разреза в плоскости (x, y) :

$$S_v = \{x = 0, |y| \leq l\}. \quad (4.3.5)$$

Тогда на разрезе вместо условия (4.3.2) имеем

$$u^+ - u^- = 2\pi q. \quad (4.3.6)$$

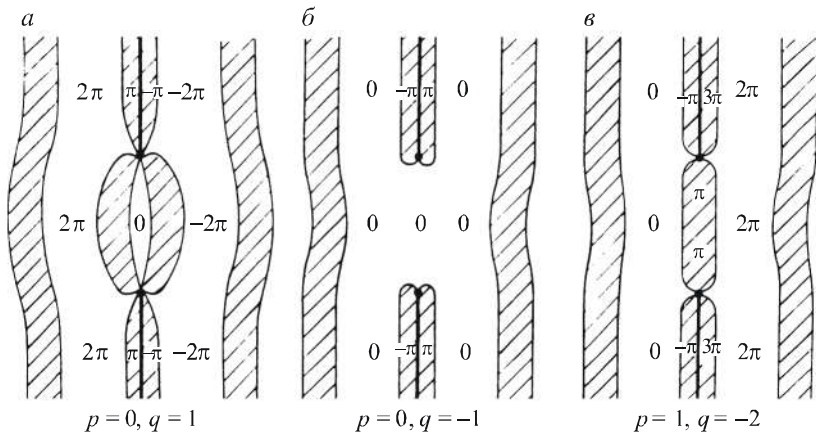


Рис. 4.7. Примеры диполей, обладающих симметрией (4.3.1).
Одно из чисел p, q четное, другое нечетное. Остальные пояснения см. в тексте

Совместно с (4.3.1) это дает другие предельные значения поля $u(x, y)$ на оси y ($y \neq \pm l$):

$$u^+ = \begin{cases} \pi(p+q), & |y| < l, \\ \pi p, & |y| > l, \end{cases} \quad u^- = \begin{cases} \pi(p-q), & |y| < l, \\ \pi p, & |y| > l, \end{cases}$$

$$(\partial_x u)^+ = (\partial_x u)^-, \quad (\partial_y u)^\pm = 0. \quad (4.3.7)$$

Поэтому на первый взгляд может показаться, что результат вычисления поля $u(x, y)$ зависит от способа введения разреза. Однако условия (4.3.7) задают другое асимптотическое значение поля $u(x, y)$ при $r \rightarrow \infty$:

$$u_0(x) = 4 \operatorname{Arctg} \frac{\operatorname{cn}[\chi + K(1-p)]}{1 + \operatorname{sn}[\chi + K(1-p)]}. \quad (4.3.8)$$

Здесь x может принимать любые вещественные значения. Анализ показывает, что в итоге мы получаем набор диполей, эквивалентный уже рассмотренному (с точностью до физически ненаблюдаемого скачка поля $u(x, y)$ на разрезах на величину, кратную 2π). При выборе разреза в форме (4.3.5) все решения уравнения (3.1) распадутся на два класса в зависимости от свойств только одного числа p . Как и ранее, полярности солитонных отрезков, участвующих в фор-

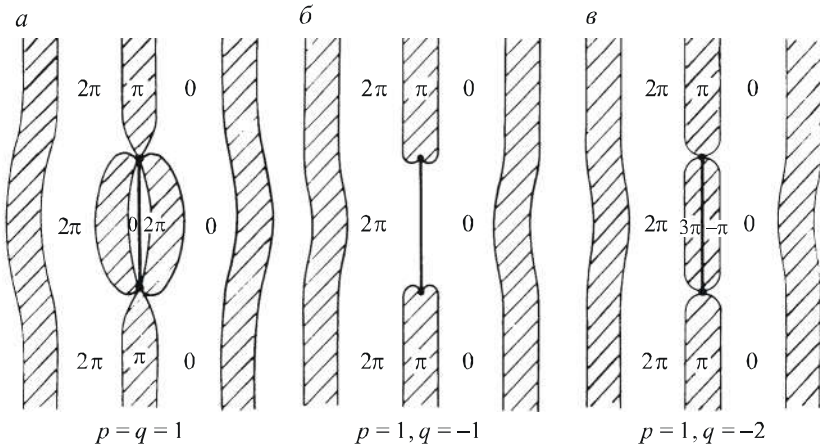


Рис. 4.8. Дипольные конфигурации при выборе разреза в форме (4.3.5). Разрез обозначен сплошной линией, 2π -солитоны изображены двоянными линиями. Число p нечетное. Остальные пояснения см. в тексте

мировании диполя, при $q > 0$ ($q < 0$) совпадают (противоположны) с полярностью солитонов решетки (2.3.6).

а. Когда число p – нечетное, диполь образуется путем вставки в одну из солитонных линий решетки $|q + 1|$ дополнительных отрезков 2π -солитонов. Примеры представлены на рис. 4.8.

б. Когда p – четное, диполь образуется путем вставки в центр одного из доменов структуры (2.3.6) $|q|$ дополнительных отрезков 2π -солитонов. Соответствующие конфигурации даны на рис. 4.9.

Как видим (ср. рис. 4.6–4.9), диполи, полученные при другом введении разреза, топологически эквивалентны (по $\text{mod } 2\pi$) уже рассмотренным. В следующем подразделе изложена процедура аналитического описания перечисленного семейства диполей, приведены конкретные формулы при выборе разреза в формах (4.2.1), (4.3.5). Из этих формул непосредственно следует, что при одинаковых (по $\text{mod } 2\pi$) краевых условиях задачи результат вычисления поля $u(x, y)$ не зависит от способа введения разреза.

Заметим также, что среди перечисленных диполей имеются конфигурации с $q = \pm 1$ (см. рис. 4.7, а, б; 4.8, а, б), которые отличаются от диполя, описанного нами с помощью выражений (4.2.1) – (4.2.7). Такие диполи образованы путем вставки в солитонную решетку не отрезка солитона конечной длины, а двух полубесконечных солитонных линий. Они имеют другое асимптотическое пове-

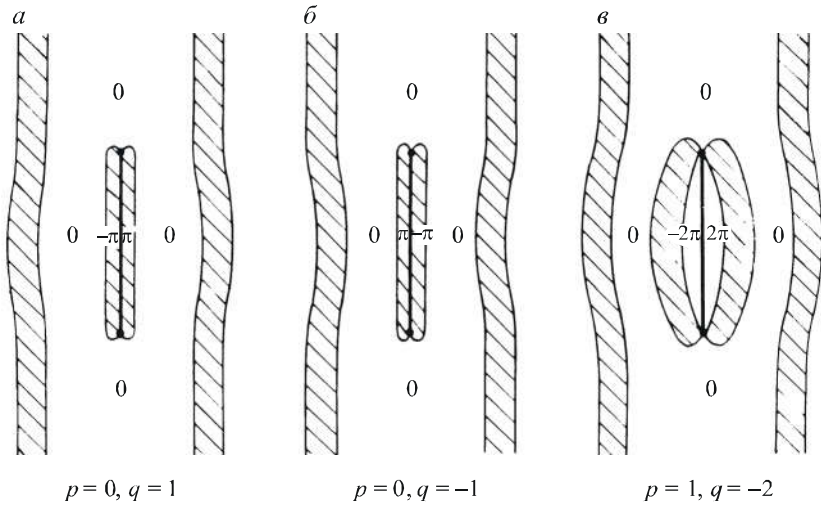


Рис. 4.9. Примеры диполей при четном p и выборе разреза в форме (4.3.5)

дение поля $u(x, y)$ при $y \rightarrow \pm\infty$ и соответствуют другим решениям уравнения (3.1).

Описание диполей с произвольным топологическим зарядом

Схема вычисления спектральной функции $S_{21}^0(\alpha, \tau)$ для диполей с краевыми условиями (4.3.3), (4.3.4) или (4.3.7), (4.3.8) во многом повторяет изложенную ранее для диполя (4.2.1) – (4.2.7). Характерные особенности указаны ниже.

Вследствие симметрии (4.3.1) функции Иоста, заданные в полуплоскостях $x > 0$ и $x < 0$, оказываются связанными между собой:

$$\Psi_{\pm}(x, y, \alpha, \tau) = (-\sigma_3)^{p+1} \Psi_{\pm}(-x, y, \alpha^{-1}, \tau). \quad (4.3.9)$$

Для ядер операторов преобразования соотношение (4.3.9) дает

$$a(y, y', -x) = (-1)^{p+1} a(y, y', x), \quad b(y, y', -x) = (-1)^p b(y, y', x),$$

$$f(y, y', -x) = f(y, y', x), \quad h(y, y', -x) = -h(y, y', x). \quad (4.3.10)$$

Ограничения на функции γ , β , κ , Φ получаются из формул (4.3.10) формальной заменой (3.1.7).

Редукции на матрицу перехода S , функции $\Phi_{0,0}$, $\Phi_{1,1}$, Φ сохраняют прежний вид (4.2.11) – (4.2.13) (при любых значениях числа p). Не изменятся и ограничения на контур Γ (4.1.13). Интересно, что варианты (4.2.1) и (4.3.5) выбора разреза изменяют промежуточные вычисления, но не влияют на предельные значения функции $\Phi(x, y)$ (4.2.29). Пусть для определенности разрез задан формулой (4.2.1). Когда число p – нечетное, анализ уравнений прямой и обратной задач рассеяния совпадает с изложенным для диполя (4.2.1) – (4.2.7) и поэтому дает выражение (4.2.29) для $\Phi^\pm(y)$. При четном p из уравнений прямой задачи рассеяния вместо (4.2.21), (4.2.25) получаем

$$\begin{aligned} b^\pm(y, y') &= h^\pm(y, y') = 0, \quad y < -l; \\ \beta^\pm(y, y') &= \kappa^\pm(y, y') = 0, \quad y > l. \end{aligned} \quad (4.3.11)$$

Однако и в этом случае вторые уравнения систем (4.1.2), (4.1.3) и (3.4.6), а также первое из формул (3.4.10) редуцируются к однородным и воспроизводят прежний результат:

$$\Phi^\pm(y) = 0, \quad |y| > l.$$

В конечном счете при любых значениях числа p получаем формулу (4.2.29) для предельных значений функции $\Phi(x, y)$, а спектральная функция $S_{21}^0(\alpha, \tau)$ при любых значениях p и q может быть записана в форме (4.2.33). В соответствии с условиями (4.3.4) в выражении (4.2.33) следует положить: 1) $\partial_x u_0(x \rightarrow \pm 0) = -2k'/k$, когда числа p и q оба нечетные или оба четные; 2) $\partial_x u_0(x \rightarrow \pm 0) = -2/k$, когда одно из чисел p, q четное, а другое нечетное. Кроме того, поскольку изменяется асимптотическое поведение поля $u(x, y)$ на оси y , в выражение (4.2.33) входит другое значение параметра f : $f = 2\sin\pi q/4$.

Аналогичное рассмотрение при другом выборе разреза (4.3.5) снова приводит к выражению (4.2.33) для спектральной функции $S_{21}^0(\alpha, \tau)$. В этом случае в (4.2.33) $f = 2\sin\pi q/4$, а значение производной $\partial_x u_0(x = 0)$ зависит только от значения числа p : 1) $\partial_x u_0(x = 0) = -2/k$ при нечетном p ; 2) $\partial_x u_0(x = 0) = -2k'/k$ при четном p .

Явный вид функции $\Phi(x, y)$, характеризующей асимптотическое поведение поля диполя при $r \rightarrow \infty$, задает функция $u_0(x)$ (см. (4.1.5), (4.1.17)). В конечном счете находим

$$\Phi(x, y) = \frac{f \operatorname{sign} x}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \left[\frac{\tau^2 + (\partial_x u_0)^2}{\tau^2 + (\partial_x u_0^\pm)^2} \right]^{1/2} \times \\ \times \exp \left\{ -|\chi| \varphi(\tau) - \frac{i\tau y}{2} + \sigma(|\chi| + \delta K, \tau) \right\} \frac{1}{\tau} \sin \frac{\tau l}{2}. \quad (4.3.12)$$

При выборе разреза в форме (4.2.1) в (4.3.12) следует считать: 1) $\delta = 1$, если оба числа p и q четные или нечетные; 2) $\delta = 0$, если одно из чисел p, q четное, а другое нечетное. Определения функций $\varphi(\tau)$ и $\sigma(|\chi|, \tau)$ такие же, что в формуле (4.2.39). При другом способе введения разреза (4.3.5) имеем: 1) $\delta = 1$ при нечетном p ; 2) $\delta = 0$ при четном p . Значения производной $\partial_x u_0$ задаются условиями (4.3.4) или (4.3.8).

В частности, при выборе разреза (4.3.5) для диполя с $q = \pm 1$, образованного введением двух полубесконечных солитонных линий в решетку солитонов (см. рис. 4.8, б, $p = 1, q = -1$) в (4.3.12) следует положить $\delta = 0, \partial_x u_0 = -2 \operatorname{dn} \chi/k$.

Заметим, что численные расчеты поля диполя, представляющего две оборванные солитонные линии на однородном фоне, свидетельствуют о нестабильности такой конфигурации [35]. А именно, при расчетах поля $u(x, y)$ методом релаксации солитонные линии замыкаются на бесконечности и стягиваются в отрезок солитона конечной длины. Поскольку в периодической структуре иной характер нелинейных взаимодействий, диполь, образованный введением полубесконечных солитонных линий в решетку солитонов (рис. 4.8, б), может оказаться стабильным.

С помощью соотношений, полученных в этом пункте, можно проверить, что для топологически эквивалентных (по $\operatorname{mod} 2\pi$) конфигураций результат вычисления поля $u(x, y)$ не зависит от выбора разреза.

4.4. АНАЛИЗ АСИМПТОТИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ ПОЛЯ ДИПОЛЯ ПРИ $r \rightarrow \infty$

Всякая точная наука основывается на приближительности.

Б. Рассел

Выражения (4.2.39), (4.3.12), определяющие поле $u(x, y)$ на больших расстояниях от диполя, не удобны для анализа, так как представлены в форме интегралов. В этом разделе мы получим эффективные формулы для главных членов разложения поля диполя при $r \rightarrow \infty$, удобные для экспериментальной проверки результатов. Для определенности рассмотрим диполь (4.2.1) – (4.2.7). Вычисления основаны на использовании аналитических свойств подынтегральной функции в (4.2.39) и сводятся к применению метода перевала на римановой поверхности R . Хотя с первого взгляда формула (4.2.39) содержит достаточно сложные степенные выражения, все зависящие от (α, τ) функции в (4.2.39) не имеют ветвлений на поверхности тора R . Аналитические свойства яснее в λ -параметризации (3.1.10), если переписать (4.2.39) через тета-функции (см. также (3.1.38)). Переход к новым переменным интегрирования легче осуществить в первоначальных формулах (4.1.5), (4.1.17), (4.2.33) для $\Phi(x, y)$. В преобразованиях задействованы формула (3.4.8) и соотношения

$$-\frac{i w_1 w_2 \tau}{2} \int_0^x \frac{dx'}{w_1^2 - \cos^2 u_0 / 2} = -\chi Z(\lambda) + \frac{1}{2} \ln \frac{\theta_2((\lambda + \chi)/2K)}{\theta_2((\lambda - \chi)/2K)} \equiv p(\lambda, \chi); \quad (4.4.1)$$

$$\frac{\tau^2 + (\partial_x u_0)^2}{\tau^2 + (\partial_x u_0(x=0))^2} = \frac{\theta_3^2(0)}{\theta_3^2(|\chi|/2K) \theta_2^2(\lambda/2K)} \theta_2 \left[\frac{\lambda - |\chi|}{2K} \right] \theta_2 \left[\frac{\lambda + |\chi|}{2K} \right]. \quad (4.4.2)$$

Тождество (4.4.2), как и все подобные формулы этой работы, доказывается сравнением нулей, полюсов и трансформационных свойств мероморфных функций в левой и правой частях равенства (4.4.2) (см. [36]). В (4.4.2) параметр тета-функций $q = \exp[-\pi K'/K]$, $Z(\lambda)$ – зета-функция Якоби [32, 33], $\cos^2 u_0 / 2 = \text{cd}^2 \chi$, $\partial_x u_0 = -2k'/(k \text{dn} \chi)$, $\chi = x/k$.

Свойство симметрии $p(\lambda, -\chi) = p(-\lambda, \chi)$ позволяет объединить выражения для $\Phi(x, y)$ при $x > 0$ и $x < 0$ в форме, удобной для вычислений:

$$\Phi(x, y) = \frac{f \operatorname{sign} x}{\pi i} \left[\int_{0+iK'}^{-K+iK'} + \int_{-K-iK'}^{0-iK'} \right] d\lambda \varphi(|\chi|, \lambda) \exp A(|\chi|, y, \lambda),$$

$$\varphi(|\chi|, \lambda) = \frac{\theta_2((\lambda - |\chi|)/2K) \theta_3(0)}{\theta_2(\lambda/2K) \theta_3(|\chi|/2K)} \operatorname{sh} \frac{\operatorname{ldn} \lambda}{k} \frac{k^2 \operatorname{sn} \lambda \operatorname{cn} \lambda}{\operatorname{dn} \lambda}, \quad (4.4.3)$$

$$A(|\chi|, y, \lambda) = |\chi| Z(\lambda) + y \operatorname{dn} \lambda / k.$$

Здесь интегрирование проводится по контуру C_0 , состоящему из двух отрезков: $\lambda = t \pm iK'$, $-K \leq t \leq 0$. Для дальнейшего важно, что, поскольку подынтегральное выражение в (4.4.3) представлено двойкопериодическими функциями с периодами $[2K, 4iK']$, вместо этих отрезков можно выбрать другие, эквивалентные по модулю периодов. Далее, кроме C_0 будем использовать контур $\tilde{C}_0 = \{\lambda = t + iK', \lambda = t + 3iK', -K \leq t \leq 0\}$.

Аналитичность подынтегральных функций в окрестности C_0 наводит на мысль продеформировать контур интегрирования C_0 в контур, наиболее удобный для асимптотических оценок. Заметим, что возможность аналитического продолжения функций с контура C_0 или \tilde{C}_0 в ту или иную область зависит от знака y . Поступим следующим образом. При $y < 0$ замкнем отрезки C_0 произвольными кривыми C_1 и C_2 так, чтобы внутри образовавшейся области G_1 подынтегральная функция оставалась аналитической. Это можно сделать в прямоугольнике $\lambda = t + is$, $-K < t < 0$, $-K' < s < K'$, где имеем $\operatorname{Re} \operatorname{dn} \lambda > 0$, $\operatorname{Re} Z(\lambda) < 0$ [32], и, следовательно, под интегралом при $r \rightarrow \infty$ ($y < 0$) не возникает проблем с аналитическим продолжением функции $\exp A(y, |\chi|, \lambda)$. Полюсы y подынтегральных функций в этом прямоугольнике также отсутствуют. Обход G_1 по контуру $C_0 + C_1 + C_2$ определяется направлениями на C_0 (см. (4.4.3) и рис. 4.10, а). При $y > 0$ подынтегральная функция в область G_1 не продолжается, однако может быть продолжена в область G_2 , полученную в прямоугольнике $\lambda = t + is$, $-K < t < 0$, $K' < s < 3K'$ замыканием контура \tilde{C}_0 некоторыми другими кривыми C_1 и C_2 (см. рис. 4.10, б). Выбор кривых C_1 , C_2 и направление их обхода подчиняются прежним требова-

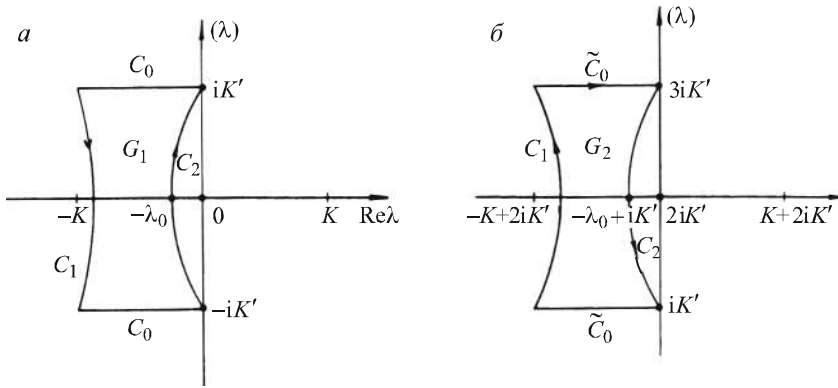


Рис 4.10. Два возможных варианта выбора контуров C_1 и C_2 в фундаментальном прямоугольнике. Пояснения см. в тексте

ниям. Тогда по теореме Коши о вычетах получаем полезное представление функции $\Phi(x, y)$:

$$\Phi(x, y) = -\frac{f \operatorname{sign} x}{\pi i} \left[\int_{C_1} + \int_{C_2} \right] d\lambda \varphi(|\chi|, \lambda) \exp A(y, |\chi|, \lambda). \quad (4.4.4)$$

Наша задача выбрать C_1 и C_2 так, чтобы максимум функции $\operatorname{Re} A(y, |\chi|, \lambda)$ на каждом из контуров C_1, C_2 достигался только в одной внутренней точке или на концах контура. Тогда асимптотику интеграла (4.4.3) при $r \rightarrow \infty$ можно вычислить с помощью метода Лапласа [37].

Возможные точки перевала функции $A(\lambda)$ определяются условием $\partial_\lambda A(\lambda) = 0$, которое сводится к квадратному уравнению для величины $\operatorname{cs}(\lambda)$ и дает:

$$\operatorname{cs}(\lambda) = \left(k^2 \frac{y}{|x|} \pm \gamma \right) / 2(1 - E/K),$$

$$\gamma^2 = \left[k^4 \left(\frac{y}{x} \right)^2 + 4 \left(\frac{E}{K} - (k')^2 \right) \left(1 - \frac{E}{K} \right) \right] > 0. \quad (4.4.5)$$

В стационарных точках вторая производная функции $A(\lambda)$ может быть записана в форме:

$$\begin{aligned} \partial_{\lambda}^2 A(\lambda) &= -\frac{|x| \operatorname{dn} \lambda}{k \operatorname{sn} \lambda \operatorname{cn} \lambda} \sigma(\lambda) = -\frac{ky \operatorname{dn} \lambda}{\operatorname{dn}^2 \lambda - E/K} \sigma(\lambda), \\ \sigma(\lambda) &= \operatorname{cn}^2 \lambda (1 - E/K) + \operatorname{sn}^2 \lambda (E/K - (k')^2). \end{aligned} \quad (4.4.6)$$

Анализ решений уравнений (4.4.5) зависит от знака переменной y . Пусть для определенности $y < 0$. Рассмотрим вначале решения

$$\operatorname{cs}(\lambda) \equiv i \operatorname{dn}(\lambda + iK') = -\left(k^2 \left|\frac{y}{x}\right| + \gamma\right) / 2(1 - E/K) < 0. \quad (4.4.7)$$

Согласно теоремам Лиувилля [36] (см. также [38]), в параллелограмме периодов $[2K, 4iK']$ полное число решений уравнения (4.4.7) совпадает с числом полюсов функции $\operatorname{dn} \lambda$ и, следовательно, равно двум. Нетрудно показать, что эти решения могут быть представлены в виде: $\lambda_1 = -\lambda_0$, $\tilde{\lambda}_1 = \lambda_0 + 2iK'$, $0 < \lambda_0 < K \pmod{[2K, 4iK']}$. При другом выборе знака в (4.4.5) стационарные точки определяет выражение ($y < 0$):

$$i \operatorname{dn}(\lambda + iK') = \left(\gamma - k^2 \left|\frac{y}{x}\right|\right) / 2(1 - E/K) > 0. \quad (4.4.8)$$

Его решения имеют вид: $\lambda_2 = \mu_0$, $\tilde{\lambda}_2 = -\mu_0 + 2iK'$, $0 < \mu_0 < K \pmod{[2K, 4iK']}$. В область G_1 попадает лишь $\lambda_1 = -\lambda_0$.

Проведем контур C_2 через точку $\lambda = \lambda_1$ так, чтобы он заканчивался в точках $\lambda = \pm iK'$. Тогда максимум функции $\operatorname{Re} A(\lambda)$ ($\lambda \in C_2$) достигается лишь в точке λ_1 , которая является внутренней точкой контура C_2 . В окрестности λ_1 линия наискорейшего спуска параллельна мнимой оси. В результате при $r \rightarrow \infty$ имеем [37]:

$$\int_{C_2} \varphi(\lambda) \exp A(\lambda) d\lambda = i \exp A(\lambda_1) \sqrt{\frac{2\pi}{\partial_{\lambda_1}^2 A(\lambda_1)}} \left[\varphi(\lambda_1) + O(r^{-1}) \right]. \quad (4.4.9)$$

Согласно (4.4.3), (4.4.6), $A(\lambda_1) < 0$, $\partial_{\lambda_1}^2 A(\lambda_1) > 0$, $\sigma(\lambda_1) > 0$, $\operatorname{dn}^2 \lambda_1 > E/K$.

Анализ показывает, что максимум функции $\operatorname{Re} A(\lambda)$ на контуре C_1 достигается в его конечных точках $\lambda = -K \pm iK'$. Преобразуем ин-

теграл по контуру C_1 в формуле (4.4.4) к виду, удобному для вычислений. С этой целью в подынтегральное выражение (4.4.4) введем представление

$$\frac{1}{\operatorname{dn}\lambda} \operatorname{sh} \frac{l \operatorname{dn} \lambda}{k} = \frac{1}{2k} \int_{-l}^l d\alpha \exp\left(-\alpha \frac{\operatorname{dn}\lambda}{k}\right). \quad (4.4.10)$$

Для вычислений потребуются следующие разложения ($y < 0$):

$$A(|\chi|, y, -K \pm iK' + \varepsilon) = \mp \frac{i\pi}{2K} |\chi| - \varepsilon \left(\frac{E}{K} |\chi| \pm \frac{ik'}{k} |y| \right) + O(\varepsilon^2); \quad (4.4.11a)$$

$$\varphi(|\chi|, -K \pm iK' + \varepsilon) =$$

$$= \mp \frac{ik'}{2k} \int_{-l}^l d\alpha \exp\left(\mp \frac{i\alpha k'}{k} \varepsilon\right) \frac{1}{\operatorname{dn}|\chi|} \exp\left(\pm \frac{i\pi}{2K} |\chi|\right) + O(\varepsilon). \quad (4.4.11б)$$

При получении (4.4.11б) воспользовались формулой (4.4.10) и тождеством

$$\left. \frac{\theta_2((\lambda - |\chi|)/2K) \theta_3(0)}{\theta_2(\lambda/2K) \theta_3(|\chi|/2K)} \right|_{\lambda = -K \pm iK'} = \frac{1}{\operatorname{dn}\chi} \exp\left(\pm \frac{i\pi}{2K} |\chi|\right).$$

В пределе $r \rightarrow \infty$ интеграл по контуру C_1 в (4.4.4) можно заменить интегралами по малым окрестностям его конечных точек $\lambda = -K \pm iK'$, где подынтегральное выражение существенно упрощается с помощью разложений (4.4.11). Интеграл по λ вычисляем методом Лапласа [37], после чего легко выполнить интегрирование по вспомогательному параметру α . Это дает

$$\int_{C_1} d\lambda \varphi(\lambda) \exp A(\lambda) = \frac{i}{\operatorname{dn}|\chi|} \left[\operatorname{arctg} \frac{(-|y| - l)k'K}{|x|E} - \operatorname{arctg} \frac{(-|y| + l)k'K}{|x|E} \right] (1 + O(r^{-1})), \quad y < 0, r \rightarrow \infty. \quad (4.4.12)$$

При $y > 0$ вычисления аналогичны. В этом случае в точке $\lambda = -\lambda_0 + 2iK'$ – внутренней точке контура C_2 – достигается максимум функ-

ции $\operatorname{Re} A(\lambda)$ (определение λ_0 прежнее $0 < \lambda_0 < K$). Линия наибыстрейшего спуска с перевала параллельна мнимой оси. На контуре C_1 максимальный вклад в интеграл (4.4.4) дают малые окрестности его конечных точек $\lambda = -K + iK'$, $\lambda = -K + 3iK'$.

Окончательный результат для асимптотики поля диполя при $r \rightarrow \infty$ можно представить в форме объединяющей оба случая $y > 0$ и $y < 0$:

$$u(x, y) = u_0(x + \alpha(x, y)) + \varphi_s(x, y); \quad (4.4.13)$$

$$\alpha(x, y) = \frac{fk}{\pi 2k'} \left[\operatorname{arctg} \frac{(y-l)k'K}{xE} - \operatorname{arctg} \frac{(y+l)k'K}{xE} \right]; \quad (4.4.14)$$

$$\begin{aligned} \varphi_s(x, y) = \operatorname{sign} x \, k^2 \operatorname{sd} \lambda_0 \operatorname{cn} \lambda_0 \exp \{ -|\chi| Z(\lambda_0) - |y| \operatorname{dn} \lambda_0 / k \} \times \\ \times \frac{f}{\pi} \frac{\theta_3(0) \theta_2((\lambda_0 + |\chi|)/2K)}{\theta_3(|\chi|/2K) \theta_2(\lambda_0/2K)} \gamma \operatorname{sh} \frac{l \operatorname{dn} \lambda_0}{k}, \end{aligned} \quad (4.4.15)$$

$$\gamma^2 = 2\pi |\chi|^{-1} \operatorname{sd} \lambda_0 \operatorname{cn} \lambda_0 \left[\operatorname{cn}^2 \lambda_0 (1 - E/K) + \operatorname{sn}^2 \lambda_0 (E/K - (k')^2) \right]^{-1} > 0.$$

При написании первого слагаемого в правой части формулы (4.4.13) мы учли, что $\partial_x u_0 = -2k'/(k \operatorname{dn} \chi)$ и воспользовались соотношением, справедливым для малых значений α :

$$u_0(x) + \partial_x u_0(x) \alpha \approx u_0(x + \alpha).$$

Это слагаемое отвечает «адиабатическому приближению» и описывает двумерную деформацию одномерной решетки солитонов (2.3.6) из-за наличия вихревого диполя. В пределе $k \rightarrow 1$, когда период L_0 решетки солитонов стремится к бесконечности, этот вклад исчезает. Второе слагаемое φ_s в правой части выражения (4.4.13) в указанном пределе остается и принимает простой вид

$$u = 2\pi \operatorname{H}(-x) + \frac{f}{\pi} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \frac{x}{y} \exp(-r) \operatorname{sh} \frac{ly}{r} (1 + O(r^{-1})). \quad (4.4.16)$$

Здесь $H(x) = \frac{1}{2}(1 + \operatorname{sign} x)$ – ступенчатая функция Хевисайда. При осуществлении предельного перехода воспользовались формулами

$$\frac{\theta_3(0)\theta_2((\lambda_0 + |\chi|)/2K)}{\theta_3(|\chi|/2K)\theta_2(\lambda_0/2K)} \rightarrow 1, \quad \gamma^2 \rightarrow \frac{2\pi r}{|y|^2}, \quad u_0(x + \alpha) \rightarrow 2\pi H(-x),$$

$$\operatorname{sn}\lambda_0, \quad Z(\lambda_0) \rightarrow |x|/r, \quad \operatorname{dn}\lambda_0, \quad \operatorname{cn}\lambda_0 \rightarrow |y|/r.$$

Выражение (4.4.16) совпадает с приведенным в работах [17, 20], где рассматривались краевые задачи для топологических дефектов, образованных отрезками 2π -солитонов на однородном фоне. Согласно [17, 20, 39], поле φ_s (4.4.16) в плоскости (x, y) описывает асимптотическое поведение при $r \rightarrow \infty$ струнной конфигурации, которая представляет собой отрезок 2π -кинка между точками $(0, l)$ и $(0, -l)$. Таким образом, слагаемое φ_s в правой части выражения (4.4.13) в определенном смысле описывает собственное поле вихревого диполя. Заметим, что пока существует решетка солитонов, первое слагаемое в формуле (4.4.13), убывающее как r^{-1} при $r \rightarrow \infty$, преобладает над экспоненциально малым полем φ_s . Однако здесь мы сохранили оба вклада, поскольку они имеют разный физический смысл и существует область значений параметров задачи, где важны оба слагаемых в (4.4.13).

4.5. ЛИНЕЙНАЯ XY-МОДЕЛЬ. ФИЗИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Наука идет вперед не только потому, что нам становятся известны и понятны новые факты, но и потому, что мы все время заново учимся тому, что может означать слово «понимание».

В. Гейзенберг. Часть и целое

Дислокации в несоизмеримой структуре атомов, адсорбированных на грань кристалла-подложки, впервые рассматривались в работах [1–3], где при исследовании деформаций солитонной решетки (2.3.6) использовалась линейная XY-модель. Следуя [22, 40], вы-

ведем эффективные линейные уравнения, пригодные для описания малых длинноволновых деформаций солитонной сверхструктуры, и сравним их решение с полученным нами в результате точного интегрирования нелинейной модели (3.1).

Поскольку при $r \rightarrow \infty$ поле $u(x, y)$ мало отличается от $u_0(x)$, будем искать решение уравнений (3.1) в форме [40]:

$$u(x, y) = u_0(\theta) + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n u_n(\theta, X_i, Y_i). \quad (4.5.1)$$

Здесь ε – параметр многомасштабного разложения [41, 42], учитывающего отклонения от фонового состояния $u_0(x)$; $X_i = x\varepsilon^i$, $Y_i = y\varepsilon^i$ – «медленные» координаты; i – натуральные числа; $\theta = z + \alpha(\{X_i, Y_i\})$. Выведем уравнение для смещения солитонных линий $\alpha(\{X_i, Y_i\})$. Подставим разложение (4.5.1) в уравнение (3.1) и сгруппируем члены одного порядка по ε . В первом порядке по ε получим

$$2\partial_\theta^2 u_0 \frac{\partial \alpha}{\partial X_1} + \partial_\theta^2 u_1 - \cos u_0 u_1 = 0, \quad (4.5.2)$$

где $\theta = x + \alpha$. Периодическое по x с периодом L_0 решение (4.5.2) имеет вид

$$u_1 = \frac{\partial \alpha}{\partial X_1} C(\theta), \quad C(\theta) = \partial_\theta u_0 \left[\frac{L_0 \int_0^\theta d\theta' / (\partial_\theta u_0)^2}{\int_0^{L_0} d\theta' / (\partial_\theta u_0)^2} - \theta \right]. \quad (4.5.3)$$

В нашей задаче $L_0 = 2kK$, где K – полный эллиптический интеграл первого рода с модулем k (см. (2.3.6)).

В следующем порядке по ε имеем

$$\begin{aligned} & [\partial_\theta u_0 + 2\partial_\theta C] \frac{\partial^2 \alpha}{\partial X_1^2} + \partial_\theta u_0 \frac{\partial^2 \alpha}{\partial Y_1^2} + \partial_\theta^2 u_0 \left[\left(\frac{\partial \alpha}{\partial X_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial Y_1} \right)^2 + 2 \frac{\partial \alpha}{\partial X_2} \right] + \\ & + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial X_1} \right)^2 \left[2\partial_\theta^2 C + \frac{1}{2} \partial_\theta^2 u_0 C^2 \right] = [-\partial_\theta^2 + \cos u_0] u_2. \quad (4.5.4) \end{aligned}$$

Согласно альтернативам Фредгольма [43], условие разрешимости уравнения (4.5.4) предлагает ортогональность левой части (4.5.4) к решению $\varphi = \partial_\theta u_0$ сопряженного однородного уравнения

$$(\partial_\theta^2 - \cos u_0)\varphi = 0.$$

Пренебрегаем изменением периода решетки солитонов и, следовательно, другим возможным решением $\tilde{\varphi} = \partial_k u_0$. Умножая выражение (4.5.4) на $\partial_\theta u_0$ и усредняя по периоду L_0 солитонной решетки (с учетом периодичности u_2 и C), получаем эффективное уравнение для поля $\alpha(X_1, Y_1)$:

$$K_1 \partial_{X_1}^2 \alpha + K_2 \partial_{Y_1}^2 \alpha = 0; \quad (4.5.5)$$

$$K_1 = \left[\frac{1}{L_0} \int_0^{L_0} d\theta / (\partial_\theta u_0)^2 \right]^{-1} = \frac{4K(k')^2}{k^2 E}; \quad (4.5.6)$$

$$K_2 = \frac{1}{L_0} \int_0^{L_0} d\theta (\partial_\theta u_0)^2 = \frac{4E}{Kk^2}. \quad (4.5.7)$$

Здесь K, E – полные эллиптические интегралы первого и второго родов с модулем k .

Соответствующее уравнению (4.5.5) укороченное выражение для энергии имеет вид

$$H = \frac{1}{2} \int dX_1 dY_1 \left[K_1 (\partial_{X_1} \alpha)^2 + K_2 (\partial_{Y_1} \alpha)^2 \right]. \quad (4.5.8)$$

Отметим, что эффективные упругие модули K_1, K_2 солитонной решетки допускают энергетическую интерпретацию. Модуль сжатия K_1 солитонных линий (4.5.6) совпадает с выражением, полученным дифференцированием средней энергии \bar{W} (2.3.9), приходящейся на период решетки солитонов, по периоду L_0 солитонной структуры:

$$K_1 = L_0^2 \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial L_0^2} = \left(\frac{\partial k}{\partial L_0} \right)^2 \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial^2 k} = \frac{4(k')^2 K}{k^2 E}.$$

Модуль сдвига K_2 можно выразить через натяжение солитонной линии, рассматриваемой как струна. Для этого вычислим энергию E_0 , приходящуюся на один солитон решетки при $q = 0$. Заметим, что

плотность энергии w представляет собой периодическую функцию от x (см. (2.3.4), (2.3.6)). Причем вне солитона $w(x) \approx 2(k'/k) \equiv w_{\text{ph}}$. Вычтем из полной плотности энергии $w(x)$ энергию однородного фона w_{ph} . Полученную разность проинтегрируем по интервалу длиной L_0 . В результате энергия, приходящаяся при $q = 0$ на одну солитонную линию (ср. (2.3.9)):

$$E_0 = 8E/k. \quad (4.5.9)$$

Относительное удлинение струны при малых $\partial_{y_1} \alpha$ есть $\frac{1}{2}(\partial_{y_1} \alpha)^2$, а соответствующая энергия равна

$$\frac{E_0}{2L_0} \int dX_1 dY_1 (\partial_{Y_1} \alpha)^2. \quad (4.5.10)$$

Сравнивая выражения (4.5.8) и (4.5.10) получаем $K_2 = E_0/2L_0 = 4E/Kk^2$, что совпадает с (4.5.7).

Для двух вихрей с противоположными зарядами на большом расстоянии от вихрей решение эффективного уравнения (4.5.5) имеет вид

$$\alpha = B \left[\arctg \frac{y-l}{x} \sqrt{\frac{K_1}{K_2}} - \arctg \frac{y+l}{x} \sqrt{\frac{K_1}{K_2}} \right]. \quad (4.5.11)$$

Поскольку $\sqrt{K_1/K_2} = Kk'/E$, выражение в скобках в (4.5.11) совпадает с таковым в формуле (4.4.14), полученной в результате точного решения уравнения (3.1). Эффективное уравнение (4.5.5) не фиксирует значение постоянной B в решении (4.5.11). Обычно полагают $B = L_0/2\pi = kK/\pi$ [1–3], поскольку дислокация в системе солитонных линий получается в результате обрыва одной из солитонных линий сверхструктурной решетки. Анализ точного решения дает другое значение $B = k(\pi k')^{-1} \sin \pi/4$ (в рассматриваемом случае $f = 2 \sin \pi/4$). Кроме того, асимптотика точного решения содержит собственное поле диполя (4.4.15), которое ввиду его экспоненциальной малости при $r \rightarrow \infty$, не «ухватывается» разложением (4.5.1). Подчеркнем, что значение B зависит от типа диполя и его положения в решетке солитонных линий. Например, для диполя с $q = \pm 1$, образованного полубесконечными солитонными линиями (см. рис. 4.8, б), асимптотическое поведение поля $u(x, y)$ может быть записано в форме (4.4.13). Однако в соотношении (4.4.14) следует заменить $k/2k' \rightarrow k/2$. Изме-

нится также собственное поле диполя φ_s . В пределе $k \rightarrow 1$ вместо (4.4.16) имеем

$$u - 4\text{arctg } e^{-x} = \frac{f}{\pi} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \frac{x}{y} \exp(-r) \left(1 + r \frac{\text{th } x}{x} \right) \text{sh } \frac{ly}{r} \left(1 + O(r^{-1}) \right). \quad (4.5.12)$$

В заключение пункта перечислим некоторые из возможных физических приложений полученных результатов. В магнетиках широко изучаются [44] эффекты макроскопического квантового туннелирования между энергетически эквивалентными состояниями, такими, что одно состояние может быть получено из другого только путем переворота большого числа спинов. Экспериментальные проявления подобных эффектов имеют интересные осцилляционные зависимости от внешнего магнитного поля, которые зависят от значения спина магнитных атомов.

Для примера приведем задачу [45] о туннельном изменении киральности 180° -й доменной стенки (топологического солитона) в квазиодномерном антиферромагнетике типа спиновой цепочки. В общем случае амплитуду вероятности туннельного перехода можно записать в виде фейнмановского интеграла по траекториям от выражения $\exp(iS/\hbar)$, где S – классическое действие антиферромагнетика, \hbar – постоянная Планка [46]. Тогда теоретическое описание туннелирования сводится к учету фейнмановских траекторий в классически запрещенной области, где действие S оказывается комплексным. В задаче об изменении состояния солитона в антиферромагнетике эти траектории соответствуют инстантонным решениям двумерных статических уравнений, которые получаются после формального перехода к мнимому времени в одномерных классических уравнениях движения для вектора антиферромагнетизма. В плоскости «координата – мнимое время» инстантон, описывающий туннелирование между эквивалентными состояниями топологического солитона в антиферромагнетике, выглядит как доменная стенка ферромагнетика с блоховской линией [44, 45]. Интересно и важно, что в рамках двумерной модели sine-Gordon (3.1) поле такой конфигурации можно вычислить методом ОЗР (см. п. 4.7). При туннелировании в магнетиках возникают красивые и тонкие эффекты интерференции разных инстантонных траекторий, происходит туннельное расщепление энергетических уровней, вырожденных в классическом случае [44]. Возможность управления туннельными эффектами («включением» или «выключением» туннелирования) – важный

момент в случае применения магнитных частиц субмикронных размеров в качестве элементов квантовых компьютеров.

Двумерная модель (3.1) эффективно используется при теоретическом описании квантового эффекта Холла. К анализу ее решений сводится изучение физики спонтанной фазовой когерентности между слоями в задаче о квантовом туннелировании через прослойку в системе из двух двумерных электронных газов [47]. В отсутствие магнитного поля для описания туннелирования привлекаются несолитонные вихревые диполи на однородном фоне, которые рассмотрены в главе 5. При наличии магнитного поля для анализа эффектов туннелирования между слоями важны изученные в этой главе конфигурации типа вихревых диполей в полосовой доменной структуре.

Модель (3.1) имеет интересные приложения в области сверхпроводимости. Одно из них касается сверхпроводников с двухкомпонентным параметром порядка [48]. В таких экзотических сверхпроводниках возможно существование доменов и доменных границ, разделяющих сверхпроводящие фазы. Во внешнем магнитном поле описание тонкой структуры сверхпроводящих доменов и доменных границ может быть осуществлено в рамках модели (3.1). Наиболее интересные дефекты типа вихревых диполей в таких сверхпроводниках аналитически описаны в этой главе (топологические заряды вихрей кратны $N = 2, 3$). Другое приложение относится к протяженным джозефсоновским контактам и рассмотрено в следующем пункте.

4.6. МАГНИТНЫЕ ВИХРЕВЫЕ ДИПОЛИ В ШИРОКИХ ДЖОЗЕФСОНОВСКИХ КОНТАКТАХ

То, что сегодня наука, – завтра техника.

Э. Теллер

Сверхпроводящие туннельные переходы представляют интерес из-за многочисленных применений в квантовых интерференционных приборах, логических элементах и ячейках памяти ЭВМ. Изменение режима работы реальных джозефсоновских контактов существенным образом определяется абрикосовскими вихревыми нитями, захваченными электродами туннельного контакта при переходе

в сверхпроводящее состояние. Известно, что внешнее магнитное поле, перпендикулярное плоскости сверхпроводник–диэлектрик–сверхпроводник, проникает в туннельный переход в виде абрикосовских вихревых нитей [49], пронизывающих как сам переход, так и две сверхпроводящие пленки [50–54] (см. рис. 4.11). Такие «замороженные» вихревые нити сохраняются и при полном выключении внешнего поля. Существуют два механизма, определяющих свойства «захваченных» абрикосовских нитей и туннельного перехода [55]. Первый – «кernовый механизм» – связан с перестройкой гриновских функций сверхпроводящих электродов в области порядка длины когерентности вблизи ядра вихревой нити. Вторым механизмом – электродинамический – вызван искривлением вихревой нити и появлением координатной зависимости разности фаз u волновых функций сверхпроводящих электродов. В пренебрежении джозефсоновским током по сравнению с токами вихревой нити (размеры туннельного контакта меньше джозефсоновской глубины проникновения λ_J) влияние этих механизмов на электрические свойства перехода теоретически проанализировано в работах [55–57].

Применение метода низкотемпературного электронного сканирования позволило измерить пространственное распределение джозефсоновского тока в двумерных (широких) туннельных переходах и привело к результатам, отличающимся от опубликованных к тому времени теоретических вычислений [58–59]. Основная причина состоит в том, что, хотя фундаментальное уравнение для разности фаз $u(x, y)$ в двумерных туннельных переходах (эллиптическое уравнение sine-Gordon) известно давно, вычисление плотности джозефсоновского тока связано с решением существенно нелинейной краевой задачи, где нельзя использовать упрощения. Сложность проблемы привела к развитию разных численных методов, дающих возможность вычислить локальную структуру тока (см. [59] и ссылки там).

В этом разделе применим полученные нами результаты для описания стационарного эффекта Джозефсона в двумерных туннельных переходах, содержащих абрикосовские вихревые нити. В отличие от авторов работ [50–57] мы рассматриваем случай «больших» контактов, размеры которых велики по сравнению с λ_J , а расстояние между центрами вихревых нитей в сверхпроводящих пленках больше λ_J . В этом случае распределение джозефсоновского тока зависит от двух пространственных переменных и магнитные поля от абрикосовских вихрей в сверхпроводящих пленках не подчиняются принципу линейной суперпозиции, используемому в предыдущих работах.

Обсудим основные соотношения стационарного эффекта Джозефсона. Плотность джозефсоновского тока туннельного перехода

$$\mathbf{I} = I_1 \mathbf{n} \sin u(x, y) \quad (4.6.1)$$

зависит от разности фаз $u(x, y)$ макроскопических волновых функций верхнего и нижнего сверхпроводящих электродов. Амплитуда I_1 пространственно однородна, если высота туннельного барьера и энергетическая щель постоянны. Разность фаз $u(x, y)$ определяет магнитное поле $\mathbf{H}(x, y)$, проникающее в туннельный барьер:

$$\mathbf{H} = \hbar c (2ed)^{-1} [\mathbf{n} \times \nabla u]. \quad (4.6.2)$$

Здесь \mathbf{n} – вектор нормали к плоскости перехода, \hbar – постоянная Планка, e – модуль заряда электрона, c – скорость света. Эффективная толщина d туннельного барьера складывается из эффективных лондоновских глубин проникновения сверхпроводников, образующих контакт, и толщины барьера. Магнитное поле \mathbf{H} включает как поле, возникающее при протекании через контакт тока, так и приложенное внешнее магнитное поле. Подставляя соотношение (4.6.2) в уравнение

$$\text{Максвелла } \text{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{I}, \text{ получаем двумерное уравнение sine-Gordon}$$

$$(\partial_x^2 + \partial_y^2) u = \lambda_J^{-2} \sin u, \quad (4.6.3)$$

которое описывает всю электродинамику джозефсоновского перехода. Джозефсоновская глубина проникновения $\lambda_J = (\hbar c^2 / 8\pi e d I_1)^{1/2}$ представляет собой характерную ширину области по краям контакта, куда проникает магнитное поле (эффект Мейснера – Оскенфельда).

Граничные условия для нелинейного уравнения определяются значениями нормальной компоненты вдоль границы туннельной области и выражаются через токи \mathbf{I}_n , текущие в электроды:

$$\nabla_{\mathbf{n}} u = 8ed\pi (\hbar c^2)^{-1} \mathbf{I}_n.$$

Детальное обсуждение граничных условий для плоских протяженных контактов приведено в [60].

Для дальнейшего рассмотрения удобно перейти к безразмерным переменным $x\lambda_J^{-1} \rightarrow x$, $y\lambda_J^{-1} \rightarrow y$, тогда уравнение (4.6.3) можно записать в виде (2.3.5).

Пусть в плоскости контакта антипараллельно оси Oy приложено внешнее магнитное поле. При определенных значениях поля мей-

снеровское состояние становится неустойчивым и туннельный контакт ведет себя как сверхпроводник второго рода в смешанном состоянии, в который возможно проникновение квантов магнитного потока и где образуются джозефсоновские вихри (флюксоны). Этому случаю отвечает пространственно-периодическое одномерное решение (2.3.6) уравнения (2.3.5), найденное Куликом, Оуэном, Скалапино [61, 62]. Модуль эллиптических функций k и параметр χ_0 определяются из граничных условий и зависят от геометрии контакта. Термодинамический анализ [62] показывает, что при значениях внешних полей H , меньших значения термодинамического нижнего критического поля $H_1 = 2\Phi_0/(\pi^2 d\lambda_J)$, устойчиво лишь мейснеровское состояние $u = 0$. При $H > H_1$ ($H < H_c$, где H_c – величина критического поля разрушения сверхпроводимости) туннельный контакт переходит в устойчивое смешанное состояние (2.3.6). Согласно [61, 62], магнитное поле $H_y = -\hbar c(edk\lambda_J)^{-1} \operatorname{dn}(\chi + \chi_0)$ в области перехода образует решетку с периодом $L_0 = 2kK\lambda_J$. Поток магнитного поля Φ_0 , приходящийся на один джозефсоновский вихрь и отвечающий изменению поля $u(x, y)$ на 2π , равен

$$\Phi_0 = d \int_0^{L_0} H_y(x) dx = \hbar c \pi / e$$

и совпадает с квантом магнитного потока вихревой абрикосовской нити. Здесь мы использовали размерные переменные.

Пусть абрикосовская вихревая нить проникает в область перехода из верхнего сверхпроводника в точке \mathbf{r}_1 , проходит по слою диэлектрика, как показано на рис. 4.11, и выходит в нижний сверхпроводник в точке \mathbf{r}_2 . В общем случае из-за случайного распределения центров пиннинга и гранулированной структуры сверхпроводящих пленок вихревая линия непрямолинейна ($\mathbf{r}_1 \neq \mathbf{r}_2$). В области туннельного перехода абрикосовская нить трансформируется в отрезок джозефсоновского флюксона (кванты магнитного потока абрикосовской нити и джозефсоновского флюксона совпадают). Подобные «захваченные» абрикосовские вихревые нити значительно меняют джозефсоновский ток [58, 59]. При обходе вихревой нити по замкнутому контуру фаза каждой из сверхпроводящих функций изменяется на 2π . Поле $u(x, y)$ в плоскости перехода характеризуется топологическим зарядом Q , который может быть вычислен по формуле (2.1.16), где следует положить $\Phi = u$. Для точки \mathbf{r}_2 имеем $Q = 1$ и $Q = -1$ для \mathbf{r}_1 . Таким образом, «захваченная» абрикосовская нить порождает магнитный вихревой диполь в плоскости перехода.

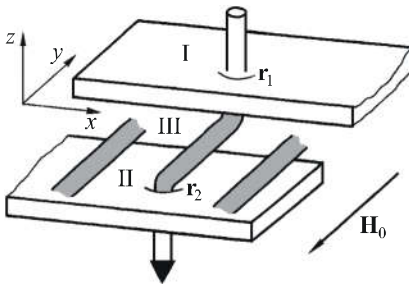


Рис 4.11. Схема проникновения абрикосовской вихревой нити в область туннельного перехода.

I, II – сверхпроводящие контакты; в области туннельного перехода III имеется одномерная решетка флюксонов (окрашены в серый цвет)

Для малых контактов, размеры которых меньше λ_J , уравнение (4.6.3) сводится к линейному $\Delta u \approx 0$. Соответствующая граничная задача о магнитном диполе с граничными условиями на инжекционные токи теоретически и экспериментально исследовалась в ряде работ (см. [59] и ссылки там).

Для больших контактов вычисление $u(x, y)$ сводится к нелинейной краевой задаче (4.2.1) – (4.2.7), решение которой найдено и детально проанализировано в этой главе. Таким образом, мы показали, что метод ОЗР эффективен при определении распределения джозефсоновского тока, индуцированного проникновением абрикосовской вихревой нити в область туннельного перехода.

4.7. ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЙ ДВУМЕРНОЙ МОДЕЛИ SINE-GORDON С АСИМПТОТИКОЙ ТИПА «ДОМЕННОЙ СТЕНКИ» ПРИ $|y| \rightarrow \infty$

Немаловажный урок состоит в том, что точные решения все еще окружают нас со всех сторон и не всегда следует сразу устремляться на поиски малого ϵ .

Дж. Уизем

В этом разделе изложена процедура интегрирования [11] эллиптического уравнения sine-Gordon (3.1) с асимптотикой

$$\begin{aligned} u(x, y) &\rightarrow u_1(x) \quad \text{при } y \rightarrow -\infty, \\ u(x, y) &\rightarrow u_2(x) \quad \text{при } y \rightarrow +\infty. \end{aligned} \quad (4.7.1)$$

Функции $u_i(x)$ ($i = 1, 2$) являются решениями уравнения

$$\frac{(\partial_x u_i)^2}{2} = 2 \sin^2 \frac{u_i}{2}$$

и выражаются в элементарных функциях:

$$u_i(x, y) = 4\text{arctg}(\exp\sigma_i x) + 2\pi g_i, \quad (4.7.2)$$

где $\sigma_i = \pm 1$, g_i – целые числа. Более общий случай, когда асимптотические значения $u_i(x)$ определяются уравнениями

$$\frac{(\partial_x u_i)^2}{2} = c - \cos u_i, \quad c = \text{const},$$

разрешимыми в эллиптических функциях, рассмотрен в главе 3. Поэтому здесь ограничимся кратким изложением.

При формулировке процедуры интегрирования нелинейной модели (3.1) будем использовать L - A -пару (3.2). Фиксируем решения Иоста вспомогательной линейной системы (3.7) асимптотическими условиями:

$$\Psi_i \rightarrow \Psi_i^{(0)} = \begin{pmatrix} w_2 \cos \frac{u_i}{2} - w_1 \sin \frac{u_i}{2} & w_1 \sin \frac{u_i}{2} - w_2 \cos \frac{u_i}{2} \\ w_2 - \frac{\partial_x u_i}{2} & w_2 + \frac{\partial_x u_i}{2} \end{pmatrix} \exp\left(-\frac{w_2}{2} \sigma_3 y\right)$$

при $y \rightarrow (-1)^i \infty$, (4.7.3)

где $i = 1, 2$. Граничные условия (4.7.1) и (4.7.3) согласованы между собой.

Интегральные представления для решений Иоста могут быть получены предельным переходом $c \rightarrow 1$ из формул главы 3. Мы нашли

$$\Psi_1 = \tilde{\Psi}_1^{(0)} + \int_{-\infty}^y dy' \left[M^{(1)}(y, y') + w_1 N^{(1)}(y, y') \right] \exp\left(-\frac{w_2}{2} \sigma_3 y'\right),$$

$$\Psi_2 = \tilde{\Psi}_2^{(0)} + \int_y^{+\infty} dy' \left[M^{(2)}(y, y') + w_1 N^{(2)}(y, y') \right] \exp\left(-\frac{w_2}{2} \sigma_3 y'\right).$$

(4.7.4)

Матричная функция $\tilde{\Psi}_1^{(0)}$ имеет вид

$$\begin{aligned} & \tilde{\Psi}_1^{(0)} = \\ & = \begin{pmatrix} w_2 \cos \frac{u+u_1}{4} - w_1 \sin \frac{u+u_1}{4} + b_1 & w_1 \sin \frac{u+u_1}{4} - w_2 \cos \frac{u+u_1}{4} + b_1 \\ w_2 \cos \frac{u-u_1}{4} + w_1 \sin \frac{u-u_1}{4} + v_1 & w_2 \cos \frac{u-u_1}{4} + w_1 \sin \frac{u-u_1}{4} - v_1 \end{pmatrix} \times \\ & \quad \times \exp\left(-\frac{w_2}{2} \sigma_3 y\right), \end{aligned} \quad (4.7.5)$$

где

$$\begin{aligned} v_1 = & -\frac{1}{4} \left\{ \sin \frac{u-u_1}{4} \left[\partial_y u + \int_{-\infty}^y dy' \frac{\partial_x u \partial_y u}{2} \right] + \cos \frac{u-u_1}{4} \left[\partial_x (u+u_1) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \int_{-\infty}^y dy' \left(\frac{(\partial_x u)^2 - (\partial_y u)^2}{4} - \sin^2 \frac{u}{2} \right) \right] \right\}; \\ b_1 = & \frac{1}{4} \left\{ \cos \frac{u+u_1}{4} \left[\partial_y (u-u_1) - \int_{-\infty}^y dy' \frac{(\partial_x u)^2 - (\partial_y u)^2}{4} - \sin^2 \frac{u}{2} \right] + \right. \\ & \left. + \sin \frac{u+u_1}{4} \left[-\partial_y u + \int_{-\infty}^y dy' \frac{\partial_x u \partial_y u}{2} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4.7.6)$$

Явный вид матрицы $\tilde{\Psi}_2^{(0)}$ можно получить из формул (4.7.5), (4.7.6) формальной заменой индекса «1» на «2» и $\int_{-\infty}^y$ на $-\int_y^{+\infty}$.

Вещественные ядра $M^{(i)}$, $N^{(i)}$ имеют следующую алгебраическую структуру:

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{11} \\ M_{21} & -M_{21} \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} N_{11} & -N_{11} \\ N_{21} & N_{21} \end{pmatrix}.$$

Матрица $M^{(i)}(y, y')$ выражается через функцию $N^{(i)}(y, y')$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sin \frac{u(y)}{2} M_{21}^{(i)}(y, y') &= \partial_y N_{11}^{(i)}(y, y') + \frac{1}{4} \partial_x u(y) N_{11}^{(i)}(y, y') + \\ &+ \cos \frac{u(y)}{2} \partial_{y'} N_{21}^{(i)}(y, y'), \\ \frac{1}{2} \sin \frac{u(y)}{2} M_{11}^{(i)}(y, y') &= -\partial_y N_{21}^{(i)}(y, y') + \frac{1}{4} \partial_x u(y) N_{21}^{(i)}(y, y') - \\ &- \cos \frac{u(y)}{2} \partial_{y'} N_{11}^{(i)}(y, y'). \end{aligned} \quad (4.7.7a)$$

А элементы матричной функции $N^{(i)}(y, y')$ удовлетворяют гиперболической системе уравнений

$$\begin{aligned} &(\partial_y^2 - \partial_{y'}^2) N_{11}^{(i)}(y, y') - \\ &- \partial_y u \left[2 \sin \frac{u(y)}{2} \right]^{-1} \left[\cos \frac{u(y)}{2} \partial_y N_{11}^{(i)}(y, y') + \partial_{y'} N_{21}^{(i)}(y, y') \right] + \\ &+ \frac{1}{4} \left\{ \partial_x \partial_y u - \frac{1}{4} \partial_x u(y) \partial_y u(y) \operatorname{ctg} \frac{u(y)}{2} - \left(\frac{\partial_x u(y)}{2} \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \sin^2 \frac{u(y)}{2} \right\} N_{11}^{(i)}(y, y') = 0, \\ &(\partial_y^2 - \partial_{y'}^2) N_{21}^{(i)}(y, y') - \\ &- \partial_y u \left[2 \sin \frac{u(y)}{2} \right]^{-1} \left[\cos \frac{u(y)}{2} \partial_y N_{21}^{(i)}(y, y') + \partial_{y'} N_{11}^{(i)}(y, y') \right] - \\ &- \frac{1}{4} \left\{ \partial_x \partial_y u - \frac{1}{4} \partial_x u(y) \partial_y u(y) \operatorname{ctg} \frac{u(y)}{2} + \left(\frac{\partial_x u(y)}{2} \right)^2 - \right. \\ &\quad \left. - \sin^2 \frac{u(y)}{2} \right\} N_{21}^{(i)}(y, y') = 0. \end{aligned} \quad (4.7.7b)$$

Условия на характеристике $y = y'$ для элементов матрицы $N^{(1)}(y, y')$ имеют вид

$$N_{11}^{(1)}(y, y) = \frac{1}{8} \left\{ \sin \frac{u+u_1}{4} \left[\partial_x(u-u_1) - \int_{-\infty}^y dy' \left(\frac{(\partial_x u)^2 - (\partial_y u)^2}{4} - \sin^2 \frac{u}{2} \right) \right] + \cos \frac{u+u_1}{4} \left[\partial_y u - \int_{-\infty}^y dy' \frac{\partial_x u \partial_y u}{2} \right] \right\},$$

$$N_{21}^{(1)}(y, y) = \frac{1}{8} \left\{ \sin \frac{u-u_1}{4} \left[\partial_x(u+u_1) + \int_{-\infty}^y dy' \left(\frac{(\partial_x u)^2 - (\partial_y u)^2}{4} - \sin^2 \frac{u}{2} \right) \right] - \cos \frac{u-u_1}{4} \left[\partial_y u + \int_{-\infty}^y dy' \frac{\partial_x u \partial_y u}{2} \right] \right\}.$$

Условие на характеристике $y = y'$ для функции $N^{(2)}(y, y')$ находим из такового для $N^{(1)}(y, y')$ формальной заменой

$$N_{11}^{(1)} \rightarrow -N_{11}^{(2)}, \quad N_{21}^{(1)} \rightarrow -N_{21}^{(2)}, \quad u_1 \rightarrow u_2, \quad \int_{-\infty}^y \rightarrow - \int_y^{+\infty}.$$

Перейдем к перечислению аналитических свойств решений Иоста. Для дальнейшего анализа удобно ввести следующие обозначения для столбцов матриц $\Psi_{1,2}$:

$$\Psi_1 = (\psi, \bar{\psi}), \quad \Psi_2 = (\varphi, \bar{\varphi}). \quad (4.7.8)$$

Столбцы матричных функций (4.7.8) при значениях $\alpha = \pm 1$ имеют одинаковое (с точностью до знака) асимптотическое поведение на бесконечности и удовлетворяют одним и тем же линейным уравнением (3.7). В силу единственности решений дифференциальных уравнений это означает:

$$\varphi \equiv -\bar{\varphi}|_{\alpha=\pm 1}, \quad \psi \equiv -\bar{\psi}|_{\alpha=\pm 1}. \quad (4.7.9)$$

Согласно представлениям (4.7.4), тождества (4.7.9) равносильны соотношениям

$$\int_{-\infty}^y dy' N_{21}^{(1)}(y, y') = -\sin \frac{u-u_1}{4}, \quad \int_y^{+\infty} dy' N_{21}^{(2)}(y, y') = -\sin \frac{u-u_2}{4};$$

$$b_1 = - \int_{-\infty}^y dy' M_{11}^{(1)}(y, y'), \quad b_2 = - \int_y^{+\infty} dy' M_{11}^{(2)}(y, y'). \quad (4.7.10)$$

Из представлений (4.7.4) также следует, что множество точек $\alpha \in R$ составляет непрерывный спектр задачи (3.7), (4.7.3). На вещественной α -оси фундаментальные решения $\Psi_{1,2}(\alpha)$ определены одновременно и потому выражаются друг через друга:

$$\Psi_1(\alpha, x, y) = \Psi_2(\alpha, x, y)S(\alpha, x), \quad \alpha \in R. \quad (4.7.11)$$

Матрица перехода $S(\alpha, x)$ может зависеть только от переменных (α, x) . В верхнюю полуплоскость комплексного параметра α аналитически продолжают с вещественной оси векторы-столбцы $\bar{\psi}$ и $\bar{\varphi}$. В нижнюю полуплоскость могут быть продолжены ψ и φ .

Решения Юста и матрица перехода не унимодулярны:

$$\det \Psi_i = \det \Psi_i^{(0)} = 2w_2(\alpha) \left(w_2(\alpha) \cos \frac{u_i}{2} - w_1(\alpha) \sin \frac{u_i}{2} \right), \quad i = 1, 2;$$

$$\det S = \left(w_2(\alpha) \cos \frac{u_1}{2} - w_1(\alpha) \sin \frac{u_1}{2} \right) \left(w_2(\alpha) \cos \frac{u_2}{2} - w_1(\alpha) \sin \frac{u_2}{2} \right)^{-1} \quad (4.7.12)$$

и удовлетворяют ограничениям

$$\Psi_i(\alpha) = \Psi_i^*(\alpha^{*-1}), \quad S(\alpha) = S^*(\alpha^{*-1});$$

$$\Psi_i(\alpha) = \sigma_3 \Psi_i(-\alpha) \sigma_1, \quad S(\alpha) = \sigma_3 S(-\alpha) \sigma_1. \quad (4.7.13)$$

Из представлений

$$S_{11} = \frac{\det(\psi, \bar{\varphi})}{\det \Psi_2^{(0)}}, \quad S_{22} = \frac{\det(\varphi, \bar{\psi})}{\det \Psi_2^{(0)}}, \quad S_{12} = \frac{\det(\bar{\psi}, \bar{\varphi})}{\det \Psi_2^{(0)}}, \quad S_{21} = \frac{\det(\varphi, \psi)}{\det \Psi_2^{(0)}} \quad (4.7.14)$$

заключаем, что функции $S_{11}(\alpha)$ и $S_{22}(\alpha)$ аналитически продолжают с вещественной оси α -плоскости в области $\text{Im } \alpha < 0$ и $\text{Im } \alpha > 0$ соответственно (за исключением разве лишь точек, где $\det \Psi_2^{(0)}(\alpha) = 0$). Не зависящие от переменной x нули α_j ($\text{Im } \alpha_j < 0$) коэффициента $S_{11}(\alpha)$ отвечают дискретному спектру задачи (3.7), так как выполняются соотношения

$$\psi(\alpha_n) = c_n \bar{\varphi}(\alpha_n). \quad (4.7.15)$$

Вследствие первых редукций (4.7.13) нули функции $S_{11}(\alpha)$ и множители c_n разбиваются на две группы:

$$\alpha = \exp(i\varphi_j), \quad \varphi_j = \varphi_j^*, \quad \sin \varphi_j < 0, \quad c_j = c_j^*, \quad j = 1, 2, \dots, M; \quad (4.7.16a)$$

$$\alpha = \alpha_k, \quad \alpha_{k+N} = \alpha_k^{*-1}, \quad \operatorname{Im} \alpha_k < 0, \quad c_{k+N} = c_k^*, \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (4.7.16b)$$

На основании формул (4.7.12), (4.7.14) заключаем, что элементы матрицы перехода могут иметь дополнительные полюсы в точках $\alpha = \pm 1$, где $w_2(\alpha) = 0$. Используя выражения (4.7.9), (4.7.14), находим вид этих элементов в окрестности точек $\alpha = \pm 1$:

$$S_{11}(\alpha) = -S_{22}(\alpha) = S_{21}(\alpha) = -S_{12}(\alpha) = \frac{a}{w_2} + O(1), \quad (4.7.17)$$

$$w_2 \sim 0; \quad a = \frac{\det(\psi, \varphi)}{2w_1 \sin u_2 / 2} \Big|_{w_2=0}.$$

Дополнительные полюсы $\alpha = \pm 1$ элементов матрицы перехода, если они есть, не создают трудностей при выводе уравнений обратной задачи рассеяния. Например, при получении таковых для «правого конца» необходимо взять равенство первых столбцов матричной связи (4.7.11), поделить его на $S_{11}(\alpha)$ и проинтегрировать результат по вещественной α -оси. На контуре интегрирования нет особенностей в точках $\alpha = \pm 1$, поскольку в их окрестностях отношение S_{21}/S_{11} оказывается конечным: $S_{21}/S_{11} = O(1)$. Аналогичное утверждение справедливо при выводе уравнений обратной задачи рассеяния для «левого конца». Отметим также, что солитонные решения модели определяются условием: $S_{12}(\alpha) = S_{21}(\alpha) \equiv 0$. Это возможно только тогда, когда коэффициент $a \equiv 0$. Поэтому в солитонном секторе диагональные элементы матрицы перехода не имеют полюсов (а значит – нулей) в точках $\alpha = \pm 1$.

Разложения элементов матрицы перехода вблизи особой точки $\alpha = \infty$ имеют вид

$$S_{11}(\alpha) = S_{22}(-\alpha) = \exp \frac{i}{4}(u_2 - u_1) \left\{ 1 - \frac{1}{2\alpha} \left[\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dy' \partial_x u \partial_{y'} u + \right. \right.$$

$$+ i \left(\partial_x (u_1 - u_2) + \int_{-\infty}^{\infty} dy' \left(\frac{(\partial_x u)^2 - (\partial_y u)^2}{4} - \sin^2 \frac{u}{2} \right) \right) \Bigg] \Bigg] \Bigg\} + O(\alpha^{-2}),$$

$$S_{21}(\alpha) = S_{12}(\alpha) = o(\alpha^{-2}). \quad (4.7.18)$$

Разложение $S(\alpha)$ в окрестности точки $\alpha = 0$ можно получить из формулы (4.7.18) с помощью первой редукции (4.7.13).

Уравнение, определяющее зависимость матрицы перехода $S(\alpha, x)$ от переменной x , имеет вид

$$\partial_x S = SB_1 - B_2 S,$$

$$B_{1,2} = -\frac{1}{2} \left[\frac{w_2 \sin(u_{1,2}/2) + w_1 \cos(u_{1,2}/2)}{w_2 \cos(u_{1,2}/2) - w_1 \sin(u_{1,2}/2)} \right] \times$$

$$\times \text{diag} \left(w_2 + \frac{\partial_x u_{1,2}}{2}, -w_2 + \frac{\partial_x u_{1,2}}{2} \right)$$

и легко интегрируется:

$$S_{11}(\alpha, x) = \frac{\varepsilon_1 w_2 \sin(u_1/4) - (1 - \varepsilon_1 w_1) \cos(u_1/4)}{\varepsilon_2 w_2 \sin(u_2/4) - (1 - \varepsilon_2 w_1) \cos(u_2/4)} S_{11}^{(0)}(\alpha),$$

$$S_{12}(\alpha, x) = \frac{\varepsilon_1 w_2 \sin(u_1/4) + (1 + \varepsilon_1 w_1) \cos(u_1/4)}{\varepsilon_2 w_2 \sin(u_2/4) - (1 - \varepsilon_2 w_1) \cos(u_2/4)} \exp(w_1 x) S_{12}^{(0)}(\alpha),$$

$$S_{21}(\alpha, x) = S_{12}(-\alpha, x), \quad S_{22}(\alpha, x) = S_{11}(-\alpha, x). \quad (4.7.19)$$

Здесь $\varepsilon_i = \text{sign}(\partial_x u_i \sin u_i/2)$ ($i = 1, 2$); $\det S^{(0)}(\alpha) = 1$.

Зависимость от x коэффициента c_n в формуле (4.7.15) формально совпадает с зависимостью $S_{21}(\alpha_n, x)$.

Согласно выражению (4.7.19), элементы матрицы перехода имеют дополнительные нули и полюсы, зависящие от переменной x . Как и в главе 3, можно показать, что такие нули и полюсы не связаны с дискретным спектром задачи (3.7), но приводят к важным соотношениям:

$$S_{11}(\alpha = \varepsilon_1 \exp(iu_1/2)) = 0, \quad \psi(\alpha = \varepsilon_1 \exp(iu_1/2)) \equiv 0, \quad \partial_x u_1 < 0;$$

$$\begin{aligned}
 S_{22}(\alpha = -\varepsilon_1 \exp(iu_1/2)) &= 0, \quad \bar{\psi}(\alpha = -\varepsilon_1 \exp(iu_1/2)) \equiv 0, \quad \partial_x u_1 < 0; \\
 \varphi(\alpha = -\varepsilon_2 \exp(iu_2/2)) &\equiv 0, \quad \bar{\varphi}(\alpha = \varepsilon_2 \exp(iu_2/2)) \equiv 0, \quad \partial_x u_2 > 0,
 \end{aligned}
 \tag{4.7.20}$$

с помощью которых решения $u(x, y)$ нелинейного уравнения (3.1) выражаются через операторы преобразования линейной системы (3.7):

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_1 \sin \frac{u - u_1}{4} &= - \int_{-\infty}^y dy' M_{11}^{(1)}(y, y') + \\
 + \int_{-\infty}^y dy' &\left(M_{11}^{(1)}(y, y') + \varepsilon_1 \cos \frac{u_1}{2} N_{11}^{(1)} \right) \exp \left[\frac{\varepsilon_1}{2} \sin \frac{u_1}{2} (y - y') \right], \quad \partial_x u_1 < 0; \\
 \varepsilon_2 \sin \frac{u - u_2}{4} &= - \int_y^{+\infty} dy' M_{11}^{(2)}(y, y') + \\
 + \int_y^{+\infty} dy' &\left(M_{11}^{(2)}(y, y') + \varepsilon_2 \cos \frac{u_2}{2} N_{11}^{(2)} \right) \exp \left[\frac{\varepsilon_2}{2} \sin \frac{u_2}{2} (y - y') \right], \quad \partial_x u_2 > 0.
 \end{aligned}
 \tag{4.7.21}$$

Набор функций

$$r(\alpha, x) = S_{21}/S_{11}, \quad \alpha \in R; \quad \alpha_n, \quad \text{Im } \alpha_n < 0; \quad \gamma_n(x) = ic_n [\alpha \partial_\alpha S_{11}]^{-1} \Big|_{\alpha=\alpha_n}$$

образует данные рассеяния, по которым можно восстановить операторы преобразования $M^{(2)}(y, y')$ и $N^{(2)}(y, y')$. Для вывода уравнений, определяющих эти операторы, проинтегрируем по вещественной оси α -плоскости первый столбец матричной связи (4.7.11), а точнее соотношения

$$g(\alpha) \exp[w_2(\alpha)z/2] \left\{ \frac{\psi(\alpha)}{S_{11}(\alpha)} - \varphi(\alpha) - \frac{S_{21}(\alpha)}{S_{11}(\alpha)} \bar{\varphi}(\alpha) \right\} = 0,$$

где $g(\alpha) = \alpha^{-1}$ или $g(\alpha) = \alpha^{-1}w_1(\alpha)$. При интегрировании используем второе из соотношений (4.7.4), теорему Коши о вычетах и формулы

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \alpha^{-1} w_1(\alpha) \exp \left[-\frac{w_0(\alpha)}{2} y \right] = 8\pi\delta(y),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \alpha^{-1} \exp\left[-\frac{w_0(\alpha)}{2} y\right] = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \alpha^{-1} w_1^2(\alpha) \exp\left[-\frac{w_0(\alpha)}{2} y\right] = 0.$$

С помощью перечисленных результатов нетрудно проверить, что все интегралы хорошо определены. В конечном счете находим

$$\begin{aligned} & 4N_{11}^{(2)}(y, z) + \sin \frac{u+u_2}{4} F_{1,0}(y+z) - \cos \frac{u+u_2}{4} F_{0,1}(y+z) - \\ & \quad - \int_y^{\infty} M_{11}^{(2)}(y, y') dy' F_{0,0}(y+z) + \\ & \quad + \int_y^{\infty} \left[M_{11}^{(2)}(y, y') F_{0,0}(y'+z) - N_{11}^{(2)}(y, y') F_{1,0}(y'+z) \right] dy' = 0, \\ & 4M_{11}^{(2)}(y, z) + \sin \frac{u+u_2}{4} F_{2,0}(y+z) - \cos \frac{u+u_2}{4} F_{1,1}(y+z) - \\ & \quad - \int_y^{\infty} M_{11}^{(2)}(y, y') dy' F_{1,0}(y+z) + \\ & \quad + \int_y^{\infty} \left[M_{11}^{(2)}(y, y') F_{1,0}(y'+z) - N_{11}^{(2)}(y, y') F_{2,0}(y'+z) \right] dy' = 0; \end{aligned} \tag{4.7.22a}$$

$$\begin{aligned} & 4N_{21}^{(2)}(y, z) + \sin \frac{u-u_2}{4} F_{1,0}(y+z) + \cos \frac{u-u_2}{4} F_{0,1}(y+z) - v_2 F_{0,0}(y+z) + \\ & \quad + \int_y^{\infty} \left[-M_{21}^{(2)}(y, y') F_{0,0}(y'+z) + N_{21}^{(2)}(y, y') F_{1,0}(y'+z) \right] dy' = 0, \\ & 4M_{21}^{(2)}(y, z) + \sin \frac{u-u_2}{4} F_{2,0}(y+z) + \cos \frac{u-u_2}{4} F_{1,1}(y+z) - v_2 F_{1,0}(y+z) + \\ & \quad + \int_y^{\infty} \left[-M_{21}^{(2)}(y, y') F_{1,0}(y'+z) + N_{21}^{(2)}(y, y') F_{2,0}(y'+z) \right] dy' = 0. \end{aligned} \tag{4.7.22б}$$

Здесь функции $F_{i,j}(y)$ ($i = 0, 1, 2$) вычисляются по данным рассеяния:

$$F_{i,j}(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \alpha^{-1} w_1^i(\alpha) w_2^j(\alpha) r(\alpha) \exp\left(\frac{w_2(\alpha)}{2} y\right) + \sum_{n=1}^{M+2N} \gamma_n w_1^i(\alpha_n) \exp\left(\frac{w_2(\alpha_n)}{2} y\right). \quad (4.7.23)$$

Аналогичным образом, интегрируя вдоль вещественной α -оси второй столбец матричной связи $\Psi_2(\alpha) = \Psi_1(\alpha)S^{-1}(\alpha)$, получаем уравнения на операторы преобразования $M^{(1)}(y, y')$ и $N^{(1)}(y, y')$:

$$\begin{aligned} & -4N_{11}^{(1)}(y, z) + \sin \frac{u+u_1}{4} \Phi_{1,0}(y+z) - \cos \frac{u+u_1}{4} \Phi_{0,1}(y+z) + \\ & \quad + \int_{-\infty}^y M_{11}^{(1)}(y, y') dy' \Phi_{0,0}(y+z) - \\ & - \int_{-\infty}^y \left[M_{11}^{(1)}(y, y') \Phi_{0,0}(y'+z) + N_{11}^{(1)}(y, y') \Phi_{1,0}(y'+z) \right] dy' = 0, \\ & 4M_{11}^{(1)}(y, z) + \sin \frac{u+u_1}{4} \Phi_{2,0}(y+z) - \cos \frac{u+u_1}{4} \Phi_{1,1}(y+z) + \\ & \quad + \int_{-\infty}^y M_{11}^{(1)}(y, y') dy' \Phi_{1,0}(y+z) - \\ & - \int_{-\infty}^y \left[M_{11}^{(1)}(y, y') \Phi_{1,0}(y'+z) + N_{11}^{(1)}(y, y') \Phi_{2,0}(y'+z) \right] dy' = 0; \end{aligned} \quad (4.7.24a)$$

$$\begin{aligned} & 4N_{21}^{(1)}(y, z) - \sin \frac{u-u_1}{4} \Phi_{1,0}(y+z) - \cos \frac{u-u_1}{4} \Phi_{0,1}(y+z) - v_1 \Phi_{0,0}(y+z) - \\ & - \int_{-\infty}^y \left[M_{21}^{(1)}(y, y') \Phi_{0,0}(y'+z) + N_{21}^{(1)}(y, y') \Phi_{1,0}(y'+z) \right] dy' = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -4M_{21}^{(1)}(y, z) - \sin \frac{u-u_1}{4} \Phi_{2,0}(y+z) - \cos \frac{u-u_1}{4} \Phi_{1,1}(y+z) - v_1 \Phi_{1,0}(y+z) - \\
 & - \int_{-\infty}^y \left[M_{21}^{(1)}(y, y') \Phi_{1,0}(y'+z) + N_{21}^{(1)}(y, y') \Phi_{2,0}(y'+z) \right] dy' = 0.
 \end{aligned}
 \tag{4.7.24б}$$

Функции $\Phi_{i,j}(y)$ имеют вид

$$\begin{aligned}
 \Phi_{i,j}(y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \alpha^{-1} w_1^i(\alpha) w_2^j(\alpha) \rho(\alpha) \exp\left(-\frac{w_2(\alpha)}{2} y\right) + \\
 &+ \sum_{n=1}^{M+2N} \beta_n w_1^i(\alpha_n) \exp\left(-\frac{w_2(\alpha_n)}{2} y\right), \\
 \rho(\alpha) &= \frac{S_{12}(\alpha)}{S_{11}(\alpha)}, \quad \beta_n = [ic_n \alpha \partial_\alpha S_{11}]^{-1} \Big|_{\alpha=\alpha_n} \det S(\alpha_n).
 \end{aligned}
 \tag{4.7.25}$$

Процедура интегрирования нелинейного уравнения (3.1) при граничном условии (4.7.1) с помощью обратной задачи рассеяния состоит в следующем. Из выражений (4.7.22а), (4.7.24а) определяются $M_{11}^{(i)}, N_{11}^{(i)}$. Далее, подставляя $M_{11}^{(i)}, N_{11}^{(i)}$ в одну из формул (4.7.21) (в зависимости от знака $\partial_x u_i$ ($i = 1, 2$)), выражаем решение $u(x, y)$ модели (3.1) через данные рассеяния.

В солитонном секторе $S_{12}^{(0)}(\alpha) = S_{21}^{(0)}(\alpha) \equiv 0$, поэтому ядра (4.7.23), (4.7.25) обратной задачи рассеяния становятся вырожденными и уравнения (4.7.22а), (4.7.24а) могут быть решены. Отметим тонкий момент. Как уже упоминалось, для солитоноподобных решений диагональные элементы матрицы перехода не содержат нулей и полюсов в точках $\alpha = \pm 1$. В то же время первое выражение (4.7.19) в полной форме записи имеет вид

$$\begin{aligned}
 S_{22}(\alpha) &= S_{11}(-\alpha), \\
 S_{11}(\alpha, x) &= \frac{\varepsilon_1 w_2 \sin(u_1/4) - (1 - \varepsilon_1 w_1) \cos(u_1/4)}{\varepsilon_2 w_2 \sin(u_2/4) - (1 - \varepsilon_2 w_1) \cos(u_2/4)} S_{11}^{(0)}(\alpha) =
 \end{aligned}$$

$$= \varepsilon_1 \varepsilon_2 \frac{(\alpha - \varepsilon_1)}{(\alpha - \varepsilon_2)} \left[\frac{(\alpha - \varepsilon_1) \cos(u_1/4) - i(\alpha + \varepsilon_1) \sin(u_1/4)}{(\alpha - \varepsilon_2) \cos(u_2/4) - i(\alpha + \varepsilon_2) \sin(u_2/4)} \right] S_{11}^{(0)}(\alpha). \quad (4.7.26)$$

Иными словами, форма записи (4.7.26) такова, что при $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$ может привести к лишним нулям и полюсам элементов матрицы перехода в точках $\alpha = \pm 1$. Чтобы этого избежать, нужно правильно выбрать множитель $S_{11}^{(0)}(\alpha)$ в формуле (4.7.26). Элемент $S_{11}(\alpha)$ матрицы перехода не будет содержать лишних нулей и полюсов только тогда, когда $S_{11}^{(0)}(\alpha)$ имеет простой нуль в точке $\alpha = \varepsilon_2$ и простой полюс в точке $\alpha = \varepsilon_1$.

Для солитонных состояний

$$S_{22}^{(0)}(\alpha) S_{11}^{(0)}(\alpha) \equiv S_{11}^{(0)}(\alpha) S_{11}^{(0)}(-\alpha) = 1.$$

Отсюда следует, что, если коэффициент $S_{11}^{(0)}(\alpha)$ имеет нуль (4.7.16) в точке $\alpha = \alpha_n$, то он имеет и полюс в точке $\alpha = -\alpha_n$. С учетом условия нормировки (4.7.18) рациональная функция $S_{11}^{(0)}(\alpha)$ полностью восстанавливается по своим нулям и полюсам:

$$S_{11}^{(0)} = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \frac{(\alpha - \varepsilon_2)}{(\alpha - \varepsilon_1)} \prod_{k=1}^M \left[\frac{\alpha - \exp(i\varphi_k)}{\alpha + \exp(i\varphi_k)} \right] \prod_{p=1}^N \frac{(\alpha - \alpha_p)(\alpha - \alpha_p^{*-1})}{(\alpha + \alpha_p)(\alpha + \alpha_p^{*-1})}. \quad (4.7.27)$$

Редукция $S_{11}(\alpha) = S_{11}^*(\alpha^{*-1})$ приводит к условиям связи числа M особых нулей с видом асимптотик поля $u(x, y)$ при $y \rightarrow \pm\infty$ (4.7.1). Когда $\varepsilon_1 \varepsilon_2 < 0$, число M в формуле (4.7.27) должно быть нечетным. Если же $\varepsilon_1 \varepsilon_2 > 0$, то M – четное.

В качестве примера построим солитоноподобное решение при выборе $u_2 = 4 \operatorname{arctg}(\exp x)$, $\varepsilon_2 = -\varepsilon_1 = 1$, $M = 1$, $N = 0$. Из уравнений (4.7.21), (4.7.22а) после простых вычислений находим

$$\operatorname{tg} \frac{u}{4} = \frac{\operatorname{tg} \frac{u_2}{4} - f_0 \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \exp(-x \cos \varphi - y \sin \varphi)}{1 - f_0 \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} \operatorname{tg} \frac{u_2}{4} \exp(-x \cos \varphi - y \sin \varphi)}, \quad (4.7.28)$$

где параметр $0 < \varphi < \pi$. Внутренняя структура солитонного дефекта зависит от знака вещественной постоянной f_0 . Когда $f_0 > 0$, формула (4.7.28) описывает топологический дефект – вихрь с зарядом $Q = 4$, который представляет собой ортогональное пересечение двух изогнутых 2π -солитонов. Если $f_0 < 0$, то имеем нетопологический дефект, образованный двумя изогнутыми 2π -солитонными линиями. Такие дефекты подробно проанализированы в главе 2. Они не локализованы вдоль безграничных 2π -солитонных линий в xOy -плоскости.

При значениях параметров $\varphi = \pi/2$, $|f_0| = 1$ солитонные дефекты приобретают простой вид. В этом случае они образованы в результате ортогонального пересечения прямолинейных 2π -солитонных линий (доменных стенок), вытянутых вдоль осей Ox и Oy :

$$\operatorname{tg} \frac{u}{4} = -\frac{\operatorname{sh}[(x+y)/2]}{\operatorname{sh}[(x-y)/2]}, \quad f_0 = 1; \quad \operatorname{tg} \frac{u}{4} = \frac{\operatorname{ch}[(x+y)/2]}{\operatorname{ch}[(x-y)/2]}, \quad f_0 = -1.$$

4.8. БЛОХОВСКАЯ ЛИНИЯ В ДОМЕННОЙ СТЕНКЕ

Единственное, чему научила меня моя долгая жизнь: что вся наша наука перед лицом реальности выглядит примитивно и по-детски наивно – и все же это самое ценное, что у нас есть.

А. Эйнштейн

В настоящем пункте изложенный подход применяется для решения задачи об отдельном вихре с топологическим зарядом $Q = -2$ на фоне 2π -солитона. Как отмечено в главе 2, такое решение модели (3.1) описывает, например, блоховскую линию в доменной стенке «легкоосного» ферромагнетика в пренебрежении магнитостатическими взаимодействиями (см. рис. 2.1).

Пусть центральная линия доменной стенки (2π -солитона) совпадает с осью Oy системы координат. Вихрь с зарядом $Q = -2$ находится в точке с координатами $x = 0$, $y = 0$. Для описания вихря вдоль положительной полуоси Oy введем разрез со скачком поля $u(x, y)$ на разрезе (рис. 4.12):

$$u^+(y) - u^-(y) = -4\pi, \quad y > 0, \quad (4.8.1)$$

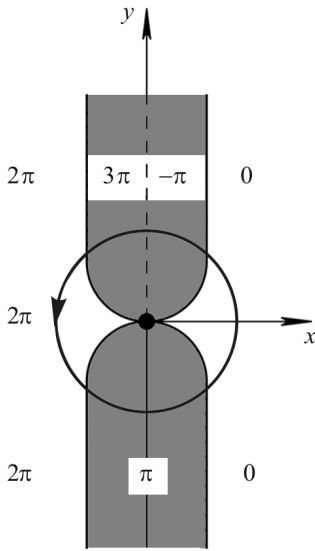


Рис. 4.12. Вихрь с зарядом $Q = 2$ на фоне 2π -солитона.

Разрез обозначен штриховой линией

где $u^\pm(y) = u(x = \pm 0, y)$. Асимптотические условия по переменной y , учитывающие наличие вихря в доменной стенке, имеют вид

$$u_2 \rightarrow \begin{cases} -4\text{arctg}e^{-x}, & x > 0, \\ 2\pi + 4\text{arctg}e^x, & x < 0, \end{cases} \quad \text{при } y \rightarrow +\infty;$$

$$u_1 \rightarrow 4\text{arctg}e^{-x} \quad \text{при } y \rightarrow -\infty. \quad (4.8.2)$$

Поле $u(x, y)$ такой задачи обладает симметрией

$$u(x, y) = 2\pi - u(-x, y). \quad (4.8.3)$$

Соотношения (4.8.1), (4.8.3) определяют предельные значения поля u и его производных на оси Oy при $y \neq 0$, т. е. всюду, за исключением точки, где находится вихрь:

$$u^+ = \begin{cases} -\pi & \text{при } y > 0 \\ \pi & \text{при } y < 0 \end{cases}; \quad u^- = \begin{cases} 3\pi & \text{при } y > 0 \\ \pi & \text{при } y < 0 \end{cases};$$

$$\partial_y u^\pm = 0; \quad \partial_x u^+ = \partial_x u^-. \quad (4.8.4)$$

В итоге расчет поля $u(x, y)$ сводится к анализу двух рассмотренных в предыдущем разделе задач рассеяния для областей $x > 0$ и $x < 0$.

Используя формулы (4.7.19), (4.8.2), для элементов матрицы перехода находим

$$S_{11}(\alpha, x) = \frac{1 + w_1 + w_2 e^{-x}}{1 + w_1 - w_2 e^{-x}} S_{11}^{(0)}(\alpha) \equiv \frac{1 + \alpha - i(\alpha - 1)e^{-x}}{1 + \alpha + i(\alpha - 1)e^{-x}} S_{11}^{(0)}(\alpha),$$

$$S_{12}(\alpha, x) = - \left[\frac{1 - w_1 - w_2 e^{-x}}{1 + w_1 - w_2 e^{-x}} \right] \exp(w_1 x) S_{12}^{(0)}(\alpha) \equiv$$

$$\equiv \left(\frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} \right) \left[\frac{\alpha - 1 - i(\alpha + 1)e^{-x}}{\alpha + 1 + i(\alpha - 1)e^{-x}} \right] \exp(w_1 x) S_{12}^{(0)}(\alpha),$$

$$S_{21}(\alpha, x) = S_{12}(-\alpha, x), \quad S_{22}(\alpha, x) = S_{11}(-\alpha, x). \quad (4.8.5)$$

Перейдем к определению вида функций $S_{ij}^{(0)}(\alpha)$. Как и ранее, требование выполнения условий $u(x, y) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow +\infty$, $u(x, y) \rightarrow 2\pi$ при $x \rightarrow -\infty$ фиксирует значения $S_{11}^{(0)}(\alpha) = S_{22}^{(0)}(\alpha) = 1$ и приводит к заключению, что при $x > 0$ ($x < 0$) коэффициент $S_{12}^{(0)}(\alpha) \neq 0$ только при $\alpha < 0$ ($\alpha > 0$), а коэффициент $S_{21}^{(0)}(\alpha) = S_{12}^{(0)}(-\alpha) \neq 0$, если $\alpha > 0$ ($\alpha < 0$).

У диагональных и недиагональных элементов матрицы перехода нули и полюсы в точках $\alpha = \pm 1$ присутствуют или отсутствуют одновременно (см. (4.7.17)). В данной задаче диагональные элементы матрицы перехода не содержат таких нулей и полюсов. Чтобы форма записи недиагональных элементов матрицы перехода (4.8.5) не приводила к лишним нулям и полюсам, полагаем

$$S_{21}^{(0)}(\alpha) = S_{12}^{(0)}(-\alpha) = \frac{w_1(\alpha) - 1}{w_2(\alpha)} \tilde{S}_{21}^{(0)}(\alpha) = i \left(\frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} \right) \tilde{S}_{21}^{(0)}(\alpha). \quad (4.8.6)$$

Свойство симметрии поля $u(x, y)$ (4.8.3) проявляется в дополнительном ограничении на решения Йоста: $\Psi_{1,2}(x, y, \alpha) = \Psi_{1,2}(-x, y, -\alpha^{-1})$, которое дает связь матриц перехода в полуплоскостях $x > 0$ и $x < 0$:

$$S(x, \alpha) = S(-x, -\alpha^{-1}). \quad (4.8.7)$$

Поэтому достаточно ограничиться построением решения поставленной задачи в одной из полуплоскостей. Далее для определенности выберем область $x > 0$.

Вдали от центра вихря решение модели (3.1) мало отличается от асимптотических значений (4.8.2). В этой области, используя первые формулы (4.7.10) и первые уравнения (4.7.22б), (4.7.24б), трудно выразить поле $\partial_y u(x, y)$ через данные рассеяния:

$$\partial_y u \approx 4N_{21}^{(2)}(y, y) \approx - \left[F_{0,1}(2y) + \frac{\partial_x u_2}{2} F_{0,0}(2y) \right] =$$

$$= - \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} d\alpha [w_1(\alpha) + \text{th} x] \exp\{w_2(\alpha)y - w_1(\alpha)x\} \tilde{S}_{21}^{(0)}(\alpha), \quad x > 0, y > 0;$$

$$\begin{aligned} \partial_y u &\approx -4N_{21}^{(1)}(y, y) \approx -\left[\Phi_{0,1}(2y) - \frac{\partial_x u_1}{2} \Phi_{0,0}(2y) \right] = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 d\alpha [w_1(\alpha) - \text{th}x] \exp\{-w_2(\alpha)y + w_1(\alpha)x\} \tilde{S}_{21}^{(0)}(-\alpha), \\ &x > 0, y < 0. \end{aligned}$$

Как видим, вдали от вихря поле $\partial_y u(x, y)$ выражается через функцию $\Phi_0(x, y)$:

$$\begin{aligned} \partial_y u(x, y) &\approx \Phi_0(x, y) = \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\kappa \left[1 + \frac{\text{th}x}{\sqrt{1+\kappa^2}} \right] \tilde{S}_{21}^{(0)}(\kappa) \exp\{-i\kappa y - x\sqrt{1+\kappa^2}\}, \quad x > 0, \end{aligned} \quad (4.8.8)$$

где $\kappa = (\alpha - \alpha^{-1})/2$.

Используя выражения (4.8.8), находим асимптотическое поведение самого поля $u(x, y)$ вдали от ядра вихря:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= u_2(x) - \int_y^{+\infty} dy' \Phi_0(x, y') = \\ &= u_2(x) - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\kappa \tilde{S}_{21}^{(0)}(\kappa)}{\kappa - i0} \left[1 + \frac{\text{th}x}{\sqrt{1+\kappa^2}} \right] \exp\{-i\kappa y - x\sqrt{1+\kappa^2}\}, \quad y > 0; \\ u(x, y) &= u_1(x) + \int_{+\infty}^y dy' \Phi_0(x, y') = \\ &= u_1(x) - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\kappa \tilde{S}_{21}^{(0)}(\kappa)}{\kappa + i0} \left[1 + \frac{\text{th}x}{\sqrt{1+\kappa^2}} \right] \exp\{-i\kappa y - x\sqrt{1+\kappa^2}\}, \quad y < 0. \end{aligned} \quad (4.8.9)$$

Принимая во внимание равенства $\cos u_1 = \cos u_2 = \text{th}x$, нетрудно проверить, что функции $\tilde{u}_i = u - u_i$ (4.8.9) удовлетворяют одному и тому же уравнению:

$$(\partial_x^2 + \partial_y^2 - \text{th}x) \tilde{u}_i = 0,$$

которое является результатом линеаризации модели (3.1) относительно фоновых состояний, описывающих доменную стенку.

Функция $\Phi_0(x, y)$ играет важную роль в дальнейшем анализе. Найдем ее предельные значения при $x \rightarrow +0, y \neq 0$. Из уравнений прямой задачи рассеяния (4.7.7) получаем

$$\left[N_{21}^{(i)}(y, y') \right]^+ = \left[M_{11}^{(i)}(y, y') \right]^+ = 0, \quad y \neq 0.$$

Тогда выражения (4.7.22б) и (4.7.24б) дают $\Phi_0^+(y) = 0$ всюду, за исключением точки $y = 0$. Из сопоставления формул (4.8.4), (4.8.8) следует, что в пределе $x \rightarrow +0$ интегралы от поля $\Phi_0(x, y)$ по переменной y должны давать кусочно-постоянные функции. Перечисленные условия будут выполнены только тогда, когда $\tilde{S}_{21}^{(0)}(\kappa) = \tilde{S}_{21}^{(0)}(\alpha) = \text{const}$ ($\alpha > 0$). Линейное приближение (4.8.8), справедливое вдали от центра вихря, недостаточно для вычисления этой постоянной.

Покажем, что значение параметра $\tilde{S}_{21}^{(0)}$ можно найти из анализа асимптотического поведения решений Иоста вблизи ядра вихря. Расчет будет проще, если от прежних функций Иоста $\Psi_{1,2}(\alpha)$ перейти к новым функциям:

$$\begin{aligned} \chi_s(\alpha) &= \Psi_s(\alpha) g_s(\alpha), \quad s = 1, 2; \\ g_s &= -\frac{i}{\sqrt{2}} \text{diag} \left\{ \frac{\exp(w_1 x/2)}{w_2 \sin(u_s/4) + (1 + w_1) \cos(u_s/4)}, \right. \\ &\quad \left. \frac{\exp(-w_1 x/2)}{w_2 \sin(u_s/4) - (1 - w_1) \cos(u_s/4)} \right\}, \end{aligned}$$

которые, как и прежние, являются решениями вспомогательной линейной системы (3.7), но фиксированы другими асимптотическими условиями по переменной y :

$$\Psi_i \rightarrow \Psi_i^{(0)} g_i \quad \text{при} \quad y \rightarrow (-1)^i \infty.$$

Здесь матричные функции $\Psi_i^{(0)}$ определены формулой (4.7.3). В силу своего определения, новые решения Иоста на вещественной α -оси связаны между собой матрицей перехода, не зависящей от переменной x :

$$\chi_1(\alpha) = \chi_2(\alpha) S^{(0)}(\alpha), \quad \alpha \in R. \quad (4.8.10)$$

Матрица $S^{(0)}(\alpha)$ такая же, как в формуле (4.7.19).

Чтобы полнее использовать аналитические свойства решений Иоста, введем матричные функции $\chi_+(\alpha)$ и $\chi_-(\alpha)$, которые допускают аналитическое продолжение с вещественной α -оси в верхнюю и нижнюю полуплоскости комплексного параметра α соответственно:

$$\chi_+(\alpha) = (\chi_2^{(1)}(\alpha), \chi_1^{(2)}(\alpha)), \quad \chi_-(\alpha) = (\chi_1^{(1)}(\alpha), \chi_2^{(2)}(\alpha)).$$

Здесь через $\chi_s^{(i)}$ обозначен i -й вектор-столбец матрицы χ_s . Тогда равенство (4.8.10) сведется к условию сопряжения аналитических функций $\chi_{\pm}(\alpha)$ на вещественной α -оси:

$$\chi_+(\alpha) = \chi_-(\alpha)G(\alpha), \quad \alpha \in R. \quad (4.8.11)$$

С помощью полученных ранее результатов нетрудно проверить, что в области $x > 0$ спектральный параметр α должен быть положительным, а матрица $G(\alpha)$ имеет вид

$$G(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\tilde{S}_{21}^{(0)}(w_1(\alpha)-1)/w_2(\alpha) & 1 \end{pmatrix}.$$

Согласно второй из редукций (4.7.13), при вещественных значениях α имеем

$$\chi_+(\alpha) = -\sigma_3 \chi_-(-\alpha) \sigma_1. \quad (4.8.12)$$

Это позволяет переписать равенство (4.8.11) в терминах функции $\chi_-(\alpha)$:

$$-\sigma_3 \chi_-(-\alpha) \sigma_1 = \chi_-(\alpha)G(\alpha), \quad \alpha \in R. \quad (4.8.13)$$

Для дальнейшего анализа необходимо знать асимптотическое поведение $\chi_-(x, y, \alpha)$ вблизи особой точки $\alpha \sim \infty$ уравнения (3.7). Интегрированием по частям представлений (4.7.4) нетрудно получить асимптотики прежних решений Иоста $\Psi_{1,2}(x, y, \alpha)$ при значениях $\alpha \rightarrow \infty$. Отсюда следует асимптотическое условие для функции $\chi_-(x, y, \alpha)$:

$$\chi_- \rightarrow -\frac{1}{\sqrt{2}} \exp\left(-\frac{i\mu}{4} \sigma_3\right) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \left(1 + O\left(\frac{1}{\alpha}\right)\right) \exp\left\{\frac{\alpha}{4}(x + iy) \sigma_3\right\},$$

$$\alpha \rightarrow \infty. \quad (4.8.14)$$

Введенные в этом разделе функции $\chi_-(x, y, \alpha)$ являются решениями вспомогательной линейной системы

$$\begin{aligned}\partial_x \chi_- &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial_y u}{2} \sigma_3 + \sigma_1 w_1 \cos \frac{u}{2} + i \sigma_2 w_2 \sin \frac{u}{2} \right\} \chi_-, \\ \partial_y \chi_- &= \frac{1}{2} \left\{ -\frac{\partial_x u}{2} \sigma_3 - \sigma_1 w_2 \cos \frac{u}{2} + i \sigma_2 w_1 \sin \frac{u}{2} \right\} \chi_-; \\ w_1(\alpha) &= \frac{1}{2} (\alpha + \alpha^{-1}), \quad w_2(\alpha) = \frac{1}{2i} (\alpha - \alpha^{-1}).\end{aligned}\quad (4.8.15)$$

Выполнение условия совместности системы (4.8.15) эквивалентно справедливости нелинейного уравнения (3.1).

Для вычисления параметра $\tilde{S}_{21}^{(0)}$ используем прием, предложенный при описании изонодромных решений модели sine-Gordon [63–65] (см. также главу 5). В данном случае он сводится к следующему конструктивному замечанию. Вблизи центра вихря и одновременно вблизи особой точки $\alpha = \infty$ системы (4.8.15) ее решения могут быть аппроксимированы хорошо изученными автомодельными функциями.

В окрестности точки $\alpha = \infty$ решение уравнений (4.8.15) будем искать в виде

$$\chi_- = \exp(-iu\sigma_3/4)F. \quad (4.8.16)$$

При описании ядра вихря удобно перейти от декартовых координат x, y к полярным координатам $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\theta = \arctg(y/x)$. В новых переменных уравнения для расчета матричной функции $F(r, \theta, \alpha)$ примут вид

$$\begin{aligned}\partial_r F &= \frac{1}{4} \left\{ \sigma_3 (r^{-1} \partial_\theta + i \partial_r) u + (\beta + \beta^{-1} \cos u) \sigma_1 - \beta^{-1} \sigma_2 \sin u \right\} F, \\ \partial_\theta F &= \frac{ir}{4} \left\{ \sigma_3 (r^{-1} \partial_\theta + i \partial_r) u + (\beta - \beta^{-1} \cos u) \sigma_1 + \beta^{-1} \sigma_2 \sin u \right\} F, \\ \beta &= \alpha \exp(i\theta).\end{aligned}\quad (4.8.17)$$

Напомним, что вблизи вихря приближенное решение модели (3.1) хорошо известно: $u \approx Q\theta$, где $Q = -2$ – заряд вихря. Отсюда следует, что вблизи центра вихря существует область $r < |\alpha|^{-1} \ll 1$, в которой

в главном приближении система (4.8.17) сводится к одному обыкновенному дифференциальному уравнению по переменной $\xi = iare^{i\theta}/4$ для расчета F :

$$\partial_{\xi} F \approx -\frac{1}{2} \left\{ \frac{\sigma_3}{\xi} + 2i\sigma_1 \right\} F. \quad (4.8.18)$$

Решение уравнений (4.8.18) следует искать при условии

$$F \rightarrow -\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \exp(-i\xi\sigma_3), \quad \varepsilon \rightarrow \infty,$$

согласованном с асимптотическим поведением функции χ_{-} при $\alpha \rightarrow \infty$ (4.8.14). В конечном счете приближенное решение системы (4.8.17) с оценкой вклада поправочных членов можно записать в форме

$$F = \frac{\sqrt{\pi\xi}}{2} \exp\left(\frac{\pi i}{4}\right) \begin{pmatrix} H_1^{(2)}(\xi) & iH_1^{(1)}(\xi) \\ iH_0^{(2)}(\xi) & -H_0^{(1)}(\xi) \end{pmatrix} \left(1 + O\left(\frac{r^2}{\xi}\right)\right). \quad (4.8.19)$$

Здесь $H_{\nu}^{(1,2)}(\xi)$ – функции Ганкеля, которые являются линейными комбинациями функций Бесселя $J_{\nu}(\xi)$, $Y_{\nu}(\xi)$ первого и второго родов [66]:

$$H_{\nu}^{(1)}(\xi) = J_{\nu}(\xi) + iY_{\nu}(\xi), \quad H_{\nu}^{(2)}(\xi) = J_{\nu}(\xi) - iY_{\nu}(\xi).$$

Согласно полученным ранее результатам, функция $\chi_{-}(x, y, \alpha)$ может быть продолжена с вещественной α -оси в полуплоскость $\text{Im } \alpha < 0$. Отсюда следует, что при $x > 0$ или, что то же самое, при $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$ функция $F(\xi)$ допускает аналитическое продолжение с положительной полуоси α -плоскости в область $\Omega_1 = \{\xi: -\pi < \arg \xi < \pi\}$.

В соотношении (4.8.13) левая часть представляет собой значение на вещественной α -оси функции $\chi_{+}(\alpha)$, которая допускает аналитическое продолжение с вещественной оси в область $\text{Im } \alpha > 0$. В терминах новой переменной ξ инволюцию (4.8.12) можно переписать так, чтобы такое продолжение было возможным. Корректная форма записи инволюции

$$\chi_{+}(\xi) = -\sigma_3 \chi_{-}(\exp(-\pi i) \xi) \sigma_1, \quad 0 < \arg \xi < \pi,$$

не только дает верные значения функции $\chi_{+}(\xi)$ на вещественной α -оси, но и указывает путь аналитического продолжения этих значений с положительной вещественной полуоси α -плоскости в область $\Omega_2 = \{\xi: 0 < \arg \xi < 2\pi\}$.

В пределе $\alpha \rightarrow \infty$ правильно записанное условие (4.8.13):

$$-\sigma_3 \chi_- (\exp(-\pi i) \xi) \sigma_1 = \chi_- (\xi) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -i \tilde{S}_{21}^{(0)} & 1 \end{pmatrix} \quad (4.8.20)$$

можно трактовать как связь в области $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \{\xi: 0 < \arg \xi < \pi\}$ продолженных указанным способом функций $\chi_-(\xi)$ и $\chi_+(\xi)$.

Используя трансформационные свойства функций Бесселя

$$J_\nu (\xi e^{-i\pi}) = e^{-i\nu\pi} J_\nu (\xi); \quad Y_0 (\xi e^{-i\pi}) = -2iJ_0 (\xi) + Y_0 (\xi),$$

$$Y_1 (\xi e^{-i\pi}) = 2iJ_1 (\xi) - Y_1 (\xi)$$

и формулы (4.8.16), (4.8.19), из условия связи (4.8.20) находим параметр $\tilde{S}_{21}^{(0)} = 2 = -2\sin(\pi Q/4)$ ($Q = -2$). Второе равенство приведено для того, чтобы проиллюстрировать близость параметров в задачах с несолитонными вихрями.

Поскольку элементы матрицы $S^{(0)}(\alpha)$ найдены:

$$S_{21}^{(0)}(\alpha) = S_{12}^{(0)}(-\alpha) = 2 \frac{w_1(\alpha) - 1}{w_2(\alpha)}; \quad S_{11}^{(0)}(\alpha) = S_{22}^{(0)}(\alpha) = 1, \quad (4.8.21)$$

расчет поля $u(x, y)$ доменной стенки с блоховской линией сводится к интегрированию сравнительно простых одномерных линейных интегральных уравнений (4.7.22a), (4.7.24a) с известными ядрами.

Главной задачей этой главы было аналитическое описание ранее не рассматривавшихся «несолитонных» вихрей на фоне доменной стенки и в полосовой структуре из солитонных линий. Несолитонные вихри отвечают непрерывному спектру задачи рассеяния, содержащему лакуны. Свойства симметрии несолитонных вихрей позволили при вычислениях их полей использовать прием, аналогичный методу изображений в электростатике. Если солитонподобные дефекты могут быть исчерпывающе исследованы алгебраическими методами, то для несолитонных такие методы не пригодны. Развитие и применение техники ОЗР оказались плодотворными для изучения нового, несолитонного сектора двумерных систем. В следующей главе обсуждаются возможные обобщения этого подхода.

ДВУМЕРНЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ ДЕФЕКТЫ, АНАЛОГИЧНЫЕ ДЕФЕКТАМ ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Совершенство – воображаемое состояние или качество, отличающееся от действительности наличием такого элемента, как безупречность, и свойственное прежде всего критику.

А. Бирс. Словарь Сатаны

Дефектами кристаллической решетки называются любые искажения регулярности кристаллической структуры. Нарушение правильного стабильного расположения атомов ведет к ослаблению межатомных связей, способствует их разрыву при меньших внешних нагрузках. На дефектах локализуется пластическая деформация. Дефекты кристаллической решетки определяют основные механические свойства реальных твердых тел [1–3]. Сама концепция дефектов фундаментальна для изучения физических свойств любых конденсированных сред.

Сингулярные решения эллиптического уравнения sine-Gordon:

$$(\partial_x^2 + \partial_y^2)u = \sin u \quad (5.1)$$

имеют важные приложения в теории поля и физике конденсированного состояния в качестве моделей дефектов. В этой главе мы обсудим класс сингулярных решений модели (5.1) и покажем, что рассмотренные ранее вихревые конфигурации не исчерпывают многообразия нелинейных дефектов.

Чтобы приблизиться к этой цели, отметим важное обстоятельство. Нелинейность в уравнении (5.1) сублинейна: $|\sin u| \leq |u|$. Для таких моделей структура решений вблизи сингулярной точки обусловлена линейным дифференциальным оператором $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$ [4–6]. Любое решение уравнения (5.1) с особенностью может быть

представлено в форме: $u = v + w$, где v – сингулярная часть, удовлетворяющая уравнению

$$\Delta v = 0 \tag{5.2}$$

вблизи сингулярной точки, w – несингулярная часть, которая стремится к нулю в сингулярной точке. Функция v фиксирует ядро дефекта, а значит, определяет дефект в рамках нелинейной модели (5.1). Поэтому в [7] предложена классификация сингулярных решений двумерного нелинейного уравнения (5.1) в терминах хорошо известных сингулярных решений линейного уравнения Лапласа.

Сингулярную часть решения вблизи единственной особой точки $x = y = 0$ удобно записать в виде комплексной функции

$$A \ln z + \sum_{n=1}^N \frac{B_n}{z^n} + C, \tag{5.3}$$

где $z = x + iy$, A, B_n, C – комплексные постоянные. Вещественная и мнимая части выражения (5.3), а также их произвольная линейная комбинация являются решениями уравнения Лапласа: $\Delta v = 0$. Для многих физических приложений наиболее интересны два первых члена (5.3). Соответствующее им решение v в полярной системе координат (r, φ) с центром в особой точке имеет вид

$$v(r, \varphi) = Q\varphi + \alpha \ln r + (\beta/r) \cos(\varphi - \varphi_1), \tag{5.4}$$

где $Q = -\text{Im } A$, $\alpha = \text{Re } A$, $\beta = |B_1|$, $\varphi_1 = \arg B_1$. Из условия непрерывности поля $v(r, \varphi)$: $v(r, \varphi + 2\pi) = v(r, \varphi) \pmod{2\pi}$ следует, что Q – целое число.

При численном решении уравнения (5.1) в работе [7] использовался метод релаксации. Рассматривалось нелинейное уравнение с формально введенным диссипативным членом:

$$-\eta \partial_t u + (\partial_x^2 + \partial_y^2) u = \sin u, \quad \eta > 0.$$

Изучалась релаксация сингулярных начальных распределений (5.4) к стационарным решениям этого уравнения, которые одновременно являются решениями интересующей нас модели (5.1). Область вычислений выбиралась в форме кольца с малым внутренним радиусом r_0 и внешним радиусом r_∞ . Граничные условия при $r = r_0 \rightarrow 0$ выбирались в виде $u = v(r_0, \varphi)$ (поскольку $u \rightarrow v$ при $r \rightarrow 0$), а при $r = r_\infty \rightarrow \infty$ предполагалось $\partial u / \partial r = 0$.

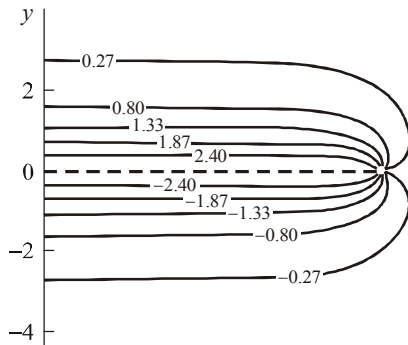


Рис. 5.1. Одиночный вихрь с зарядом $Q = 1$ – оборванный 2π -кинк

При значениях $\alpha = \beta = 0$, $Q = 1$ получилась уже обсуждаемая ранее струнная конфигурация в виде полубесконечного 2π -кинка, исходящего из особой точки $(0, 0)$ вихревого типа. Сплошные линии на рис. 5.1 соответствуют постоянным значениям поля $u(x, y)$ (они указаны на линиях).

Штриховая линия на рис. 5.1 отвечает разрезу, на котором поле $u(x, y)$ претерпевает физически не наблюдаемый скачок на 2π . Разрез совпадает со средней линией 2π -кинка, и это удобно для изображения поля $u(x, y)$.

Другое простейшее сингулярное решение модели (5.1) найдено при $\alpha \neq 0$, $\beta = Q = 0$, (на рис. 5.2 $\alpha = 4$). Оно описывает последовательность кольцевых 2π -кинков с общим центром в особой точке $(0, 0)$ (структура типа «мишень»). Число «захваченных» кинков возрастает с увеличением α . «Захваченных» кинков нет, если $0 < \alpha < 0.95$. При $\alpha \ll 1$ и конечных значениях r поле $u(x, y)$ близко к решению линейного уравнения Лапласа. В то же время поле нелинейного дефекта экспоненциально стремится к нулю с ростом r в отличие от такового в линейной теории. При значениях $0.95 < \alpha < 3.20$ появляется один «захваченный» кинк, когда $3.2 < \alpha < 5.5$ – имеется два кинка и т. д.

В случае $\alpha \neq 0$, $Q \neq 0$, $\beta = 0$ возникают новые конфигурации. Вблизи особой точки решение имеет структуру логарифмической спирали: $Q\phi + \alpha \ln r = \text{const}$ (рис. 5.3, а, где $Q = 1$, $\alpha = 4$). На больших расстояниях от особой точки (в области $r > 3$) спираль трансформируется в 2π -кинк. Его радиус кривизны быстро увели-

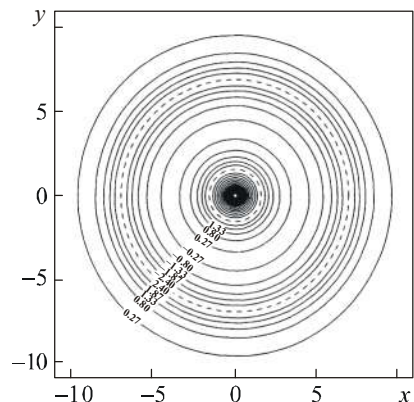


Рис. 5.2. Структура типа «мишень» с сингулярным ядром

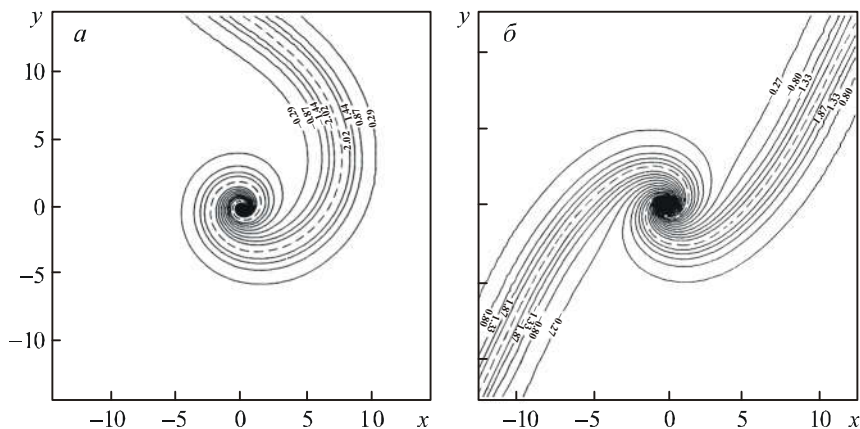


Рис. 5.3. Конфигурации в форме логарифмических спиралей.
Пояснения см. в тексте

чивается с ростом r , и вдали от особой точки кинк становится прямолинейным. При значениях $Q \geq 2$ найдены логарифмические спиральные структуры с Q «рукавами». «Двухрукавная» конфигурация представлена на рис. 5.3, б ($\alpha = 4, Q = 2$).

Другой тип дефектов отмечается при $\alpha = Q = 0, \beta \neq 0$. Конфигурация с $\beta = 1$ представлена на рис. 5.4. Это сильно локализованное решение, которое не содержит 2π -кинков. Вблизи особой точки оно мало отличается от решения линейного уравнения Лапласа. Нелинейность модели проявляется на больших расстояниях от особой точки и приводит к экспоненциальной экранировке поля дефекта. Последнее может быть важным для физических приложений, так как означает экспоненциальное уменьшение с расстоянием взаимодействия дефектов. Напомним, что в линейных теориях энергия взаимодействия дефектов снижается степенным образом при увеличении расстояния между дефектами.

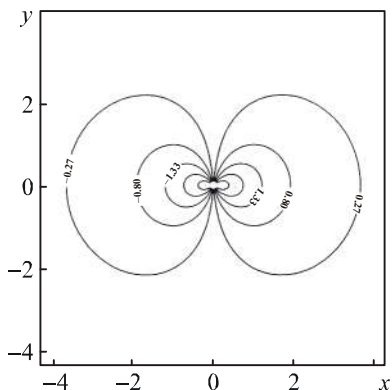


Рис. 5.4. Локализованная структура в виде «бабочки»

Высшие «мультипольные» решения модели (5.1) соответствуют еще более компактным конфигурациям. Внутренняя структура таких нелинейных дефектов хорошо описывается линейной теорией, в то же время поля дефектов экспоненциально стремятся к нулю при удалении от их центров.

В континуальной теории аналитическое описание дефектов связано с введением разрезов при решении определяющих уравнений, или, что эквивалентно, с заданием сингулярных источников типа дельта-функций и их производных. Источники моделируют искажения межатомных связей вблизи ядер дефектов. В области ядер континуальная теория становится не применимой, поэтому поля дефектов имеют особенности. Обсудим это подробнее на примере модели (5.1).

Введем определения дефектов классическим способом Вольтера – через разрезы [1–3, 8, 9]. Чтобы не нарушить условий применимости обратных задач рассеяния, используемых далее для интегрирования модели (5.1), ограничимся рассмотрением разрезов L_i , параллельных оси Oy :

$$L_i = \{x = x_i, |y - y_i| \leq l_i\}, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (5.5)$$

Для определенности будем говорить о двумерных кристаллах, т. е. о системах адсорбат – подложка (2.3.1).

Обсудим вначале дефекты, при образовании которых на берегах разрезов не возникает напряжений (производная $\partial_x u$ непрерывна), хотя само поле $u(x, y)$ на разрезах испытывает скачки:

$$u^+ - u^- = q_i^{(0)}(y - y_i)[H(y - y_i + l_i) - H(y - y_i - l_i)], \quad x = x_i. \quad (5.6a)$$

Здесь и далее верхний индекс «0» указывает, что рассматриваемая величина относится к сингулярному источнику, моделирующему дефект. Функции $q_i^{(0)}(y - y_i)$ задают раздвижку берегов разрезов при формировании дефектов, $H(y) = \frac{1}{2}[\text{sign } y + 1]$ – ступенчатая функция Хевисайда. Чтобы на концах разрезов не образовалось областей, не совместимых с симметрией кристалла, значения $q_i^{(0)}(\pm l_i)$ должны быть кратны 2π (в безразмерных переменных). Далее рассматриваем дефекты, для которых

$$q_i^{(0)}(-l_i) = q_i^{(0)}(+l_i) = 2\pi m_i^{(0)}, \quad (5.6б)$$

где $m_i^{(0)}$ – целые числа. Такие дефекты имеют пространственно локализованные поля и, следовательно, меньшую энергию. В зависи-

мости от вида функций $q_i^{(0)}(y)$ это могут быть дефекты типа дислокационных и дисклинационных диполей, двойников, трещин, точечных дефектов. Приведем ряд примеров.

Дислокационные диполи соответствуют скачкам поля $u(x, y)$ на разрезах на постоянные величины:

$$u^+ - u^- = 2\pi m_i^{(0)} [H(y - y_i + l_i) - H(y - y_i - l_i)], \quad x = x_i, \quad (5.7)$$

где $m_i^{(0)}$ – целые числа.

Интересно, что в двумерной модели (5.1) любой дефект, характеризующийся скачком поля $u(x, y)$ на разрезе, можно формально интерпретировать [9] как распределение инфинитезимальных дислокаций с плотностью вектора Бюргерса:

$$\rho(y) = \frac{\partial}{\partial y} (u^+(y) - u^-(y)). \quad (5.8)$$

В частности, для дислокационного диполя (5.7) получаем тривиальный результат:

$$\rho(y) = 2\pi m_i^{(0)} [\delta(y - y_i + l_i) - \delta(y - y_i - l_i)], \quad x = x_i,$$

т. е. две дислокации с векторами Бюргерса $\pm 2\pi m_i^{(0)}$, сосредоточенные в точках $(x_i, y_i \mp l_i)$.

Линейная функция

$$q_i^{(0)}(y - y_i) = (y - y_i)\omega_i^{(0)}, \quad \omega_i^{(0)} = \text{const}, \quad (5.9)$$

определяет следующую плотность инфинитезимальных дислокаций:

$$\rho(y) = \omega_i^{(0)} [H(y - y_i + l_i) - H(y - y_i - l_i)] - \omega_i^{(0)} l_i [\delta(y - y_i + l_i) + \delta(y - y_i - l_i)].$$

Иными словами, такой выбор отвечает стенке из дислокаций, распределенных с постоянной плотностью «вектора» Бюргерса $\omega_i^{(0)}$ вдоль отрезка $|y - y_i| \leq l_i$, $x = x_i$. В точках $(x_i, y_i \pm l_i)$ стенку ограничивают две одинаковые дислокации с противоположным направлением «вектора» Бюргерса $-l_i \omega_i^{(0)}$ ($\omega_i^{(0)} l_i = 2\pi m_i^{(0)}$, $m_i^{(0)}$ – целое число). В результате полный «вектор» Бюргерса всей конфигурации равен нулю. В системе адсорбат – подложка (2.3.1) дислокационная стенка служит аналогом одноосного дисклинационного диполя [8, 9] с индексом Франка $\omega_i^{(0)}$. Полного совпадения с ротационными дефек-

тами нет по причине одномерности смещения адатомов в модели (2.3.1).

Точечный дефект в точке с координатами (x_i, y_i) определяется условием

$$u^+ - u^- = \mathfrak{G}_i^{(0)} \delta(y - y_i), \quad x = x_i, \quad (5.10)$$

где параметр $\mathfrak{G}_i^{(0)}$ характеризует изменение размеров двумерного кристалла в результате вызванного дефектом смещения адатомов вдоль борозд потенциального рельефа (вдоль оси Ox).

Нетрудно показать, что рассмотренные дефекты можно интерпретировать как обобщенные сингулярные решения уравнения (5.1) при наличии источников, которые выражаются в терминах дельта-функций [9]:

$$\Delta u = \sin u + \partial_x q^{(0)},$$

$$q(x, y) = \sum_{i=1}^N \delta(x - x_i) \int_{-l_i}^{l_i} \delta(y - y_i - \tilde{y}) q_i^{(0)}(\tilde{y}) d\tilde{y}. \quad (5.11)$$

Для точечных дефектов в формуле (5.11) полагаем $q_i^{(0)}(\tilde{y}) = \mathfrak{G}_i^{(0)} \delta(\tilde{y})$.

Подчеркнем, что введенные источники не описывают каких-либо реальных сил, приложенных к разрезам, а лишь учитывают скачки поля $u(x, y)$ на разрезах. Исключение составляет точечный дефект, поле которого можно интерпретировать как результат действия пары противоположно направленных близко расположенных сосредоточенных сил:

$$\partial_x q^{(0)} = f^{(0)}(x + \mathfrak{G}_i^{(0)} y) - f^{(0)}(x, y) \approx \partial_x f^{(0)}(x, y) \mathfrak{G}_i^{(0)}.$$

Сравните формулы (5.11) и (5.13) с $q^{(0)} = \mathfrak{G}_i^{(0)} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)$ и $f^{(0)}(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)$.

Дефекты, порожденные силами, распределенными вдоль линий L_i :

$$f^{(0)}(x, y) = \sum_{i=1}^N \delta(x - x_i) \int_{-l_i}^{l_i} \delta(y - y_i - \tilde{y}) f_i^{(0)}(\tilde{y}) d\tilde{y} \quad (5.12)$$

описываются другим сингулярным уравнением

$$\Delta u = \sin u + f^{(0)}. \quad (5.13)$$

В частности, когда сила сосредоточена в точке (x_i, y_i) в выражении (5.12) следует положить $f_i^{(0)}(\tilde{y}) = f_{0i}^{(0)}\delta(\tilde{y})$ ($f_{0i}^{(0)} = \text{const}$), тогда $f^{(0)}(x, y) = f_{0i}^{(0)}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)$.

В классификации Вольтерра конфигурация, изображенная на рис. 5.1, характеризуется постоянным скачком поля $u(x, y)$ на разрезе. Она описывает простейший трансляционный дефект двумерного кристалла – дислокацию. Дефекты с неоднородными скачками поля $u(x, y)$ на разрезах имеют другую ранее не исследованную внутреннюю структуру. Для сравнения на рис. 5.5 представлены схемы линий уровня для дислокационного диполя с зарядами $Q = \pm 1$ и дисклинационного диполя с индексом Франка $\omega_1^{(0)} = 2\pi/l_1$. В магнетиках дисклинационному диполю соответствует гантелевидный домен, напоминающий цилиндрический магнитный домен, но имеющий неправильную форму в виде капли с перетяжкой. Такой домен содержит большое число вертикальных блоховских линий (магнитных вихрей с одинаковым топологическим зарядом), которые «отталкиваются» друг от друга. Это обстоятельство способствует растягиванию гантелевидного домена и принципиально меняет его поведение во внешних магнитных полях.

В двумерных кристаллах структура типа «бабочки» (см. рис. 5.4) описывает поле точечного дефекта. Нелинейные дефекты типа «мишеней» (см. рис. 5.2) или логарифмических спиралей (см. рис. 5.3) образуются только под влиянием точечных внешних сил. Метод обратной задачи рассеяния для теоретического описания таких конфигураций применялся в работах [10–16].

В главе 4 найдена связь между нелинейными вихрями модели (5.1) и дефектами, описываемыми линеаризацией (5.1) относительно основного состояния $u = \tilde{u}(x)$ (4.2.6), (4.2.7):

$$\Delta\Phi = \Phi \cos \tilde{u}, \quad \Phi = u - \tilde{u} \rightarrow 0. \quad (5.14)$$

Сравнение краевых условий для нелинейного (5.1) и линейного (5.14) уравнений

$$\frac{1}{2\pi} \oint_{C_i} (\nabla u \cdot d\mathbf{r}) = q_i^{(0)}, \quad i = 1, 2, \quad q_1^{(0)} = -q_2^{(0)}, \quad u \rightarrow \tilde{u}(x), \quad r \rightarrow \infty; \quad (5.15)$$

$$\frac{1}{2\pi} \oint_{C_i} (\nabla \Phi \cdot d\mathbf{r}) = q_i^{(\infty)}, \quad i = 1, 2, \quad q_1^{(\infty)} = -q_2^{(\infty)}, \quad \Phi \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty, \quad (5.16)$$

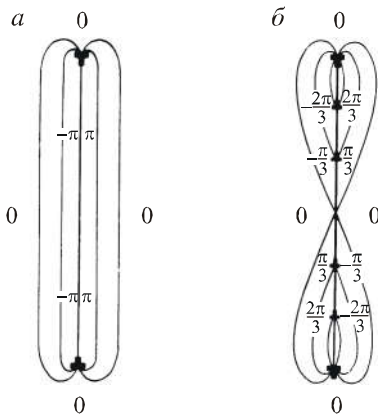


Рис. 5.5. Схемы линий уровня для вихревого (а) и дисклинационного (б) диполей

где C_i – малые окружности вокруг точек расположения вихрей (обход контуров C_i осуществляется против часовой стрелки, $q_i^{(0)}$ – целые числа), приводит к любопытному заключению: топологический характер особенностей полей u и Φ совпадает. Функция $\Phi(\mathbf{r})$ определяет асимптотику поля нелинейных дефектов $u(\mathbf{r})$ при $r \rightarrow \infty$, а не вблизи центров дефектов. Поэто-

му постоянные параметры $q_i^{(\infty)}$ не обязаны совпадать с целыми числами $q_i^{(0)}$.

На основе этого замечания можно развить схему аналитического описания нелинейных дефектов, которая состоит в следующем:

а) мы отбираем разные сингулярные решения $\Phi(\mathbf{r})$ линейного уравнения (5.14), описывающие дефекты;

б) используя связь $u(\mathbf{r})$ с $\Phi(\mathbf{r})$ при $r \rightarrow \infty$, сопоставляем $\Phi(\mathbf{r})$ набор данных рассеяния; решения нелинейного уравнения (5.1), вычисленные по этому набору данных, сохраняют топологические свойства дефектов линейной теории.

Близкий подход использован в работе [17] при описании экранировки поля точного заряда в плазме в рамках эллиптической модели sine-Gordon. Разумеется, изложенная схема не является строго обоснованной. Однако она позволяет сравнительно легко воспроизвести известные к настоящему времени решения двумерной модели sine-Gordon, соответствующие несолитонным дефектам, и дает критерий выбора данных рассеяния для новых дефектов [18–22]. Процедура будет самосогласованной, если удастся доказать связь данных рассеяния с решениями линеаризованной задачи (5.14). Возможность математического доказательства в общем виде, на наш взгляд, проблематична. Поэтому естественный путь состоит в проверке общей структуры теории на конкретных примерах. Такая проверка вполне реальна и в случае положительного результата будет означать полное решение проблемы вычисления полей нелинейных дефектов. В этой главе рассмотрены задачи, для которых проверка возможна.

План главы следующий. В п. 5.1 приведены решения линейного уравнения (5.14), описывающие дефекты, аналогичные таковым линейной теории упругости. Поля дефектов вычисляются методом функций Грина. Рассматриваются дефекты на фоне: 1) однородного основного состояния ($\tilde{u} = 0$), 2) решетки солитонных линий.

В п. 5.2 представлены найденные нами в работе [23] расчетные формулы для построения методом ОЗР решений нелинейного уравнения (5.1) с однородной асимптотикой при $|y| \rightarrow \infty$. В п. 5.2.1–5.2.3 они используются для изучения двумерных дефектов на однородном фоне, которые определяются скачками поля $u(x, y)$ на разрезах и сингулярными силовыми источниками. В частности, вычислены данные рассеяния для структур типа «мишеней», дислокационных (вихревых) диполей и диполей из закрученных в спираль 2π -солитонных отрезков [18, 19]. Для структур типа вихревых диполей и «мишеней» предлагаемый подход воспроизводит результаты, полученные в статьях [13–15] путем более последовательных, но и более утомительных вычислений.

В п. 5.3 предлагаемая схема и результаты главы 4 используются для аналитического описания взаимодействия двумерных нелинейных дефектов с неоднородными образованиями в магнетиках и кристаллах типа полосовой доменной структуры [19].

5.1. ДЕФЕКТЫ И СИНГУЛЯРНЫЕ ИСТОЧНИКИ. ПОЛЯ ДЕФЕКТОВ НА БОЛЬШОМ РАССТОЯНИИ ОТ ИХ ЦЕНТРОВ

Физика была бы скучна, а жизнь совершенно невозможна, если бы все физические явления вокруг нас были бы линейными. К счастью, мы живем в нелинейном мире, и если линеаризация укрывает физику, то нелинейность делает ее захватывающей.

И.Р. Шен

Согласно изложенной схеме, описание нелинейных дефектов в модели (5.1) редуцируется к линейной задаче

$$\Delta\Phi = \Phi \cos \tilde{u},$$

$$\begin{aligned}\Phi^+ - \Phi^- &= q_i^{(\infty)}(y - y_i) [H(y - y_i + l_i) - H(y - y_i - l_i)] \quad (x = x_i), \\ (\partial_x \Phi)^+ &= (\partial_x \Phi)^- \quad ((x, y) \in L_i, i = 1, 3, \dots, N), \\ \Phi &\rightarrow 0 \quad (r \rightarrow \infty),\end{aligned}$$

решение которой имеет вид

$$\Phi(x, y) = - \sum_{i=1}^N \int_{-l_i}^{l_i} dy' \partial_{x_i} G(x_i, x, y' + y_i, y) q_i^{(\infty)}(y'). \quad (5.1.1)$$

Здесь $G(x', x, y', y)$ функция Грина – исчезающее на бесконечности сингулярное решение следующего неоднородного уравнения:

$$(\partial_{x'}^2 + \partial_{y'}^2 - \cos \tilde{u}(x')) G(x', x, y', y) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (5.1.2)$$

Используя формулы (5.1.1), (5.1.2) и соотношение взаимности [24]:

$$G(x', x, y', y) = G(x, x', y, y'),$$

нетрудно показать, что рассмотренные дефекты можно интерпретировать как обобщенные сингулярные решения уравнения (5.14) при наличии источников, которые выражаются в терминах дельта-функции [9]:

$$\begin{aligned}\Delta \Phi &= \cos \tilde{u}(x) \Phi + \partial_x q^{(\infty)}(x, y), \\ q(x, y) &= \sum_{i=1}^N \delta(x - x_i) \int_{-l_i}^{l_i} \delta(y - y_i - \tilde{y}) q_i^{(\infty)}(\tilde{y}) d\tilde{y}.\end{aligned} \quad (5.1.3)$$

Для точечных дефектов в формулах (5.1.1), (5.1.3) полагаем $q_i^{(\infty)}(\tilde{y}) = \vartheta_i^{(\infty)} \delta(\tilde{y})$.

Дефекты, порожденные силами, распределенными вдоль линий L_i :

$$f^{(\infty)}(x, y) = \sum_{i=1}^N \delta(x - x_i) \int_{-l_i}^{l_i} \delta(y - y_i - \tilde{y}) f_i^{(\infty)}(\tilde{y}) d\tilde{y} \quad (5.1.4)$$

описываются сингулярным уравнением

$$\Delta \Phi = \cos \tilde{u}(x) \Phi + f^{(\infty)}(x, y). \quad (5.1.5)$$

Когда сила сосредоточена в точке (x_i, y_i) , в (5.1.5) следует положить $f^{(\infty)}(x, y) = f_{0i}^{(\infty)}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)$. Решение уравнения (5.1.5) имеет вид

$$\Phi = \sum_{i=1}^N \int_{-l_i}^{l_i} dy' G(x_i, x, y_i + y', y) f_i^{(\infty)}(y'). \quad (5.1.6)$$

Заметим, что при описании в рамках модели (5.1) протяженных джозефсоновских контактов источники типа $f_{0i}^{(\infty)}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)$ моделируют инжекционные токи, обусловленные микрозакоротками в плоскости сверхпроводящего контакта [25].

Обратим также внимание на следующее обстоятельство. При одинаковых топологических свойствах нелинейных и линейных дефектов сингулярные источники в уравнениях (5.11), (5.13) и (5.1.3), (5.1.4), вообще говоря, могут различаться множителями (на поле $\Phi(x, y)$, нет ограничений типа (5.6б)). Источники в нелинейном уравнении мы обозначили $f^{(0)}$, $q^{(0)}$, а источники линеаризованной задачи снабдили другим верхним индексом: $f^{(\infty)}$, $q^{(\infty)}$. Как указывалось ранее, физический смысл источников $f^{(\infty)}$ и $q^{(\infty)}$ в том, что они характеризуют асимптотику поля $u(x, y)$ при $r \rightarrow \infty$. Самосогласование мощности источников в уравнениях (5.11), (5.13) и (5.1.3), (5.1.4), можно осуществить, исследуя асимптотическое поведение построенных по предлагаемой схеме решений $u(x, y)$ вблизи ядер дефектов. В дальнейшем мы поясним это утверждение на примерах.

Приведем явный вид функций Грина при разном выборе состояния $\tilde{u}(x')$ в уравнении (5.1.2). Поскольку неоднородность поля $\tilde{u}(x')$ не затрагивает координату y' , все функции Грина зависят от разности координат $y' - y$:

$$G(x', x, y', y) = G(x', x, y' - y)$$

и, следовательно, для их вычисления удобно использовать преобразование Фурье по переменной $(y' - y)$.

Найдем сначала функцию Грина, связанную с тривиальным основным состоянием:

$$\tilde{u}(x') = 0. \quad (5.1.7)$$

Пусть

$$G(x', x, y' - y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \exp[ik(y' - y)] g(k, x', x), \quad (5.1.8)$$

тогда $g(k, x', x)$ удовлетворяет уравнению

$$\left[\partial_{x'}^2 - k^2 - 1 \right] g(k, x', x) = \delta(x' - x) \quad (5.1.9)$$

и условиям

$$g \Big|_{x'=x+0} = g \Big|_{x'=x-0}; \quad (\partial_{x'} g) \Big|_{x'=x+0} - (\partial_{x'} g) \Big|_{x'=x-0} = 1;$$

$$g(x', x, k) \rightarrow 0, |x'| \rightarrow \infty. \quad (5.1.10)$$

В рассматриваемом случае функция Грина имеет вид

$$G(x', x, y' - y) =$$

$$= -\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{\sqrt{1+k^2}} \exp \left[ik(y' - y) - \sqrt{1+k^2}(x' - x) \right] = -\frac{1}{2\pi} K_0(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|),$$

$$(5.1.11)$$

где $K_0(r)$ – модифицированная функция Бесселя третьего рода [26] (современное определение функций Бесселя дано Макдональдом).

При наличии фона типа полосовой доменной структуры

$$\tilde{u}(x) \equiv u_0(x) = 4 \operatorname{Arctg} \frac{\operatorname{cn}(\chi, k)}{1 + \operatorname{sn}(\chi, k)}, \quad \chi = \frac{x}{k} \quad (5.1.12)$$

функцию Грина (5.1.2) удобнее вычислять при другой форме записи преобразования Фурье:

$$G(x', x, y' - y) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau g(x', x, \tau) \exp \frac{i\tau}{2}(y' - y). \quad (5.1.13)$$

Тогда функция $g(x', x, \tau)$ удовлетворяет уравнению

$$\left[\partial_{x'}^2 - \left(\frac{\tau}{2} \right)^2 - \cos u_0(x') \right] g(x', x, \tau) = \delta(x' - x) \quad (5.1.14)$$

и условиям (5.1.10). Учитывая, что решения однородного уравнения (5.1.14) суть

$$\sigma = \left[\tau^2 + (\partial_{x'} u_0)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \exp \left\{ \pm \frac{|w_1 w_2 \tau|}{2} \int_x^{x'} d\xi \left[\left(\frac{\tau}{2} \right)^2 + \left(\frac{\partial_{\xi} u_0}{2} \right)^2 \right]^{-1} \right\},$$

находим

$$g(x', x, \tau) = -\frac{1}{|w_1 w_2 \tau|} \left[\left(\frac{\tau}{2} \right)^2 + \left(\frac{\partial_x u_0(x)}{2} \right)^2 \right]^{1/2} \left[\left(\frac{\tau}{2} \right)^2 + \left(\frac{\partial_x u_0(x')}{2} \right)^2 \right]^{1/2} \exp \Omega,$$

$$\Omega = \frac{|w_1 w_2 \tau|}{2} \operatorname{sign}(x - x') \int_x^{x'} d\xi \left[\left(\frac{\tau}{2} \right)^2 + \left(\frac{\partial_\xi u_0}{2} \right)^2 \right]^{-1}. \quad (5.1.15)$$

Для дальнейшего анализа потребуется выражение для производной по x' от g :

$$\partial_{x'} g(x', x, \tau) = -\frac{1}{4} \left[\frac{\tau^2 + (\partial_x u_0(x))^2}{\tau^2 + (\partial_x u_0(x'))^2} \right]^{1/2} \times$$

$$\times \left\{ 2 \operatorname{sign}(x - x') + \frac{\partial_x u_0(x') \sin u_0(x')}{|w_1 w_2 \tau|} \right\} \exp \Omega, \quad x \neq x'. \quad (5.1.16)$$

Здесь w_1 и w_2 – функции от параметра τ :

$$w_1^2 = \left(\frac{\tau}{2} \right)^2 + k^{-2}, \quad w_2^2 = -\left(\frac{\tau}{2} \right)^2 - \left(\frac{k'}{k} \right)^2.$$

Для сопоставления τ со спектральным параметром α задачи рассеяния главы 3 необходима униформизация:

$$w_1 = \frac{\alpha + \alpha^{-1}}{2}, \quad w_2 = \frac{\alpha - \alpha^{-1}}{2i}, \quad \tau = 2\sqrt{w_1^2 - k^{-2}}.$$

Для дальнейшего анализа удобнее переписать функции g и $\partial_{x'} g$ в λ -параметризации (3.1.10), где их аналитические свойства яснее. При преобразованиях используются соотношения:

$$\operatorname{dn}^2 \chi - \operatorname{dn}^2 \lambda = \frac{\theta_1 \left(\frac{\lambda - \chi}{2K} \right) \theta_1 \left(\frac{\lambda + \chi}{2K} \right)}{\theta_4^2 \left(\frac{\lambda}{2K} \right) \theta_4^2 \left(\frac{\chi}{2K} \right)} \left[\frac{\theta_2(0) \theta_4(0)}{\theta_3(0)} \right]^2,$$

$$-\frac{i w_1 w_2 \tau}{2} \int \frac{dx'}{(\tau/2)^2 + (\partial_x u_0/2)^2} = -\chi Z(\lambda) + \frac{1}{2} \ln \left[\theta_1 \left(\frac{\lambda + \chi}{2K} \right) / \theta_1 \left(\frac{\lambda - \chi}{2K} \right) \right]. \quad (5.1.17)$$

Здесь параметр тета-функций $q = \exp(-\pi K'/K)$, $Z(\lambda)$ – зета-функция Якоби.

Интервал интегрирования по переменной τ в выражении (5.1.13) отображается в контур C_0 на λ -плоскости, состоящий из двух отрезков: $\lambda = \pm iK' + t$, $-K \leq t \leq 0$. Направление обхода C_0 такое же, что на рис. 4.10. Учитывая, что на C_0

$$\left| \frac{w_1 w_2 \tau}{2} \right| = -\frac{i w_1 w_2 \tau}{2} = \frac{\operatorname{sn} \lambda \operatorname{cn} \lambda \operatorname{dn} \lambda}{k},$$

получаем

$$\begin{aligned} G(x', x, y' - y) &= \int_{C_0} d\lambda \Psi(\chi, \chi', \lambda) \exp \{ A(|\chi - \chi'|, y - y', \lambda) \}, \\ \partial_x G(x', x, y' - y) &= \int_{C_0} d\lambda \varphi(\chi, \chi', \lambda) \exp \{ A(|\chi - \chi'|, y - y', \lambda) \}. \end{aligned} \quad (5.1.18)$$

Здесь функции φ , Ψ и A имеют вид

$$\begin{aligned} \Psi(\chi, \chi', \lambda) &= \\ &= -\frac{1}{4\pi i} \left[\frac{\theta_2(0)\theta_4(0)}{\theta_3(0)\theta_4(\lambda/2K)} \right]^2 \frac{\theta_1 \left[\frac{\lambda - \operatorname{sign}(x - x')\chi}{2K} \right] \theta_1 \left[\frac{\lambda + \operatorname{sign}(x - x')\chi'}{2K} \right]}{\operatorname{dn} \lambda \theta_4(\chi/2K) \theta_4(\chi'/2K)}, \\ \varphi(\chi, \chi', \lambda) &= -\frac{1}{4\pi i} k \operatorname{sn} \lambda \operatorname{cn} \lambda \frac{\theta_1 \left[\frac{\lambda - \operatorname{sign}(x - x')\chi}{2K} \right] \theta_4 \left(\frac{\chi'}{2K} \right)}{\theta_1 \left[\frac{\lambda - \operatorname{sign}(x - x')\chi'}{2K} \right] \theta_4 \left(\frac{\chi}{2K} \right)} \times \\ &\times \left\{ \operatorname{sign}(x - x') - \frac{\operatorname{sn} \chi' \operatorname{cn} \chi' \operatorname{dn} \chi'}{\operatorname{sn} \lambda \operatorname{cn} \lambda \operatorname{dn} \lambda} \right\}, \quad A(|\chi|, y, \lambda) = |\chi| Z(\lambda) + \frac{\operatorname{dn} \lambda}{k} y. \end{aligned} \quad (5.1.19)$$

5.2. НЕЛИНЕЙНЫЕ ДЕФЕКТЫ НА ФОНЕ ОДНОРОДНОГО ОСНОВНОГО СОСТОЯНИЯ. ОПИСАНИЕ МЕТОДОМ ОЗР

Никогда не решай более одной единственной проблемы зараз.

П. Дирак

Никогда нельзя решать только одну проблему, всегда приходится иметь дело сразу с несколькими.

В. Гейзенберг

Противоположность верного утверждения – ложное утверждение. Но противоположностью глубокой истины может оказаться другая глубокая истина.

Н. Бор

Наличие у системы нетривиального основного состояния существенно осложняет вычисления, поэтому рассмотрим вначале простую задачу – описание дефектов на однородном фоне (в соизмеримой фазе). Тогда

$$u(x, y) \rightarrow 0, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty. \quad (5.2.1)$$

В работе [23] нами развит основанный на ОЗР метод интегрирования эллиптического уравнения sine-Gordon (5.1) с однородной асимптотикой по переменной y :

$$u(x, y) \rightarrow 0 \pmod{4\pi}, \quad |y| \rightarrow \infty. \quad (5.2.2)$$

Поскольку вычисления аналогичны тем, что изложены в главах 3 и 4, не останавливаясь на деталях, приведем результаты этой работы в форме, удобной для дальнейшего анализа.

Уравнение (5.1) можно представить как условие совместности следующей линейной системы (пара Лакса):

$$\partial_y \Psi = L\Psi, \quad \partial_x \Psi = A\Psi;$$

$$L = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial_x u}{2} \sigma_1 - \sigma_3 w_2 \cos \frac{u}{2} + i \sigma_2 w_1 \sin \frac{u}{2} \right\}, \quad w_1 = \frac{\lambda + \lambda^{-1}}{2}; \quad (5.2.3)$$

$$A = \frac{1}{2} \left\{ -\frac{\partial_y u}{2} \sigma_1 + \sigma_3 w_1 \cos \frac{u}{2} + i \sigma_2 w_2 \sin \frac{u}{2} \right\}, \quad w_2 = \frac{\lambda - \lambda^{-1}}{2i}.$$

Здесь λ – спектральный параметр. Матричные функции Иоста определим асимптотическим поведением по переменной y :

$$\begin{aligned}\Psi_2 &\rightarrow \exp\left\{-\frac{\sigma_3}{2} w_2 y + \frac{\sigma_3}{2} w_1 x\right\} \equiv \Psi_2^{(0)}(\lambda, x, y), \quad y \rightarrow +\infty; \\ \Psi_1 &\rightarrow \exp\left\{-\frac{\sigma_3}{2} w_2 y + \frac{\sigma_3}{2} w_1 x\right\} \equiv \Psi_1^{(0)}(\lambda, x, y), \quad y \rightarrow -\infty.\end{aligned}\quad (5.2.4)$$

Мы нашли [23], что решения Иоста $\Psi_{1,2}$ могут быть получены из асимптотических значений (5.2.4) с помощью операторов преобразования. Так, функция Ψ_2 допускает представление

$$\begin{aligned}\Psi_2 &= m(x, y) \Psi_2^{(0)}(\lambda, x, y) + \\ &+ \int_y^\infty [\tilde{M}(x, y, y') + w_1(\lambda) \tilde{N}(x, y, y')] \Psi_2^{(0)}(\lambda, x, y') dy'.\end{aligned}$$

Вещественные ядра имеют вид

$$\begin{aligned}m(x, y) &= I \cos u/4, \quad \tilde{M}(x, y, y') = \tilde{M}_{11}(x, y, y')I + \tilde{M}_{12}(x, y, y')\sigma_1, \\ \tilde{N}(x, y, y') &= \tilde{N}_{11}(x, y, y')\sigma_3 + \tilde{N}_{12}(x, y, y')i\sigma_2,\end{aligned}$$

где I – единичная матрица 2×2 , σ_s – матрицы Паули. На характеристике $y = y'$ имеем

$$\tilde{N}(x, y, y) = -\frac{i\sigma_2}{2} \sin \frac{u(x, y)}{2}.$$

Функции $\Psi_1(\lambda)$ и $\Psi_2(\lambda)$ удовлетворяют редукциям:

$$\Psi_1(\lambda) = \sigma_1 \Psi_1(-\lambda) \sigma_1, \quad \Psi_2(\lambda) = \sigma_1 \Psi_2(-\lambda) \sigma_1; \quad (5.2.5)$$

$$\Psi_1(\lambda) = \Psi_1^*(\lambda^{*-1}), \quad \Psi_2(\lambda) = \Psi_2^*(\lambda^{*-1}). \quad (5.2.6)$$

На вещественной оси комплексной λ -плоскости они связаны соотношением

$$\Psi_1(\lambda) = \Psi_2(\lambda) T(\lambda), \quad \text{Im } \lambda = 0. \quad (5.2.7)$$

При выборе асимптотик в виде (5.2.4) матрица перехода T будет зависеть только от спектрального параметра λ . Нетрудно показать, что

$T(\lambda)$ – унимодулярная матрица: $\det T(\lambda) = 1$. Согласно выражениям (5.2.5), (5.2.7), ее элементы связаны друг с другом:

$$T_{12}(\lambda) = T_{21}(-\lambda), T_{22}(\lambda) = T_{11}(-\lambda) \quad (5.2.8)$$

и удовлетворяют инволюции

$$T(\lambda) = T^*(\lambda^{*-1}). \quad (5.2.9)$$

Введем обозначения ψ и $\bar{\psi}$ (φ и $\bar{\varphi}$) для первого и второго столбцов матрицы Ψ_1 (Ψ_2): $\Psi_1 = (\psi, \bar{\psi})$, ($\Psi_2 = (\varphi, \bar{\varphi})$). С вещественной оси комплексной λ -плоскости в верхнюю ($0 < \arg \lambda < \pi$) полуплоскость аналитически продолжаются функции $\varphi(\lambda)$, $\bar{\psi}(\lambda)$, $T_{22}(\lambda)$, а в нижнюю полуплоскость – функции $\bar{\varphi}(\lambda)$, $\psi(\lambda)$, $T_{11}(\lambda)$. В областях своей аналитичности элементы $T_{22}(\lambda)$ и $T_{11}(\lambda)$ матрицы перехода могут иметь нули. В силу инволюции (5.2.9) они не произвольны. А именно, нули коэффициента $T_{11}(\lambda)$ разбиваются на две группы:

$$\lambda = \exp i\beta_p, \quad \beta_p = \beta_p^*, \quad \sin \beta_p < 0 \quad p = 1, 2, \dots, M; \quad (5.2.10a)$$

$$\lambda = \lambda_k, \quad \lambda_{k+N} = \lambda_k^{*-1}, \quad \text{Im} \lambda_k < 0, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad N = 1, 2, \dots \quad (5.2.10б)$$

Нули первой группы или отсутствуют, или их полное число M должно быть четным, нули второй группы, если они есть, всегда парные. В любом случае полное число нулей коэффициента $T_{11}(\lambda)$ – четное. Поскольку $T_{11}(\lambda) = \det(\psi, \bar{\varphi})$, в нулях $\lambda = \lambda_j$ ($\text{Im} \lambda_j < 0$) функции $T_{11}(\lambda)$ имеем

$$\psi(\lambda_j) = c_j \bar{\varphi}(\lambda_j). \quad (5.2.11)$$

При наличии нулей (5.2.10a) коэффициенты c_j – произвольные вещественные числа, а в случае нулей (5.2.10б) – это комплексные числа, которые образуют пары: $c_k, c_{k+N} = c_k^*$.

Для дальнейшего анализа полезно ввести матричные функции $\Psi_+ = (\varphi, \bar{\psi})$ и $\Psi_- = (\psi, \bar{\varphi})$, аналитические соответственно в верхней и нижней полуплоскостях комплексной λ -плоскости. Тогда выражение (5.2.7) сведется к условию сопряжения этих функций на вещественной λ -оси:

$$\Psi_+(\lambda) = \frac{1}{T_{11}(\lambda)} \Psi_-(\lambda) G(\lambda), \quad G(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & T_{12}(\lambda) \\ -T_{21}(\lambda) & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{Im} \lambda = 0. \quad (5.2.12)$$

Из (5.2.5) следует, что на вещественной оси функции $\Psi_{\pm}(\lambda)$ выражаются друг через друга:

$$\Psi_{+}(\lambda) = \sigma_1 \Psi_{-}(-\lambda) \sigma_1, \quad \text{Im} \lambda = 0. \quad (5.2.13)$$

Решения нелинейного уравнения (5.1) с асимптотикой (5.2.2) можно записать в форме

$$N_{12}(y, y) = -\frac{1}{2} \text{tg} \frac{u}{4}. \quad (5.2.14)$$

Функции $N_{ij}(y, y') = \tilde{N}_{ij}(y, y')/m(y)$ и $M_{ij}(y, y') = \tilde{M}_{ij}(y, y')/m(y)$ ($i, j = 1, 2$) определяются системой линейных интегральных уравнений обратной задачи рассеяния:

$$\begin{aligned} 4N_{11}(y, z) + \int_y^{\infty} [M_{12}(y, y') F_0(y'+z) + N_{12}(y, y') F_1(y'+z)] dy' &= 0, \\ 4M_{11}(y, z) + \int_y^{\infty} [M_{12}(y, y') F_1(y'+z) + N_{12}(y, y') F_2(y'+z)] dy' &= 0, \\ 4M_{12}(y, z) + F_1(y+z) + \\ + \int_y^{\infty} [M_{11}(y, y') F_1(y'+z) - N_{11}(y, y') F_2(y'+z)] dy' &= 0, \\ -4N_{12}(y, z) + F_0(y+z) + \\ + \int_y^{\infty} [M_{11}(y, y') F_0(y'+z) - N_{11}(y, y') F_1(y'+z)] dy' &= 0. \end{aligned} \quad (5.2.15)$$

Заметим, что величины $N_{ij}(y, z)$, $M_{ij}(y, z)$ здесь зависят не только от аргументов y, z , но и от координаты x , так как она входит в качестве параметра в определение ядер:

$$\begin{aligned} F_i(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \lambda^{-1} w_1^i(\lambda) \exp\left(\frac{w_2(\lambda)}{2} y - w_1(\lambda) x\right) \frac{T_{21}(\lambda)}{T_{11}(\lambda)} + \\ + \sum_{n=1}^{2M} \gamma_n w_1^i(\lambda_n) \exp\left(\frac{w_2(\lambda_n)}{2} y - w_1(\lambda_n) x\right), \end{aligned}$$

где $\gamma_n = ic_n [\lambda_n \partial_{\lambda} T_{11}(\lambda_n)]^{-1}$.

Чисто солитонные дефекты получаются при условии $T_{21}(\lambda) \equiv 0$ и наличии нулей у функции $T_{11}(\lambda)$ в области ее аналитичности. Приведем солитоноподобное решение, соответствующее следующему выбору $T_{11}(\lambda)$:

$$T_{11}(\lambda) = \frac{(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_1^{*-1})}{(\lambda + \lambda_1)(\lambda + \lambda_1^{*-1})}, \quad \text{Im } \lambda_1 < 0.$$

После простых вычислений находим

$$\begin{aligned} \text{tg } \frac{u}{4} &= \left| \frac{\text{sh} \mu - \text{sh} \mu^*}{\text{ch} \mu - \text{ch} \mu^*} \right| \frac{\cos N}{\text{sh } M}, \quad N = n_0 + \text{Im } A, \\ M &= m_0 + \ln \left| \frac{\text{sh} \mu - \text{sh} \mu^*}{\text{ch} \mu - \text{ch} \mu^*} \right| + \text{Re } A, \end{aligned} \quad (5.2.16)$$

где $A = x \text{ch} \mu + iy \text{sh} \mu$, $\mu = \ln \lambda_1$; m_0, n_0 – вещественные параметры. Решение (5.2.16) описывает цепочку вихрей с чередующимися топологическими зарядами $Q = \pm 4$ на однородном фоне. Такие решения проанализированы в главе 2. В данном случае цепочка вихрей образует угол $\arctg \{ \text{Re}(\text{ch } \mu) / \text{Im}(\text{sh } \mu) \}$ с осью Ox . Вдоль этого направления решение (5.2.16) не локализовано и не удовлетворяет асимптотическому условию (5.2.1).

Так же, как сделано в главе 4, можно доказать, что асимптотическое условие (5.2.1) будет выполнено лишь тогда, когда дискретный спектр в задаче рассеяния отсутствует и диагональные элементы матрицы перехода равны единице. Иными словами, для рассматриваемой краевой задачи в интегральных уравнениях (5.2.15) следует применять специальный набор ядер $F_i(y)$ ($i = 0, 1, 2$), который задается одной спектральной плотностью $T_{21}(\lambda)$:

$$F_i(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \lambda^{-1} w_1^i(\lambda) \exp \left(\frac{w_2(\lambda)}{2} y - w_1(\lambda) x \right) T_{21}(\lambda). \quad (5.2.17)$$

Используя выражения (5.2.1), (5.2.14), (5.2.15), нетрудно показать, что в линейном приближении асимптотическое поведение поля $u(x, y)$ при $r \rightarrow \infty$ выражается через $T_{21}(\lambda)$:

$$u(x, y) \approx \Phi(x, y) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \lambda^{-1} T_{21}(\lambda) \exp \{ -w_1(\lambda) x + w_2(\lambda) y \}. \quad (5.2.18)$$

Для нелинейных дефектов функцию $T_{21}(\lambda)$ вычислим, исходя из предположения о «наследовании» особенностей при переходе от нелинейной модели (5.1) к ее линейризации (5.14) (в данном случае $\tilde{u}(x) = 0$). Дефекты определяются условиями на разрезах, или, что эквивалентно, сингулярными источниками, которые фиксируют ядра дефектов. Соответствующие решения для поля $\Phi(x, y)$ в линейном приближении (5.14) найдены в п. 5.1 (см. (5.1.1) и (5.1.6)). отождествление выражений (5.1.1), (5.1.6) и (5.2.18) дает способ вычисления спектральной плотности $T_{21}(\lambda)$. При сопоставлении формул полезны соотношения

$$w_2(\lambda) = -ik, \quad d\lambda \lambda^{-1} = w_1^{-1}(\lambda) dk, \quad w_1(\lambda) = \sqrt{1+k^2} \operatorname{sign} \lambda. \quad (5.2.19)$$

Поскольку в результате функция $T_{21}(\lambda)$ оказывается известной, система (5.2.14), (5.2.15) дает полное аналитическое описание структуры нелинейных дефектов в модели (5.1). Проиллюстрируем эту процедуру на примерах.

5.2.1. Системы из дислокационных, дисклинационных диполей, точечных дефектов

Рассмотрим сначала дефекты, которые задаются скачками (5.6) поля $u(x, y)$ на разрезах. Тогда, согласно выражениям (5.1.1), (5.1.8), имеем

$$\Phi(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} dk \partial_{x_n} g(k, x_n, x) q_n^{(\infty)}(k) \exp[-ik(y - y_n)]. \quad (5.2.20)$$

Здесь $q_n^{(\infty)}(k)$ – форм-факторы дефектов:

$$q_n^{(\infty)}(k) = \int_{-l_n}^{l_n} dy' \exp(iky') q_n^{(\infty)}(y'). \quad (5.2.21)$$

Для дислокационного диполя (5.7) получаем

$$q_n^{(\infty)}(k) = 4\pi m_n^{(\infty)} k^{-1} \sin kl_n. \quad (5.2.22)$$

Для дисклинационного диполя (5.9)

$$q_n^{(\infty)}(k) = \frac{2\omega_n^{(\infty)}}{ik} \left\{ l_n \cos kl_n - \frac{1}{k} \sin kl_n \right\}. \quad (5.2.23)$$

Заметим, что форм-факторы (5.2.22), (5.2.23) не имеют особенностей при $k = 0$.

Для точечного дефекта (5.10) находим

$$q_n^{(\infty)}(k) = \vartheta_n^{(\infty)}. \quad (5.2.24)$$

Обсудим ряд конкретных задач. Пусть изолированный дефект задается скачком поля $u(x, y)$ на разрезе $L_1 = \{x = 0, |y| \leq l_1\}$. Используя формулу (5.1.11), выражение (5.2.20) для поля $\Phi(x, y)$ можно записать в виде

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{4\pi} \text{sign}(x) \int_{-\infty}^{\infty} dk \exp[-iky - \sqrt{1+k^2}|x|] q_1^{(\infty)}(k). \quad (5.2.25)$$

Сравнение соотношений (5.2.25) и (5.2.18) (после замены переменных (5.2.19)) приводит к следующим заключениям. При $x\lambda < 0$ функция $T_{21}(\lambda)$ должна обращаться в нуль. При $x\lambda > 0$ спектральная плотность отлична от нуля и имеет вид

$$\begin{aligned} T_{21}(\lambda) &= -\frac{1}{4} w_1(\lambda) \text{sign}(x) q_1^{(\infty)}(i w_2(\lambda)) = \\ &= -\pi m_n^{(\infty)} w_1(\lambda) \text{sign}(x) \frac{\sin(i w_2(\lambda) l_1)}{i w_2(\lambda)}. \end{aligned} \quad (5.2.26)$$

В случае дислокационного (вихревого) диполя найденная нами спектральная функция (5.2.22), (5.2.26) с точностью до постоянного множителя $m_1^{(\infty)}$ совпадает с приведенной в работе [13], где для решения соответствующей краевой задачи использовался другой вычислительный прием (аналогичный методу изображений в электростатике). Согласно работам [10–13], вихревые диполи на однородном фоне представляют собой струнные конфигурации из отрезков солитонных линий (доменных границ). Пример простейшего вихревого диполя (топологические заряды вихрей $m_1^{(0)} = \pm 1$) приведен на рис. 5.5, а.

Параметр $m_1^{(\infty)}$ для вихревого диполя с зарядами $\mp m_1^{(0)}$ в точках ($x = 0, y = \pm 1$) вычислим, воспользовавшись приемом главы 4. Поле вихревого диполя удовлетворяет условию на разрезе (5.7) и свойству симметрии (4.8.3). Соотношения (5.7) и (4.8.3) определяют

предельные значения при $x \rightarrow +0$ поля u на оси Oy всюду, за исключением точек, где находятся вихри:

$$u^+(y) = \begin{cases} 0, & |y| > l, \\ \pi m_1^{(0)}, & |y| \leq l. \end{cases}$$

Из первого уравнения (5.2.3) и формул (5.2.4), (5.2.7) при $x \rightarrow +0$ получаем интегральное представление для элемента $T_{21}(\lambda)$ матрицы перехода:

$$T_{21}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} dy \exp(-w_2(\lambda)y/2) \left\{ (L - L_0)_{21}(\Psi_2)_{11} + (L - L_0)_{22}(\Psi_2)_{21} \right\} \Big|_{x \rightarrow +0},$$

где L_0 – значение матричной функции L на фоновом состоянии $\tilde{u}(x^0) = 0$.

Используя асимптотические разложения подынтегральных функций вблизи особой точки $\lambda = 0$:

$$\Psi_2 = \exp(-i\sigma_1 u/4) [1 + O(\lambda)] \exp\{-\sigma_3 w_2(\lambda)y/2 + \sigma_3 w_1(\lambda)x/2\};$$

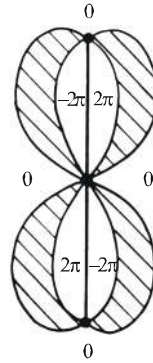
$$L_{21} = -\frac{1}{4\lambda} \sin \frac{u}{2} + O(1), \quad L_{22} = \frac{i}{4\lambda} \cos \frac{u}{2} + O(\lambda^2),$$

а также предельные значения поля $u(x, y)$, при $x \rightarrow +0$ находим

$$\begin{aligned} T_{21} &\approx \left(-\frac{1}{4\lambda} + O(1) \right) \int_{-\infty}^{\infty} dy \sin \frac{u^+(y)}{4} \exp(-w_2(\lambda)y) = \\ &= \left(-\frac{1}{2\lambda} + O(1) \right) \left(\frac{\sin[iw_2(\lambda)l]}{iw_2(\lambda)} \right) \sin \frac{\pi m_1^{(0)}}{4}. \end{aligned} \quad (5.2.27)$$

Сравнение выражения (5.2.27) с разложением (5.2.26) позволяет фиксировать значение параметра $m_1^{(\infty)}$: $m_1^{(\infty)} = (4/\pi) \sin(\pi m_1^{(0)}/4)$. Полученный коэффициент $m_1^{(\infty)}$ в формуле (5.2.26) отличается от того, который приведен в [13]. В работе [16] отмечена некорректность вычислений [13] и найдено другое выражение для данных рассея-

Рис. 5.6. Вихревая струнная конфигурация, соответствующая кусочно-постоянному скачку поля $u(x, y)$ на разрезе. Заштрихованные области – 2π -солитоны



ния, совпадающее с представленной здесь формулой. В п. 5.2.3 указан более общий путь конкретизации данных рассеяния для дефектов модели sine-Gordon.

Предлагаемый подход позволяет пополнить класс вихревых структур, поддающихся аналитическому описанию. В качестве примера на рис. 5.6 изображена новая вихревая конфигурация, которая отвечает кусочно-постоянному скачку поля $u(x, y)$ на разрезе $S = \{x = 0, |y| < l\}$:

$$u^+ - u^- = 4\pi \operatorname{sign} y, \quad |y| < l.$$

Формулу связи ее параметров $m^{(0)}, m^{(\infty)}$ нетрудно получить тем же способом, что и для вихревого диполя. В магнетиках такое образование можно интерпретировать как гантелеобразный магнитный домен или домен с перетяжкой. Интересно, что подобные состояния экспериментально наблюдались в пленках феррит-гранатов [27].

Рассмотрим два дефекта, которые описываются разрезами $L_i = \{x = x_i, |y - y_i| \leq l_i\}, i = 1, 2; x_2 > x_1$. Отметим существенную деталь. Хотя для вспомогательной линейной задачи (5.14) выполняется принцип суперпозиции решений, спектральная плотность $T_{21}(\lambda)$ системы дефектов этому принципу не удовлетворяет. При сопоставлении выражений (5.2.18) и (5.2.20) нужно учесть, что из-за наличия $|x - x'|$ в формуле (5.1.11) на разных участках оси x функция $\Phi(x, y)$ (5.2.20) записывается по-разному. При $x > x_2 > x_1$

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=1,2} \int_{-\infty}^{\infty} dk q_n^{(\infty)}(k) \exp\left\{-ik(y - y_n) - \sqrt{1+k^2}(x - x_n)\right\}. \tag{5.2.28a}$$

При $x < x_2 < x_1$ находим

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=1,2} (-1)^{n+1} \int_{-\infty}^{\infty} dk q_n^{(\infty)}(k) \left\{-ik(y - y_n) + (-1)^n \sqrt{1+k^2}(x - x_n)\right\}. \tag{5.2.28б}$$

При $x < x_1$ имеем

$$\Phi(x, y) = -\frac{1}{4\pi} \sum_{n=1,2} \int_{-\infty}^{\infty} dk q_n^{(\infty)}(k) \exp\left\{-ik(y - y_n) + \sqrt{1+k^2}(x - x_n)\right\}. \quad (5.2.28\text{В})$$

Из сравнения соотношений (5.2.18) и (5.2.28) заключаем: $T_{21}(\lambda) = 0$ при $x > x_2$, $\lambda < 0$ и при $x < x_1$, $\lambda > 0$. В интервале $x > x_2 > x_1$ при $\lambda > 0$ и в области $x < x_1$ при $\lambda < 0$ спектральная функция $T_{21}(\lambda)$ должна быть задана в форме

$$T_{21}(\lambda) = -\frac{1}{4} w_1(\lambda) \text{sign}(x - x_1) \sum_{n=1,2} q_n^{(\infty)}(i w_2(\lambda)) \exp\{w_1(\lambda)x_n - w_2(\lambda)y_n\}. \quad (5.2.29\text{а})$$

При $x_1 < x < x_2$ находим

$$T_{21}(\lambda) = \begin{cases} -\frac{1}{4} w_1(\lambda) q_1^{(\infty)}(i w_2(\lambda)) \exp\{w_1(\lambda)x_1 - w_2(\lambda)y_2\}, & \lambda > 0 \\ \frac{1}{4} w_1(\lambda) q_2^{(\infty)}(i w_2(\lambda)) \exp\{w_1(\lambda)x_2 - w_2(\lambda)y_2\}, & \lambda < 0. \end{cases} \quad (5.2.29\text{б})$$

Аналогичным образом можно описать любое конечное число дефектов на однородном фоне.

5.2.2. Дефекты, порожденные локализованными силовыми воздействиями

Перейдем к описанию другого класса дефектов. В двумерных кристаллах такие дефекты образуются под действием локальных сил, в сверхпроводящих джозефсоновских контактах они обусловлены инжекционными токами от микроразоротов в области туннельного перехода. В линейном приближении поля дефектов дают выражения (5.1.6), (5.1.8), (5.1.11):

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} dk g(k, x_n, x) f_n^{(\infty)}(k) \exp(-ik(y - y_n)),$$

$$g(k, x', x) = -\frac{1}{2\sqrt{1+k^2}} \exp\left[-\sqrt{1+k^2} |x'-x|\right]. \quad (5.2.30)$$

Здесь $f_n^{(\infty)}(k)$ – форм-факторы дефектов

$$f_n^{(\infty)}(k) = \int_{-l_n}^{l_n} dy \exp iky f_n^{(\infty)}(y). \quad (5.2.31)$$

Сопоставляя формулы (5.2.30), (5.2.18), находим $T_{21}(\lambda)$. Приведем примеры.

Пусть изолированный дефект задается силами, сосредоточенными вдоль отрезка $L_1 = \{x = x_1, |y - y_1| \leq l_1\}$. Спектральная функция $T_{21}(\lambda)$ обращается в нуль, если $(x - x_1)\lambda < 0$. При $(x - x_1)\lambda > 0$ имеем

$$T_{21}(\lambda) = \frac{f_1^{(\infty)}(iw_2(\lambda))}{4} \text{sign}(x - x_1) \exp\{w_1(\lambda)x_1 - w_2(\lambda)y_1\}. \quad (5.2.32)$$

В частности, для силы, локализованной в точке с координатами $x_1 = y_1 = 0$, получаем

$$T_{21}(\lambda) = \frac{f_1^{(\infty)}}{4} \text{sign}(x), \quad (5.2.33)$$

где $f_1^{(\infty)} = \text{const}$. Поскольку матрица перехода в задаче рассеяния для этого случая не зависит от спектрального параметра λ , решение нелинейного уравнения (5.1), найденное с помощью (5.2.33), принадлежит классу изоэнодромных. Для последних наряду с исходной L - A -системой имеется еще «уравнение по λ », которое позволяет эффективно вычислять их асимптотику, используя такие мощные аналитические методы, как теория специальных функций и метод Вентцеля – Крамерса – Бриллюэна [28–31]. Изоэнодромные решения нелинейной модели (5.1) исследовались в работах [29–31]. В данном случае спектральной плотности (5.2.33) соответствует радиально-симметричная структура типа «мишени» из кольцевых доменов (см. рис. 5.2). Для структуры типа «мишени» удастся вычислить эффективный радиус, найти формулы связи асимптотик поля дефекта вблизи его центра и на больших расстояниях от ядра дефекта [14, 15]. Эти результаты изложены в следующем пункте.

Рассмотрим два дефекта. Пусть первый будет таким же, как ранее. Второй задаст силы, распределенные вдоль отрезка $L_2 = \{x = x_2, |y - y_2| \leq l\}, x_2 > x_1$. В результате простого анализа получаем $T_{21}(\lambda) = 0$,

если $x > x_2 > x_1$, $\lambda < 0$ или $x < x_1$, $\lambda > 0$. В то же время при условиях $x > x_2$, $\lambda > 0$ и $x < x_1$, $\lambda < 0$ имеем

$$T_{21}(\lambda) = \frac{\text{sign } \lambda}{4} \sum_{n=1,2} f_n^{(\infty)}(i w_2) \exp[w_1 x_n - w_2 y_n]. \quad (5.2.34)$$

В области $x_1 < x < x_2$ находим

$$T_{21}(\lambda) = \begin{cases} \frac{1}{4} f_1^{(\infty)}(i w_2) \exp[w_1 x_1 - w_2 y_1], & \lambda > 0 \\ -\frac{1}{4} f_2^{(\infty)}(i w_2) \exp[w_1 x_2 - w_2 y_2], & \lambda < 0. \end{cases} \quad (5.2.35)$$

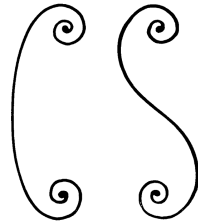
При наличии двух дефектов данные рассеяния не соответствуют изомонодромным решениям даже в случае точечных сил.

Любопытная ситуация реализуется, когда формирование дефектов определяется двумя причинами: раздвижкой берегов разреза и силовыми воздействиями, локализованными вдоль берегов. Как указывалось ранее, в результате численного интегрирования уравнения (5.1) показано [7], что полубесконечный 2π -кинк на однородном фоне закручивается в логарифмическую спираль вокруг силового центра, совпадающего с точкой обрыва 2π -кинка. Образование спирали – компромисс между двумя тенденциями: сохранением полубесконечной солитонной линии своей индивидуальности и формированием кольцевых 2π -солитонов вокруг силового центра. В рамках изложенной схемы можно дать аналитическое описание подобных дефектов. В качестве примера рассмотрим спиральный диполь – отрезок солитонной линии со спиральным закручиванием вблизи концов (рис. 5.7). Такой дефект соответствует решению линеаризованного уравнения (5.14) ($\tilde{u} = 0$) при наличии двух типов источников:

$$\begin{aligned} \partial_x q &= 2\pi m^{(\infty)} \partial_x \delta(x) [H(y+l) - H(y-l)], \\ f &= [f_+^{(\infty)} \delta(y-l) + f_-^{(\infty)} \delta(y+l)] \delta(x), \quad f_{\pm}^{(\infty)} = \text{const}. \end{aligned}$$

При переходе от линейной задачи (5.14) к нелинейной (5.1) источник $\partial_x q$ приводит к формированию солитонного отрезка, соединяющего точки $x = 0$, $y = \pm l$ (см. рис. 5.5, *a*). Второй источник f способствует образованию кольцевых 2π -солитонов вокруг тех же точек (см. рис. 5.2). Когда оба источника действуют совместно, проис-

Рис. 5.7. Спиральные диполи с разными направлениями закручивания 2π -солитонов вокруг силовых центров ($m^{(0)} = 1$)



ходит спиралеобразное закручивание отрезка солитонной линии вблизи его концов. Поскольку в окрестности сингулярных точек $x = 0, y = \pm l$ уравнение (5.1) упрощается ($\Delta u \approx 0$), нетрудно проверить, что сингулярные источники задают следующее асимптотическое поведение поля $u(x, y)$:

$$u \approx \mp m^{(0)} \operatorname{arctg} \frac{y \mp l}{x} + \frac{f_{\pm}^{(0)}}{2\pi} \ln \sqrt{(y \mp l)^2 + x^2} + \beta, \\ (x, y) \approx (0, \pm l), \beta = \text{const.} \tag{5.2.36}$$

Знаки параметров $f_{\pm}^{(0)}$ устанавливают направления закручивания солитонных линий вокруг силовых центров, число $m^{(0)} = 1, 2, \dots$, с одной стороны, определяет абсолютную величину топологических зарядов вихревых центров, а с другой – дает число рукавов спирали, которые возникают при удалении от сингулярных точек. Численный анализ показывает, что значения $|f_{\pm}^{(0)}|$ управляют числом оборотов солитонных линий вокруг каждого из силовых центров.

Приведем данные рассеяния для спирального диполя. При $x\lambda < 0$ спектральная функция $T_{21}(\lambda)$ равна нулю. Когда $x\lambda > 0$, имеем

$$T_{21}(\lambda) = \operatorname{sign}(x) \left[-\frac{\pi m^{(\infty)}}{w_2} w_1 \operatorname{sh}(w_2 l) + \frac{f_+^{(\infty)}}{4} \exp(-w_2 l) + \frac{f_-^{(\infty)}}{4} \exp(w_2 l) \right]. \tag{5.2.37}$$

Функцию $\Phi(x, y)$, описывающую асимптотику при $r \rightarrow \infty$ поля $u(x, y)$ спирального диполя, используя формулу (5.1.11), выразим через функцию Бесселя:

$$\partial_y \Phi(x, y) = \left(m^{(\infty)} \partial_x - \frac{f_+^{(\infty)}}{2\pi} \partial_y \right) K_0(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_+|) - \\ - \left(m^{(\infty)} \partial_x + \frac{f_-^{(\infty)}}{2\pi} \partial_y \right) K_0(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_-|),$$

где $\mathbf{r}_{\pm} = (0, \pm l)$. Связь параметров $f_{\pm}^{(0)}$, $m^{(0)}$ и $f_{\pm}^{(\infty)}$, $m^{(\infty)}$ обсуждается в следующем подразделе.

Другие комбинированные дефекты нетрудно описать по той же схеме.

5.2.3. Исследование структур типа «мишеней» и спиральных вихревых диполей

Пусть дефект обусловлен сингулярным силовым источником $f(x, y) = f^{(0)}\delta(\mathbf{r})$ ($f^{(0)} = \text{const}$) в правой части уравнения (5.13):

$$(\partial_x^2 + \partial_y^2)u = \sin u + f^{(0)}\delta(\mathbf{r}). \quad (5.2.38)$$

Тогда из соображений симметрии задачи следует, что решения модели (5.2.38) должны быть радиально-симметричными: $u(\mathbf{r}) = u(r)$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Вне особой точки описание радиально-симметричных конфигураций сводится к поиску сингулярных решений более простого уравнения:

$$\partial_r^2 u + \frac{1}{r} \partial_r u = \sin u. \quad (5.2.39)$$

Это хорошо известное уравнение Пенлеве третьего рода (РШ). Его общие решения были предметом обширных аналитических исследований методом изомодромных деформаций [29–31].

Для качественного анализа решений модель (5.2.39) удобно интерпретировать как уравнение нелинейного маятника со «временем» r и зависящей от времени «силой трения» $(1/r)\partial_r u$. Так же как для классического маятника

$$\partial_r^2 u = \sin u, \quad (5.2.40)$$

в фазовой плоскости $(u, \partial_r u)$ выделяются «седла» в точках $(2\pi m, 0)$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. «Центры» классического маятника (5.2.40) в точках $(u, \partial_r u) = (\pi + 2\pi m, 0)$ заменяются «устойчивыми фокусами», обусловленными учетом диссипации $(1/r)\partial_r u$. Периодичность решений относительно сдвига $u \rightarrow u + 2\pi$ сохраняется, однако меняется поведение сепаратрис.

Напомним, что периодические сепаратрисы кругового маятника (5.2.40) удовлетворяют уравнению $(\partial_r u)^2 = 2(1 - \cos u)$, решения ко-

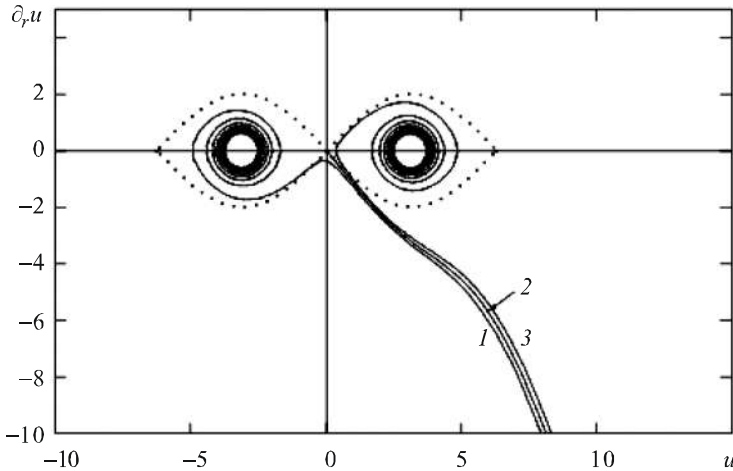


Рис. 5.8. Фазовые траектории для $\sigma = 4$; $\beta = 4.3$ (1); $\beta = \beta_c = 4.497602$ (2); $\beta = 17$ (3)
 Пунктирными линиями обозначены сепаратрисы классического маятника

того дают стандартные 2π -солитоны (доменные границы) уравнения sine-Gordon:

$$u(r) = \pm 4 \operatorname{arctg}[\exp(-r)] + 2\pi m. \quad (5.2.41)$$

Вместо таких кривых, представленных пунктирной линией на рис. 5.8, у модели (5.2.39) появляются фазовые траектории в форме уходящих на бесконечность «усов». На рис. 5.8 они изображены сплошными линиями. Сепаратрисные фазовые траектории уравнения (5.2.39), в соответствии с асимптотикой [29, 30]:

$$u(x, y) = \sigma \ln \frac{1}{r} + \beta + O(r^2), \quad \sigma = -f^{(0)}/2\pi, \quad r \rightarrow 0, \quad (5.2.42)$$

стартуют при $r \rightarrow 0$ из бесконечно удаленной точки фазовой плоскости и с ростом r приближаются либо к седловым точкам по экспоненциальному закону:

$$u(r) = 2\pi m + \mu \sqrt{\frac{\pi}{2r}} \exp(-r) (1 + O(r^{-1})), \quad r \rightarrow \infty, \quad (5.2.43)$$

либо к фокусам по осциллирующей зависимости:

$$u = +\pi + 2\pi m + \delta r^{-1/2} \cos\{r - (\delta^2/16)\ln(r) + \vartheta\} + o(1), \quad r \rightarrow \infty. \quad (5.2.44)$$

Поскольку решения уравнения РПП определены с точностью до сдвига на величину 2π , ограничимся обсуждением фазовых траекторий, заканчивающихся на отрезке $[-2\pi, 2\pi]$. Именно этот вариант изображен на рис. 5.8.

Вне окрестностей особых точек фазовые траектории не описываются простыми формулами. Поэтому поведение сепаратрисных решений исследовалось численно [14, 15]. Для интегрирования использовался метод пристрелки для стандартной схемы Рунге – Кутты четвертого порядка точности [32]. Особенность при $r = 0$ аппроксимировалась сдвигом начального условия в близкую точку $r = r_0 \ll 1$, а величины

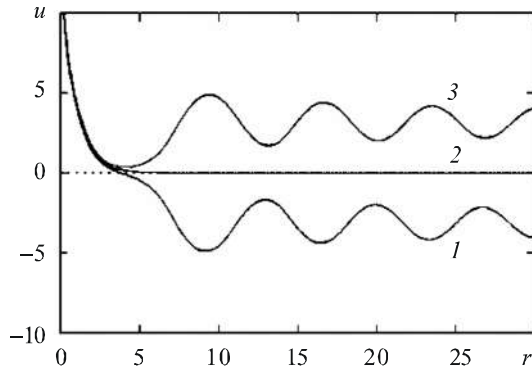
$$u(r_0) = \sigma \ln(1/r_0) + \beta, \quad \partial_r u(r_0) = -\sigma/r_0$$

применялись в качестве начальных условий при интегрировании уравнения на полуоси $r \geq r_0$.

Решения уравнения (5.2.39) в зависимости от параметра β показаны на рис. 5.9. В общем случае это пространственно неограниченные решения, имеющие на бесконечности осциллирующую асимптотику (5.2.43) (кривые 1, 3 на рис. 5.9). Решения этого типа подробно исследованы в работах [29, 30]. Существуют, однако, особые случаи, соответствующие выделенным значениям β , когда решения становятся пространственно локализованными: $u, \partial_r u \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$ (см. кривую 2 на рис. 5.9). Обнаружено, что для каждого значения σ существует единственное значение $\beta = \beta_*$, при котором решение оказывается пространственно локализованным с экспоненциальной асимптотикой (5.2.43).

Отметим, что решения с осциллирующей асимптотикой (5.2.44) неустойчивы в эволюционных моделях общего класса, для которых модель (5.2.39) описывает лишь стационарные состояния. В пределе $r \rightarrow \infty$ таким решениям отвечают однородные распределения параметра порядка $u = \pm\pi$, как известно, нестабильные в эволюционных обобщениях уравнения sine-Gordon (5.1). В численных расчетах решения с осциллирующей асимптотикой в результате развития модуляционной неустойчивости распадаются на пространственно локализованные нелинейные дефекты, чья внутренняя структура зависит от величины параметра σ .

Рис. 5.9. Решение уравнения РШ для $\sigma = 4$; $\beta = 4.3$ (1); $\beta = \beta_s = 4.497602$ (2); $\beta = 4.7$ (3)



Исследуем зависимость локализованных решений от параметра σ . С увеличением σ решения приобретают все более ярко выраженные осцилляции в областях конечных радиусов, за пределами которых поля $u(r)$ экспоненциально затухают (рис. 5.10).

Из рис. 5.11 видно, что с увеличением σ сепаратрисы становятся более пологими и стремятся к сепаратрисам «недиссипативного» уравнения (5.2.40). При больших значениях σ и вдали от ядра дефекта локализованное решение модели (5.2.39) хорошо аппроксимируются квазипериодической решеткой 2π -солитонов (5.2.41).

Для структур типа «мишеней» важны их эффективные размеры. Чтобы определить размер дефекта, напомним, что его поле $u(r)$ исчезает на бесконечности. Координату $r = R$ назовем радиусом «мишени», если

$$R = \sup \{ r | u(r) = \pi \}.$$

При больших значениях σ величину R можно интерпретировать как радиус самого удаленного кольцевого солитона в структуре типа «мишени», после которого поле $u(r)$ экспоненциально затухает (см. рис. 5.10 для $\sigma = 64$).

Зависимость R от σ показана на рис. 5.12. Для больших значений σ зависимость может быть аппроксимирована с достаточной точностью линейным соотношением

$$R(\sigma) \approx C\sigma - 2.90 \tag{5.2.45}$$

с численным значением коэффициента

$$C \approx 3.14/4. \tag{5.2.46}$$

Аналитическое исследование пространственно локализованных решений уравнения РШ (5.2.39) проведено в работах [14, 15], чьи результаты подтверждают справедливость упрощенной схемы опи-

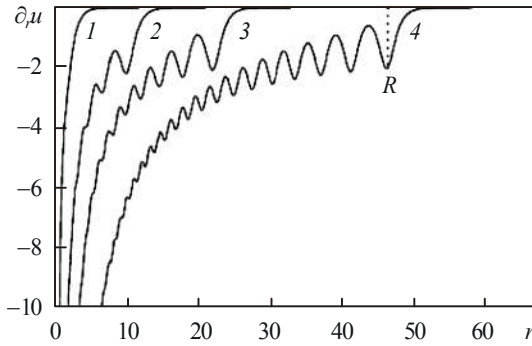


Рис. 5.10. Локализованные решения уравнения РПП при $\sigma = 4$ (1), $\sigma = 16$ (2), $\sigma = 32$ (3), $\sigma = 64$ (4).
 R – радиус «мишени»

Рис. 5.11. Фазовые траектории для локализованных решений уравнения РПП при $\sigma = 4$ (1), $\sigma = 16$ (2), $\sigma = 32$ (3), $\sigma = 64$ (4)

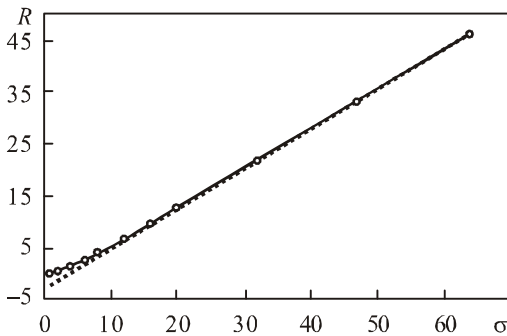
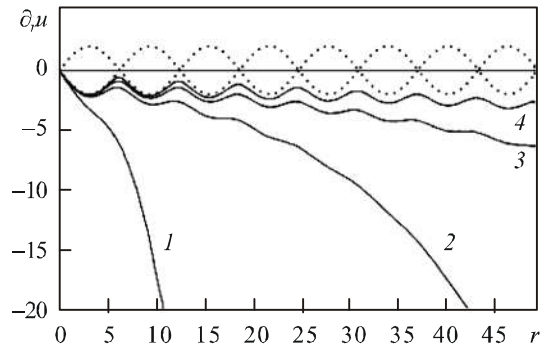


Рис. 5.12. Зависимость радиуса «мишени» от параметра σ . Пунктирной линией обозначена аппроксимация по формуле (5.2.45)

сания дефектов, которая изложена в п. 5.2.2, и дают формулу связи параметров $f^{(0)}$ и $f^{(\infty)}$ в уравнениях (5.13) и (5.1.5). Остановимся на этом подробнее.

При формулировке процедуры интегрирования уравнения (5.1) в п. 5.2.2 использовалась связь решений Йоста $\Psi_1(\lambda)$, $\Psi_2(\lambda)$ через матрицу перехода $T(\lambda)$ (5.2.7). Было установлено, что для дефекта типа «мишени» матрица перехода имеет вид

$$T(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & T_{12}(\lambda) \\ T_{21}(\lambda) & 1 \end{pmatrix}, \quad T_{12}(\lambda) = T_{21}(-\lambda),$$

$$T_{21}(\lambda) = \begin{cases} \frac{f^{(\infty)}}{4} \operatorname{sign} x, & \lambda x > 0 \\ 0, & \lambda x < 0. \end{cases} \quad (5.2.47)$$

Как видим, для такого дефекта функция $T(\lambda)$ оказывается кусочно-постоянной по спектральному параметру λ . Решения модели (5.1) с кусочно-постоянными матрицами перехода относят к классу изомодромных [28–31]. Для модели (5.1) ключевой момент, облегчающий вычисления, состоит в том, что условие независимости матрицы перехода от параметра λ эквивалентно свойству радиальной симметрии поля $u(x, y)$ (см. [30]): $u(x, y) = u(r)$. В работах [14, 15] показано, что локализованные радиально-симметричные решения уравнения (5.2.39) возможны только при специальном выборе (5.2.47) кусочно-постоянной матрицы перехода.

Физический смысл параметра $f^{(\infty)}$ в том, что он определяет асимптотику поля $\tilde{u}(x, y)$ линеаризованной задачи (5.14) в пределе $r \rightarrow \infty$, а значит, и асимптотику решения $u(x, y)$ исходного уравнения (5.1). Используя формулы (5.1.6), (5.1.11), находим

$$u \approx \tilde{u} = -\frac{f^{(\infty)}}{2\pi} K_0(r) \rightarrow -\frac{f^{(\infty)}}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi}{2r}} \exp(-r) \left(1 + O\left(\frac{1}{r}\right) \right). \quad (5.2.48)$$

Параметр $f^{(0)}$ характеризует величину внешней точечной силы в уравнении (5.2.38). Наша ближайшая цель состоит в том, чтобы связать параметры $f^{(0)}$ и $f^{(\infty)}$.

Ввиду радиальной симметрии поля $u(x, y)$ в линейных уравнениях (5.2.3) прямой задачи рассеяния удобно перейти от переменных x, y к новым независимым переменным:

$$r, \quad \alpha = 4 i \lambda r^{-1} \exp i \varphi. \quad (5.2.49)$$

Здесь $\varphi = \arg(x + iy)$ – полярный угол, $-\pi/2 < \varphi < 3\pi/2$. Вычисления упрощаются, если вместо матричной функции Ψ использовать калибровочно-эквивалентную χ :

$$\Psi = \exp\left\{\frac{i\sigma_1}{4}u\right\}N^+\chi, \quad N^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.2.50)$$

При преобразованиях полезны соотношения $\sigma_3 = N^+\sigma_1N$, $\sigma_1 = -N^+\sigma_3N$. Функцию χ определяет система уравнений

$$\partial_r\chi = \frac{i}{2}\left[\sigma_3\partial_ru - \frac{\alpha r}{4}\sigma_1\right]\chi; \quad (5.2.51a)$$

$$\partial_\alpha\chi = \left[-\frac{ir^2}{16}\sigma_1 + \frac{i\sigma_3}{4\alpha}r\partial_ru - \frac{i}{\alpha^2}(\sigma_1\cos u - \sigma_2\sin u)\right]\chi. \quad (5.2.51б)$$

Условие совместности системы (5.2.51) сводится к радиальному уравнению sine-Gordon:

$$\partial_r^2u + \frac{1}{r}\partial_ru = \sin u.$$

Далее основное внимание переносится на уравнение (5.2.51б), поскольку при его интегрировании можно применить теорию специальных функций. Для последующего анализа необходимо знать асимптотическое поведение функций χ при $\alpha \rightarrow 0$ и $\alpha \rightarrow \infty$, а также их аналитические свойства. Эта информация легко извлекается из свойств функций Иоста $\Psi_1(\lambda)$ и $\Psi_2(\lambda)$ (5.2.4).

В терминах $\chi(\lambda)$ соотношения (5.2.12), (5.2.13) суть ($T_{11}(\lambda) = 1$):

$$\chi_+(\lambda) = \chi_-(\lambda)G; \quad \chi_+(\lambda) = -\sigma_3\chi_-(-\lambda)\sigma_1, \quad \text{Im}\lambda = 0. \quad (5.2.52)$$

Чтобы переписать эти формулы через переменную α , заметим, что функции $\chi_\pm(\alpha)$ корректно определены только на универсальной накрывающей α -плоскости, причем области их аналитичности зависят от знака x . Пусть для определенности $x > 0$, т. е. $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$. Учитывая связь переменных λ и α (5.2.49), свойства аналитичности в λ -плоскости функций $\Psi_\pm(\lambda)$, нетрудно показать, что функции $\chi_\pm(\alpha)$ и $\chi_\mp(\alpha)$ аналитически продолжаются, например, с положительной вещественной полуоси α -плоскости в области $\Omega_1 = \{\alpha: -\pi < \arg \alpha < \pi\}$ и $\Omega_2 = \{\alpha: 0 < \arg \alpha < 2\pi\}$ комплексной α -плоскости. Действие авто-

морфизма $\alpha \rightarrow -\alpha$ (второе из соотношений (5.2.52)) следует аккуратно определить на этой накрывающей [30]:

$$\chi_+(\alpha) = -\sigma_3 \chi_-(\exp(-\pi i)\alpha) \sigma_1, \quad 0 < \arg \alpha < \pi. \quad (5.2.53)$$

Первое из соотношений (5.2.52) можно рассматривать как связь в области $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \{\alpha: 0 < \arg \alpha < \pi\}$ продолженных таким способом функций $\chi_-(\alpha)$ и $\chi_+(\alpha)$. Когда последние продолжены с положительной вещественной полуоси α -плоскости, из выражений (5.2.52) с учетом (5.2.53) получаем

$$-\sigma_3 \chi_-(\exp(-\pi i)\alpha) \sigma_1 = \chi_-(\alpha) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -f^{(\infty)}/4 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.2.54)$$

Асимптотическое поведение функций Иоста $\Psi_{\pm}(\lambda)$ при $\lambda \rightarrow 0$ и $\lambda \rightarrow \infty$ нетрудно найти из системы (5.2.3):

$$\Psi_{\pm}(\lambda) = \exp\left(-\frac{i\sigma_1}{4}u\right) \left[1 + O(\lambda)\right] \exp\left\{\frac{\sigma_3}{4}r\lambda^{-1} \exp(-i\varphi)\right\}, \quad \lambda \rightarrow 0;$$

$$\Psi_{\pm}(\lambda) = \exp\left(\frac{i\sigma_1}{4}u\right) \left[1 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right] \exp\left\{\frac{\sigma_3}{4}r\lambda \exp i\varphi\right\}, \quad \lambda \rightarrow \infty. \quad (5.2.55)$$

Отсюда для функций $\chi_{\pm}(\alpha)$ находим:

$$\chi_{\pm} \rightarrow N \exp\left\{-\frac{ir^2\alpha}{16}\sigma_3\right\}, \quad \alpha \rightarrow \infty;$$

$$\chi_{\pm} \rightarrow N \exp\left(-\frac{i\sigma_1}{2}u\right) \exp\left(\frac{i}{\alpha}\sigma_3\right), \quad \alpha \rightarrow 0. \quad (5.2.56)$$

Используем полученную информацию для установления связи между параметрами $f^{(0)}$ (5.2.38) и $f^{(\infty)}$ (5.2.48). Поскольку уравнение (5.2.51б) имеет простую зависимость от переменной α , можно найти его приближенные решения, заданные асимптотическими условиями (5.2.56). Так, в пределе $\alpha \rightarrow \infty$, пренебрегая последним слагаемым в правой части (5.2.51б), получаем [29]:

$$\chi_-(\xi) = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{\pi}{8}r\partial_r u\right) \sqrt{\pi\xi} \begin{pmatrix} -iH_v^{(2)}(\xi) & -H_{-v}^{(1)}(\xi) \\ H_{v-1}^{(2)}(\xi) & iH_{1-v}^{(1)}(\xi) \end{pmatrix} \left(1 + O\left(\frac{r^2}{\xi}\right)\right),$$

$$\xi = \frac{r^2\alpha}{16}. \quad (5.2.57)$$

При $\alpha \rightarrow 0$, пренебрегая первым членом в правой части (5.2.51б), находим [29]:

$$\chi_{-}(\zeta) = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{\pi}{8} r \partial_r u\right) \sqrt{\pi \zeta} \exp \frac{i}{2} \sigma_3 u \times \\ \times \begin{pmatrix} iH_{1-\nu}^{(1)}(\zeta) & -H_{\nu-1}^{(2)}(\zeta) \\ H_{-\nu}^{(1)}(\zeta) & -iH_{\nu}^{(2)}(\zeta) \end{pmatrix} \left(1 + O\left(\frac{r^2}{\zeta}\right)\right), \quad \zeta = \frac{1}{\alpha}. \quad (5.2.58)$$

Здесь $H_{\nu}^{(s)}$ ($s=1, 2$) – функции Ганкеля, $\nu = \frac{1}{2} - \frac{i}{4} r \partial_r u$.

Важно, что вычисленные асимптотики являются двойными по переменным r и α [29, 30]. Существует область значений $r \ll 1$ и $\alpha \gg 1$, где справедлива формула (5.2.57). В то же время можно выделить значения $r \ll 1$ и $\alpha \ll 1$, при которых выполняется приближение (5.2.58). В обоих случаях при $r \ll 1$ поле $u(r)$ нам известно (см. 5.2.42)). Поэтому формулу связи параметров $f^{(0)}$ и $f^{(\infty)}$ легко получить из условия (5.2.54), если подставить в него одно из асимптотических разложений (5.2.57), (5.2.58). В работах [14, 15, 29] использован другой путь, позволивший не только связать постоянные $f^{(0)}$ и $f^{(\infty)}$, но и вычислить значение параметра β в распределении (5.2.42) поля $u(r)$ вблизи центра дефекта. Дело в том что переменные ξ и $\zeta \rightarrow 0$, а остаточные члены в выражениях (5.2.57) и (5.2.58) малы одновременно, когда $\alpha = r^{-2+\varepsilon}$, $\varepsilon \rightarrow +0$, $r \rightarrow 0$. Поэтому в левую часть соотношения (5.2.54) можно подставить, например, разложение (5.2.57), а в правую – (5.2.58). После чего, полагая $\alpha = r^{-2+\varepsilon}$ и переходя к пределу $\varepsilon \rightarrow +0$, $r \rightarrow 0$, находим

$$f^{(\infty)} = 8 \operatorname{sh} \frac{f^{(0)}}{8}, \quad \exp i\beta = 2^{-3if^{(0)}/2\pi} \Gamma^2\left(\frac{1}{2} - \frac{if^{(0)}}{8\pi}\right) \Gamma^{-2}\left(\frac{1}{2} + \frac{if^{(0)}}{8\pi}\right), \quad (5.2.59)$$

где $\Gamma(z)$ – гамма-функция.

Интересно, что при ограничении $f^{(0)} \ll 1$ имеем $f^{(\infty)} \approx f^{(0)}$ и асимптотика нелинейного решения при $r \rightarrow 0$ и $r \rightarrow \infty$ отвечает асимптотике функции Макдональда: $u \approx \tilde{u} \approx -\frac{f^{(\infty)}}{2\pi} K_0(r)$ (см. (5.2.48)). Тем самым рассмотренное решение $u(r)$ является нелинейным аналогом модифицированной функции Бесселя $K_0(r)$.

Полученные формулы (5.2.59) позволяют обосновать наблюдаемую в численных расчетах зависимость (5.2.45) радиуса дефекта от параметра $\sigma \equiv -f^{(0)}/(2\pi)$. Учтем первое соотношение (5.2.59) в асимптотической формуле (5.2.48). Тогда условие $u(R) = \text{const}$ приводит к уравнению:

$$\frac{4}{\pi} \text{sh} \left(\frac{\pi\sigma}{4} \right) \sqrt{\frac{\pi}{2R}} \exp(-R) = \text{const},$$

которое определяет границу $R[\sigma]$ области локализации колебаний поля $u(r)$. Отсюда при $R \gg 1$ получим

$$R(\sigma) = \frac{\pi}{4} \sigma - \frac{1}{2} \log \sigma + O(1), \quad \sigma \rightarrow \infty.$$

Это выражение хорошо согласуется с формулами (5.2.45), (5.2.46), поскольку $dR/d\sigma$ при больших σ слабо зависит от σ .

Согласно теореме Деррика, уравнение (5.1) не имеет гладких решений в пространстве R^2 , которые отвечали бы состояниям с конечной энергией (см. главу 2). Тем не менее, если допустить существование распределений параметра порядка с точечными особенностями типа (5.2.42), то оказывается, что глобальные решения модели (5.1) не только существуют, но и отвечают пространственно локализованным структурам с конечной энергией. В этом случае мы должны исключить из рассмотрения малые области с радиусами порядка постоянной решетки, окружающие центры дефектов. Для описания микроструктуры дефектов континуальное приближение не применимо.

Как уже отмечалось в п. 4.8, вблизи ядер дефектов и одновременно вблизи особых значений спектрального параметра вспомогательной системы (5.2.3) решения прямой и обратной задач рассеяния для двумерной модели sine-Gordon оказываются близкими к изомонодромным. Это обстоятельство можно эффективно использовать при конкретизации данных рассеяния для сингулярных дефектов. Поясним утверждение на примере установления формул связи между параметрами $f_{\pm}^{(0)}$, $m^{(0)}$ (5.2.36) и $f_{\pm}^{(\infty)}$, $m^{(\infty)}$ (5.2.37) спиральных вихревых диполей.

Спиральный вихревой диполь отчасти напоминает две структуры типа «мишени». Он содержит две локализованные области с сильным спиралевидным закручиванием $m^{(0)} = 1, 2, \dots$ солитонных линий вокруг «силовых центров» в точках с координатами $(x, y) = (0, \pm l)$. Вдали от силовых центров радиусы кривизны соединяющих их со-

литонных линий малы, так что в переходной области имеем $m^{(0)}$ слабоизогнутых 2π -солитонов (см. рис. 5.7, где $m^{(0)} = 1$). Для оценок примем, что каждая область с сильным закручиванием солитонных линий имеет тот же характерный размер R_s ($s = 1, 2$), что и структура типа «мишени», т. е. $R_s \sim f_s^{(0)}$, где параметр $f_s^{(0)}$ описывает s -й силовой центр (см. (5.2.36)). Пусть расстояние между силовыми центрами $2l \gg R_1 + R_2 \sim f_1^{(0)} + f_2^{(0)}$. Тогда их взаимным влиянием можно пренебречь и необходимые асимптотические разложения вблизи каждой из точек $(x, y) = (0, \pm l)$ получать независимо.

Для анализа поля $u(x, y)$ в окрестности вихревой точки $(x, y) = (0, l)$ введем локальные полярные координаты:

$$x + iy = il + r \exp(i\theta), \quad r = \sqrt{x^2 + (y-l)^2}, \quad \theta = \arctg \frac{y-l}{x}.$$

Дальнейший анализ почти дословно повторяет вычисления, приведенные для структуры типа «мишени». Различия связаны прежде всего с зависимостью поля дефекта от обеих полярных координат r, θ . Вспомогательная линейная система (5.2.3) не сводится к простым уравнениям (5.2.51), а дает эквивалентную исходной системе (5.2.3) новую систему уравнений в частных производных для расчета функций $\chi_{\pm}(r, \theta, \lambda) = N \exp(-i\sigma_1 u/4) \Psi_{\pm}(x, y, \lambda)$:

$$\begin{aligned} \partial_r \chi &= \frac{1}{4} \left\{ \sigma_3 (r^{-1} \partial_\theta + i \partial_r) u + (\alpha + \alpha^{-1} \cos u) \sigma_1 - \alpha^{-1} \sigma_2 \sin u \right\} \chi, \\ \alpha &= \lambda \exp(i\theta); \end{aligned} \quad (5.2.60a)$$

$$\partial_\theta \chi = \frac{ir}{4} \left\{ \sigma_3 (r^{-1} \partial_\theta + i \partial_r) u + (\alpha - \alpha^{-1} \cos u) \sigma_1 + \alpha^{-1} \sigma_2 \sin u \right\} \chi.$$

В окрестности особой точки $\lambda = \infty$ решение χ_- уравнений (5.2.60a) следует искать при условии

$$\chi_- \rightarrow N \exp \left\{ \frac{\sigma_3}{4} \lambda (il + r \exp i\theta) \right\}, \quad \lambda \rightarrow \infty, \quad (5.2.60b)$$

которое согласовано с выбором локальных координат и асимптотикой (5.2.55) функции Йоста. Как и ранее, при значениях $r \ll 1$ приближенное решение модели (3.1) вблизи особой точки $(x, y) = (0, l)$ нам известно (см. (5.2.36)):

$$u \approx -m^{(0)}\theta + \frac{f_+^{(0)}}{2\pi} \ln r + \beta, \quad \beta = \text{const.}$$

Отсюда следует, что вблизи вихревого центра существует область $r < |\lambda|^{-1} \ll 1$, в которой в главном приближении система (5.2.60а) для расчета функции χ_- сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению по переменной $\xi = i\lambda r e^{i\theta}/4$:

$$\partial_\xi \chi_- \approx \left(\frac{\tilde{Q}\sigma_3}{4\xi} - i\sigma_1 \right) \chi_-, \quad \tilde{Q} = -m^{(0)} + \frac{if^{(0)}}{2\pi}.$$

Требуемое решение выделяется условием

$$\chi_- \rightarrow N \exp\left(\frac{i\lambda}{4}\sigma_3 - i\xi\sigma_3\right), \quad \xi \rightarrow \infty.$$

Асимптотика функции $\chi_-(\xi)$ в окрестности точки $(x, y) = (0, l)$ с оценкой вклада следующих членов разложения имеет вид

$$\begin{aligned} \chi_- &= \tilde{\chi}_-(\xi) \exp\left(\frac{i\lambda}{4}\sigma_3\right), \\ \tilde{\chi}_-(\xi) &= \frac{\sqrt{\pi\xi}}{2} \exp\left(\frac{\pi i}{8}\tilde{Q}\right) \begin{pmatrix} -iH_v^{(2)}(\xi) & -H_{-v}^{(1)}(\xi) \\ H_{v-1}^{(2)}(\xi) & iH_{1-v}^{(1)}(\xi) \end{pmatrix} \left(1 + O\left(\frac{r^2}{\xi}\right)\right), \\ v &= \frac{1}{2} - \frac{\tilde{Q}}{4}. \end{aligned} \tag{5.2.61}$$

Важно, что асимптотика (5.2.61) оказалась двойной по переменным r, ξ .

Так же, как это сделано в п. 4.8 при анализе задачи о блоховской линии в доменной стенке или в данном пункте при описании дефекта типа «мишени», можно показать, что функции $\tilde{\chi}_-(\xi) \equiv \chi_-(\xi, \lambda) \times \exp(-i\lambda\sigma_3/4)$ и $\tilde{\chi}_+(\xi) \equiv \chi_+(\xi, \lambda) \exp(-i\lambda\sigma_3/4)$ аналитически продолжаются с положительной вещественной полуоси λ -плоскости в области $\Omega_1 = \{\xi: -\pi < \arg \xi < \pi\}$ и $\Omega_2 = \{\xi: 0 < \arg \xi < 2\pi\}$ комплексной ξ -плоскости. Второе из условий (5.2.52) определим на этой накрывающей соотношением

$$\tilde{\chi}_+(\xi) = -\sigma_3 \tilde{\chi}_-(\exp(-\pi i)\xi) \sigma_1, \quad 0 < \arg \xi < \pi.$$

Напомним, что диагональные элементы матрицы перехода для спирального вихревого диполя всегда равны единице. Что касается недиагональных элементов, то при выполнении неравенства $\lambda x > 0$

отличен от нуля лишь элемент $T_{21}(\lambda)$. Разложение коэффициента $T_{21}(\lambda)$ при значениях $\lambda \gg 1$ получим из формулы (5.2.37):

$$T_{21}(\lambda) \approx \frac{\pi}{2} \left(im^{(\infty)} + \frac{f_+^{(\infty)}}{2\pi} \right) \exp\left(\frac{i\lambda l}{2}\right) + \frac{\pi}{2} \left(-im^{(\infty)} + \frac{f_-^{(\infty)}}{2\pi} \right) \exp\left(-\frac{i\lambda l}{2}\right). \quad (5.2.62)$$

Вблизи вихревой точки $(x, y) = (0, l)$ второе слагаемое в выражении (5.2.62) следует опустить, поскольку при вещественных значениях λ в пределе $\lambda \rightarrow \infty$ оно приводит к малым быстроосциллирующим членам в первом равенстве (5.2.52). Осцилляции первого члена (5.2.62) в соотношении (5.2.52) компенсируются множителями $\exp(i\lambda\sigma_3/4)$ функций $\chi_{\pm}(\xi, \lambda) \equiv \tilde{\chi}_{\pm}(\xi) \exp(i\lambda\sigma_3/4)$ (см. (5.2.61)). Отсюда следует, что при положительных значениях координаты x , другими словами, при условии $-\pi/2 < \theta < \pi/2$, в области $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \{\xi: 0 < \arg \xi < \pi\}$ первое соотношение (5.2.52) можно рассматривать как связь аналитических по переменной ξ функций $\tilde{\chi}_{\pm}(\xi) \equiv \chi_{\pm}(\xi, \lambda) \exp(-i\lambda\sigma_3/4)$:

$$-\sigma_3 \tilde{\chi}_-(\exp(-\pi i)\xi) \sigma_1 = \tilde{\chi}_-(\xi) S, \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -(i\pi m^{(\infty)}/2 + f_+^{(\infty)}/4) & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.2.63)$$

Постоянная треугольная матрица S играет роль множителя Стокса [31].

Подставляя разложение (5.2.61) в соотношение (5.2.63), используя представления функций Ганкеля [26]:

$$H_{\nu}^{(1)}(\xi) = \frac{1}{i \sin \nu\pi} \left[J_{-\nu}(\xi) - J_{\nu}(\xi) e^{-i\nu\pi} \right],$$

$$H_{\nu}^{(2)}(\xi) = \frac{1}{i \sin \nu\pi} \left[J_{\nu}(\xi) e^{i\nu\pi} - J_{-\nu}(\xi) \right]$$

и трансформационные свойства функций Бесселя: $J_{\nu}(\xi e^{-i\pi}) = e^{-i\nu\pi} J_{\nu}(\xi)$, находим связь параметров $f_+^{(0)}$, $m^{(0)}$ и $f_+^{(\infty)}$, $m^{(\infty)}$:

$$\frac{\pi}{4} \left(m^{(\infty)} - i \frac{f_+^{(\infty)}}{2\pi} \right) = -\cos \nu\pi = \sin \left[\frac{\pi}{4} \left(m^{(0)} - \frac{if_+^{(0)}}{2\pi} \right) \right].$$

Аналогичное вычисление вблизи вихревой точки $(x, y) = (0, -l)$ дает вторую формулу связи:

$$\frac{\pi}{4} \left(m^{(\infty)} + i \frac{f_-^{(\infty)}}{2\pi} \right) = \sin \left[\frac{\pi}{4} \left(m^{(0)} + \frac{if_-^{(0)}}{2\pi} \right) \right].$$

В итоге данные рассеяния для спирального вихревого диполя установлены, а значит, поле такого существенно нелинейного дефекта может быть исследовано с той степенью полноты, какую допускают линейные уравнения обратной задачи рассеяния (5.2.14), (5.2.15).

Интересно, что в случае $f_{\mp}^{(0)} = f_{\mp}^{(\infty)} = 0$ формулы связи, полученные для спиральных вихревых диполей, совпадают с таковыми для «несолитонных» вихревых диполей. Если $m^{(0)} = m^{(\infty)} = 0$, то они согласуются с найденными для структур типа «мишеней». Сопоставление результатов этого пункта и главы 4 позволяет также предположить, что формулы связи для сингулярных нелинейных дефектов не зависят от наличия или отсутствия плавного по сравнению с полями дефектов фонового поля доменной стенки или полосовой доменной структуры.

Напомним, что изоэнодромные решения широко используются при описании всевозможных переходных волновых процессов [28, 30, 31, 33]. Рассмотренные задачи приводят к заключению, что изоэнодромные и автомодельные решения не менее важны при описании статических распределений параметра порядка в области ядер нелинейных топологических дефектов.

5.3. ДЕФЕКТЫ ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОЙ ДОМЕННОЙ СТРУКТУРЫ

Для будущего сложного сплетения следует удачно выбрать его узловые точки. После того, как эти узловые точки намечены, заполнить оставшиеся пустоты будет легче, чем построить кружево в целом.

Акад. Л.С. Понтрягин

В этом пункте с помощью ОЗР мы описываем дефекты на фоне несоизмеримых фаз магнетиков и двумерных кристаллов. В целях последовательности и ясности дальнейшего изложения напомним вначале некоторые результаты, полученные в главах 3 и 4.

Решения эллиптического уравнения sine-Gordon (5.1) с асимптотикой

$$u(x, y) \rightarrow u_0(x) = 4 \operatorname{Arctg} \frac{\operatorname{cn} \chi}{1 + \operatorname{sn} \chi}, \quad \chi = x/k, \quad r \rightarrow \infty, \quad (5.3.1)$$

отражающей наличие несоизмеримой фазы, находим с помощью соотношения

$$\sin \frac{u - u_0}{4} = \int_{-\infty}^y dy' \left[a(y, y') \cos \frac{u_0}{2} + b(y, y') \sin \frac{u_0}{2} \right] \exp \frac{\partial_x u_y}{2} (y - y'),$$

$$\partial_x u_0 < 0. \quad (5.3.2)$$

Функции a, b определяются линейными уравнениями типа Гельфанда – Левитана – Марченко:

$$\begin{aligned} 8a(y, z) - \sin \frac{u + u_0}{4} \Phi_{1,1}(y + z) + \cos \frac{u + u_0}{4} \Phi_{0,2}(y + z) + \\ + \int_{-\infty}^y dy' \left[a(y, y') \Phi_{1,1}(y' + z) + b(y, y') \Phi_{0,2}(y' + z) \right] = 0, \\ 8b(y, z) - \sin \frac{u + u_0}{4} \Phi_{2,0}(y + z) + \cos \frac{u + u_0}{4} \Phi_{1,1}(y + z) + \\ + \int_{-\infty}^y dy' \left[a(y, y') \Phi_{2,0}(y' + z) + b(y, y') \Phi_{1,1}(y' + z) \right] = 0 \end{aligned} \quad (5.3.3)$$

по известным ядрам $\Phi_{m,n}(y)$:

$$\Phi_{m,n}(y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left(-\frac{2d\alpha}{\alpha\tau} \right) \exp \left(-\frac{i\tau}{2} y \right) S_{21}(\alpha, \tau, x) w_1^m(\alpha) w_2^n(\alpha),$$

$$S_{21}(\alpha, \tau, x) =$$

$$= \left[\frac{i\tau + \partial_x u_0}{-i\tau + \partial_x u_0} \right]^{1/2} \exp \left\{ -\frac{i w_1 w_2 \tau}{2} \int_0^x dx' \left[w_1^2 - \cos^2 \frac{u_0}{2} \right]^{-1} \right\} S_{21}^0(\alpha, \tau),$$

$$w_1(\alpha) = \frac{\alpha + \alpha^{-1}}{2}, \quad w_2(\alpha) = \frac{1}{2i}(\alpha - \alpha^{-1}), \quad \tau = 2\sqrt{w_1^2 - k^{-2}}, \quad (5.3.4)$$

которые для несолитонных дефектов выражаются только через спектральную функцию $S_{21}^0(\alpha, \tau)$. Система (5.3.2) – (5.3.3) дает линейное алгебраическое уравнение для определения $\text{tg } u(x, y)/4$.

Асимптотику поля $u(x, y)$ при $r \rightarrow \infty$ характеризует функция

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left(-\frac{2d\alpha}{\alpha\tau} \right) S_{21}(\alpha, \tau, x) \left(\frac{i\tau}{2} - \frac{\partial_x u_0}{2} \right) \exp\left(-\frac{i\tau}{2} y \right). \quad (5.3.5)$$

Для дальнейшего анализа удобно переписать выражение (5.3.5) в λ -униформизации (3.1.10). С учетом формул (5.1.17), (3.1.19а) получаем

$$\begin{aligned} \Phi(x, y) = & \\ = \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma} d\lambda \frac{\theta_2(0)\theta_4(0)\theta_1((\lambda + \chi)/2K)}{\theta_3(0)\theta_4(\lambda/2K)\theta_4(\chi/2K)} \exp\left[-\chi Z(\lambda) + \frac{\text{dn}\lambda}{k} y \right] S_{21}^0(\lambda). \end{aligned} \quad (5.3.6)$$

Здесь интегрирование осуществляется по контуру γ , который в λ -плоскости представлен отрезками $\lambda = t \pm iK'$, $|t| \leq K$. Направление обхода γ изображено на рис. 5.13, а. Отметим, что в дальнейшем при сопоставлении формул интеграл по γ в соотношении (5.3.6) потребуется преобразовать в интеграл по контуру C_0 : $\lambda = t \pm iK'$, $-K \leq t \leq 0$ (рис. 5.13, б). Это нетрудно сделать посредством замены переменных с учетом свойств симметрии:

$$-Z(-\lambda) = Z(\lambda), \quad \text{dn}(-\lambda) = \text{dn}\lambda, \quad \theta_4(-\lambda) = \theta_4(\lambda), \quad -\theta_1(-\lambda) = \theta_1(\lambda).$$

Поскольку вычисления $S_{21}^0(\lambda)$ аналогичны изложенным, ограничимся обсуждением одного дефекта в решетке солитонных линий. Пусть он определяется скачком поля $u(x, y)$ на разрезе $L_1 = (x = x_1, |y| \leq l)$ и силами, распределенными вдоль отрезка L_1 . Согласно выражениям (5.1.1), (5.1.6), (5.1.18), функция $\Phi(x, y)$ может быть записана в виде

$$\begin{aligned} \Phi(x, y) = & \int_{C_0} d\lambda \exp\left\{ A(|\chi - \chi_1|, y, \lambda) \right\} \times \\ & \times \left[\Psi(\chi, \chi_1, \lambda) f_1^{(\infty)}(\text{idn}\lambda/k) - \varphi(\chi, \chi_1, \lambda) q_1^{(\infty)}(\text{idn}\lambda/k) \right]. \end{aligned} \quad (5.3.7)$$

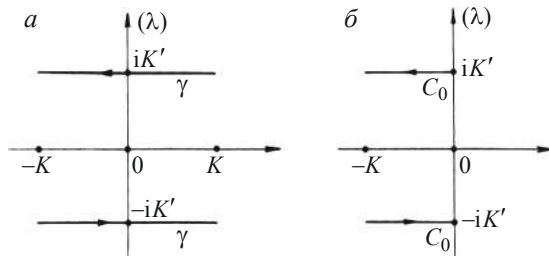


Рис. 5.13. Контуры γ и C_0 в λ -плоскости. Пояснения см. в тексте

Здесь $q_1^{(\infty)}(k)$ и $f_1^{(\infty)}(k)$ – форм-факторы дефекта (5.2.21), (5.2.31).

Сопоставление формул (5.3.6), (5.3.7)

приводит к следующим заключениям. Спектральная функция $S_{21}^0(\lambda)$ обращается в нуль на интервалах 1) $\lambda = t \pm iK'$, $-K \leq t \leq 0 \pmod{2K}$ при $x > x_1$; 2) $\lambda = t \pm iK'$, $0 \leq t \leq K \pmod{2K}$ при $x < x_1$. Вне этих лакун имеем

$$S_{21}^0(\lambda) = S_{21}^{0q}(\lambda) + S_{21}^{0f}(\lambda). \quad (5.3.8)$$

Здесь $S_{21}^{0q}(\lambda)$ – данные рассеяния для дефекта, обусловленного скачком поля $u(x, y)$ на L_1 в отсутствие распределенных сил:

$$S_{21}^{0q}(\lambda) = \frac{k}{4} q_1^{(\infty)} \left(\frac{idn\lambda}{k} \right) \frac{\theta_4(\lambda/2K)\theta_3(0)\theta_4(\chi_1/2K)}{\theta_2(0)\theta_4(0)\theta_1((\lambda + \chi_1)/2K)} \times \\ \times \left[sn\lambda \operatorname{cn}\lambda + \frac{sn\chi_1 \operatorname{cn}\chi_1 \operatorname{dn}\chi_1}{\operatorname{dn}\lambda} \right] \exp\{\chi_1 Z(\lambda)\} \operatorname{sign}(x - x_1). \quad (5.3.9)$$

Функция $S_{21}^{0f}(\lambda)$ представляет собой данные рассеяния для дефекта, связанного только с распределенными силами:

$$S_{21}^{0f}(\lambda) = \frac{1}{4dn\lambda} f_1^{(\infty)} \left(\frac{idn\lambda}{k} \right) \operatorname{sign}(x - x_1) \times \\ \times \frac{\theta_2(0)\theta_4(0)\theta_1((\lambda - \chi_1)/2K)}{\theta_4(\lambda/2K)\theta_3(0)\theta_4(\chi_1/2K)} \exp\chi_1 Z(\lambda). \quad (5.3.10)$$

Напомним, что, хотя для отдельного дефекта данные рассеяния удовлетворяют принципу суперпозиции (5.3.8), при наличии нескольких дефектов это неверно. В случае системы дефектов принцип суперпозиции выполняется только для поля $\Phi(x, y)$.

При $\chi_1 = x_1/k = 0, K \pmod{2K}$ дефект занимает симметричное по-

ложение в решетке солитонных линий (5.3.1) (проходит по оси 2π -кинка или по центру домена, ограниченного соседними 2π -кинками). Если ограничиться вихревыми (дислокационными) диполями, то выражение (5.3.9), (5.2.21) при $\chi_1 = 0$, K воспроизводит результаты, полученные в главе 4 путем решения нелинейных краевых задач для уравнения (5.1) с использованием подхода, аналогичного методу «изображений» в электростатике.

При значениях $\chi_1 \neq 0$, K метод «изображений» не пригоден. В квадратных скобках выражения (5.3.9) появляется новое слагаемое $\sim 1/\text{dn}\lambda$, сингулярное в точках $\lambda = -K \pm iK'$ контура C_0 . Проанализируем его влияние на асимптотику при $r \rightarrow \infty$ поля вихревого диполя ($q_1^{(\infty)}(k)$ определяется формулой (5.2.22), $f_1^{(\infty)}(k) = 0$). Далее для определенности будем говорить о диполе с топологическим зарядом $m_1^{(0)} = 1$ (см. (5.2.22)), который можно интерпретировать как вставленный в одномерную решетку солитонов (5.3.1) отрезок 2π -кинка, соединяющий точки $(x = x_1, y = \pm l)$. Такой отрезок имеет собственное экспоненциально малое при $r \rightarrow \infty$ поле. Однако основной эффект определяется его взаимодействием с солитонными линиями решетки. Когда полярность отрезка совпадает с таковой солитонных линий, они отталкиваются от него. При противоположной полярности отрезка солитоны решетки притягиваются к нему. Это определяет двумерную деформацию решетки солитонов (5.3.1). В соотношении (5.3.7) при $r \rightarrow \infty$ деформация решетки солитонов описывается вкладом от малых окрестностей конечных точек $\lambda = -K \pm iK'$ контура интегрирования C_0 .

Используя разложения (4.4.11) и тождество

$$\frac{\theta_1 \left[\frac{\lambda - \text{sign}(x - x_1) \chi}{2K} \right] \theta_4 \left(\frac{\chi_1}{2K} \right)}{\theta_1 \left[\frac{\lambda - \text{sign}(x - x_1) \chi_1}{2K} \right] \theta_4 \left(\frac{\chi}{2K} \right)} \Bigg|_{\lambda = \varepsilon - K \pm iK'} = \frac{\text{dn}\chi}{\text{dn}\chi_1} \exp \left[\pm \frac{i\pi}{2K} |\chi - \chi_1| \right] \times$$

$$\times \{ 1 - \text{sign}(x - x_1) [Z(\chi + K) - Z(\chi_1 + K)] \varepsilon \} + O(\varepsilon^2),$$

вычислим методом Лапласа главный член асимптотики интеграла (5.3.7) при $r \rightarrow \infty$. Как в главе 4, окончательный результат можно записать в форме

$$u(x, y) = u_0 \left(x + \alpha_1(x, y) + \alpha_2(x, y) \right), \quad r \rightarrow \infty; \quad (5.3.11)$$

$$\alpha_1(x, y) = B(x) \left[\operatorname{arctg} \frac{y_+}{x_0} - \operatorname{arctg} \frac{y_-}{x_0} \right]; \quad (5.3.12)$$

$$B(x) = \frac{m_1^{(\infty)} k}{2 \operatorname{dn} \chi_1} \left\{ 1 + \left(\frac{k}{k'} \right)^2 \operatorname{sn} \chi_1 \operatorname{cn} \chi_1 \operatorname{dn} \chi_1 [Z(\chi + K) - Z(\chi_1 + K)] \right\},$$

$$\alpha_2(x, y) = -\frac{1}{2k'} m_1^{(\infty)} k^2 \operatorname{sn} \chi_1 \operatorname{cn} \chi_1 \sqrt{K_2} \left\{ y_- \ln \frac{r_-}{R} - y_+ \ln \frac{r_+}{R} - \frac{2l}{\sqrt{K_2}} + \right.$$

$$\left. + x_0 \left[\operatorname{arctg} \frac{y_-}{x_0} - \operatorname{arctg} \frac{y_+}{x_0} \right] \right\}. \quad (5.3.13)$$

Здесь $x_0 = (x - x_1) / \sqrt{K_1}$; $y_{\pm} = (y \mp l) / \sqrt{K_2}$; $r_{\pm}^2 = x_0^2 + y_{\pm}^2$; K_1, K_2 – эффективные упругие модули решетки солитонов (4.5.6), (4.5.7); R – внешний параметр обрезания логарифмически расходящихся интегралов (размер кристалла).

При $\chi_1 = x_1/k \neq 0$, $K \pmod{2K}$ асимптотика (5.3.11) имеет две отличительные особенности. Во-первых, параметр B в выражении (5.3.12) для $\alpha_1(x, y)$ приобретает слабую зависимость от координаты x . Во-вторых, появляется новое поле $\alpha_2(x, y)$, характеризующее смещение солитонов решетки (5.3.1). Причина его возникновения заключается в следующем. При несимметричном положении солитонного отрезка в решетке солитонных линий, последние слева и справа от него испытывают неравноценные силовые воздействия. В результате на больших расстояниях от отрезка его влияние на решетку (5.3.1) оказывается эквивалентным действию сосредоточенных сил.

Чтобы нагляднее пояснить смысл полей $\alpha_1(x, y)$ и $\alpha_2(x, y)$, напомним, что на больших расстояниях от дефектов смещение солитонных линий решетки (5.3.1) определяется эффективным уравнением (4.5.5). Нетрудно убедиться, что функция $\alpha_2(x, y)$ является его решением при наличии следующего сингулярного силового источника:

$$f(x, y) = \delta(x - x_1) f_1 \int_{-l}^l \delta(y - y_1) dy_1.$$

Плотность сил f_1 постоянна вдоль отрезка L_1 и равна

$$f_1 = -\pi \sqrt{K_1 K_2} m_1^{(\infty)} k^2 (k')^{-1} \operatorname{sn} \chi_1 \operatorname{cn} \chi_1.$$

В пренебрежении зависимостью B от x функция $\alpha_1(x, y)$ представляет собой сингулярное решение уравнения (4.5.5) со скачком $2\pi B$ на разрезе L_1 .

При несимметричном положении вихревого диполя в решетке солитонных линий его эффективная энергия (4.5.8) оказывается выше, чем при $x_1/k = 0, K \pmod{2K}$.

В заключение рассмотрим спиральный диполь, который занимает симметричное положение в решетке солитонных линий: $\chi_1 = 0, K \pmod{2K}$. Форм-фактор $q_1^{(\infty)}(k)$ определяется соотношением (5.2.22):

$$f_1^{(\infty)}(k) = f_+^{(\infty)} \exp(ikl) + f_-^{(\infty)} \exp(-ikl), \quad (5.3.14)$$

где $f_{\pm}^{(\infty)}$ – постоянные параметры.

Приведем асимптотику при $r \rightarrow \infty$ поля $u(x, y)$ спирального диполя. Вычисления, аналогичные выполненным в главе 4, дают:

$$u = u_0 [x + \alpha(x, y) + \beta(x, y)] + \varphi_s(x, y), \quad r \rightarrow \infty; \quad (5.3.15)$$

$$\alpha(x, y) = \frac{m_1^{(\infty)} k}{2 \operatorname{dn} \chi_1} \left[\operatorname{arctg} \frac{y_+}{x_0} - \operatorname{arctg} \frac{y_-}{x_0} \right] (1 + O(r^{-1})); \quad (5.3.16)$$

$$\beta(x, y) = -\frac{k \operatorname{dn} \chi_1}{4\pi k'} \left[f_+^{(\infty)} \ln \frac{r_+}{R} + f_-^{(\infty)} \ln \frac{r_-}{R} \right]; \quad (5.3.17)$$

$$\begin{aligned} \varphi_s(x, y) = & i \exp \left\{ A(|\chi - \chi_1|, y_1, -\lambda_0) \right\} \sqrt{\frac{2\pi}{\partial_{\lambda}^2 A(\lambda)|_{\lambda=-\lambda_0}}} \times \\ & \times \left\{ \varphi(\chi, \chi_1, -\lambda_0) q_1^{(\infty)}(i \operatorname{dn} \lambda_0 / k) - \Psi(\chi, \chi_1, -\lambda_0) f_1^{(\infty)}(i \operatorname{dn} \lambda_0 / k) + \right. \\ & \left. + O(r^{-1}) \right\}. \end{aligned} \quad (5.3.18)$$

Здесь λ_0 – вещественный корень уравнения (4.4.7), лежащий в интервале $0 < \lambda_0 < K$.

Первый член в выражении (5.3.15) описывает двумерную деформацию одномерной решетки солитонов (5.3.1) в результате вставки в нее струнной конфигурации из 2π -солитонных отрезков со спиральным закручиванием вблизи концов ($x_1 = 0, y = \pm l$) или ($x_1 = Kk,$

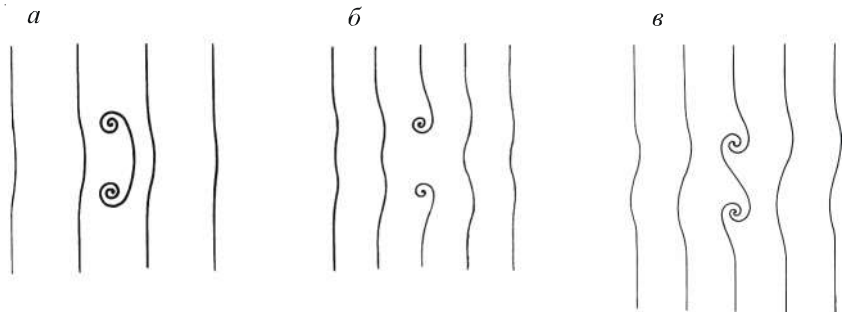


Рис. 5.14. Спиральные диполи в решетке солитонов:
 $a - m^{(0)} = 1, f_{\pm}^{(0)} < 0$; $б - m^{(0)} = -1, f_{\pm}^{(0)} < 0$; $в - m^{(0)} = -2, f_{+}^{(0)} < 0, f_{-}^{(0)} > 0$; сплошными линиями обозначены 2π -солитоны

$y = \pm l$) (рис. 5.14). Поскольку солитонные линии решетки огибают дефект, его внутренняя структура на больших расстояниях от центра дефекта в какой-то мере повторяется в искривлениях 2π -солитонов решетки. Согласно формулам (5.3.16), (5.3.17), деформация солитонных линий проявляет логарифмический характер спиралей диполя.

Второе слагаемое $\varphi_s(x, y)$ в соотношении (5.3.15) представляет собой экспоненциально малое при $r \rightarrow \infty$ собственное поле струнной конфигурации (5.3.18).

Резюмируем результаты. Главной задачей этой главы было исследование методом ОЗР двумерных нелинейных дефектов модели sine-Gordon, которые по топологическим свойствам аналогичны дефектам линейной теории упругости. Данные рассеяния для дефектов вычислены в предположении о «наследовании» характера сингулярностей при переходе от нелинейной модели sine-Gordon к ее линеаризации при $r \rightarrow \infty$. Такой подход не является математически последовательным. Однако он воспроизводит все известные решения для дефектов типа вихревых диполей и «мишеней» и указывает направления для дальнейшего развития теории.

В настоящее время построение эффективных алгоритмов решения нелинейных краевых задач даже для двумерных моделей, обладающих U - V -парой, остается открытой проблемой. Для эллиптического уравнения sine-Gordon (5.1) альтернативная попытка учета краевых условий Дирихле в четверти плоскости предпринималась в работе [34].

ТРЕХМЕРНЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЗБУЖДЕНИЯ И СТРУКТУРЫ В МАГНЕТИКАХ

6.1. ТРЕХМЕРНЫЕ СПИРАЛЬНЫЕ СТРУКТУРЫ В ИЗОТРОПНОМ ФЕРРОМАГНЕТИКЕ

Когда сама природа подсказывает математические формы большой красоты и простоты, ... о существовании которых никто еще не подозревал, то поневоле начинаешь верить, что они «истинны», т. е. что они выражают реальные черты природы. Возможно, что в этих формах отразилось и наше отношение к природе, что в них есть и элемент экономии мысли. Но, поскольку человек не своими силами вырабатывает эти формы, а их нам подсказывает сама природа, они тоже относятся к действительности, а не к нашим мыслям о действительности.

В. Гейзенберг. Часть и целое

В данном разделе представлена процедура интегрирования [1, 2] трехмерных уравнений ферромагнетика в обменном приближении:

$$\left[\mathbf{n} \times \left(\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2 \right) \mathbf{n} \right] = 0, \quad \mathbf{n}^2 = 1, \quad (6.1.1)$$

которая обобщает метод пункта 1.4 и редуцирует решение модели (6.1.1) к новой задаче дифференциальной геометрии. Ее анализ позволил найти широкий класс точных аналитических решений модели (6.1.1). На этой основе предсказаны новые типы трехмерных структур в ферромагнетике: спиральные и кноидальные «ежи».

Вблизи так называемых блоховских точек ферромагнетика направление намагниченности в пространстве меняется очень быстро. Главный вклад в энергию поля намагниченности дает обменная энергия, а энергией анизотропии можно пренебречь. В результате в непосредственной окрестности блоховской точки типичным распре-

делениям намагниченности отвечают сингулярные частные решения уравнения (6.1.1) следующего вида:

$$\mathbf{n} = \pm \mathbf{D} \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad \mathbf{r} = (x, y, z), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

где \mathbf{D} – произвольная постоянная ортогональная матрица ($D_{ik}D_{ij} = D_{ki}D_{ji}$, $0 = \delta_{kj}$, $\det \mathbf{D} = 1$), которые в топологии называют «ежами». Наличие \mathbf{D} связано с инвариантностью обменных взаимодействий, а с ними и решений модели (6.1.1), относительно вращений в спиновом пространстве: $\mathbf{n} \rightarrow \mathbf{D}\mathbf{n}$. В наиболее наглядном случае, когда \mathbf{D} – единичная матрица, распределение векторного поля «ежа» изображено на рис. 6.1.

Такие дефекты (точки Блоха) экспериментально обнаружены и подробно теоретически исследованы в нематических жидких кристаллах [3, 4] и ферромагнетиках [5], где они разделяют два участка линии Блоха с разной магнитной полярностью (направлением поворота намагниченности). В материалах с цилиндрическими магнитными доменами (ЦМД) точки Блоха образуются термической активацией или внешним магнитным полем на линии Блоха в областях, где приложенное поле компенсирует поле рассеяния. Зарождение «ежей» приводит к аннигиляции линий Блоха, необходимых для устойчивости ЦМД в больших полях смещений. Влияние точек Блоха наиболее существенно в областях порядка магнитной длины, где обменная энергия значительно превышает магнитостатическую и энергию анизотропии.

Отметим, что направление намагниченности в центре «ежа» не определено. Топологическая классификация «ежей» основана на отображении замкнутой поверхности σ , окружающей центр «ежа», на сферу $\mathbf{n}^2 = 1$ (пространство вырождения S^2). Не ограничивая общности, в качестве σ можно взять сферу. Точки на ней удобно параметризовать сферическими углами θ , φ . При сформулированных условиях степень отображения вычисляется по формуле [5, 6]:

$$N = \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi (\mathbf{n} \cdot [\partial_\theta \mathbf{n} \times \partial_\varphi \mathbf{n}]).$$

Нетрудно проверить, что для приведенного решения топологический заряд $N = \pm 1$. В общем случае число $|N|$ показывает, сколько раз векторное поле $\mathbf{n}(\mathbf{r})$ покрывает сферу $\mathbf{n}^2 = 1$, когда радиус-вектор \mathbf{r} один раз обегает поверхность σ . Можно рассматривать «ежи» более высокого порядка, удовлетворяющие условию $|N| \geq 2$ на окружающих их поверхностях.

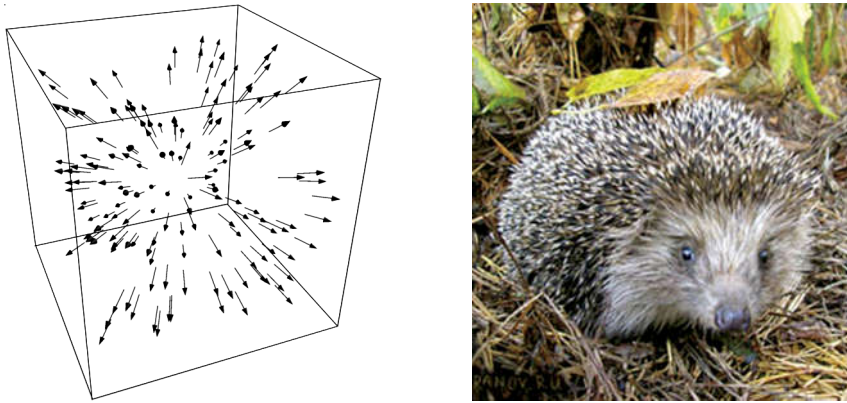


Рис. 6.1. Распределение вектора намагниченности в трехмерной структуре типа «ежа»

В параметризации намагниченности \mathbf{n} углами Θ , Φ :

$$\mathbf{n} = (\sin \Theta \cos \Phi, \sin \Theta \sin \Phi, \cos \Theta) \quad (6.1.2)$$

ферромагнетик описывается системой нелинейных дифференциальных уравнений

$$\Delta \Theta = \frac{1}{2} (\partial_k \Phi)^2 \sin 2\Theta, \quad \partial_k [(\partial_k \Phi) \sin^2 \Theta] = 0, \quad (6.1.3)$$

которые обобщают уравнения (1.4.5) главы 1. Здесь и далее $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$ – трехмерный оператор Лапласа; индексы, обозначенные буквами латинского алфавита, принимают значения 1, 2, 3.

Используя процедуру, предложенную в главе 1, положим поле Θ локально зависящим от вспомогательного поля $a(\mathbf{r})$: $\Theta = \Theta(a(\mathbf{r}))$. Тогда непосредственными вычислениями нетрудно проверить, что из соотношений

$$\frac{d^2 \Theta}{d^2 a} = \frac{1}{2} \sin 2\Theta; \quad (6.1.4)$$

$$\Delta a = 0, \quad \Delta \Phi = 0, \quad (\partial_k a)^2 = (\partial_k \Phi)^2, \quad \partial_k a \partial_k \Phi = 0 \quad (6.1.5)$$

следуют уравнения (6.1.3). Такая подстановка, как видно далее, приводит к широкому классу точных решений неинтегрируемой

модели (6.1.1). Векторные поля ∇a и $\nabla\Phi$ являются нормальными к поверхностям $a(\mathbf{r}) = \text{const}$ и $\Phi(\mathbf{r}) = \text{const}$, и с геометрической точки зрения решение уравнений (6.1.5) определяет две ортогональные гармонические координатные поверхности с равными длинами нормалей. Системы типа (6.1.5) обсуждались в работе [7] для введения сопряженных гармонических функций в трехмерном пространстве. Отметим, что уравнения (6.1.5) – прямое обобщение условий Коши – Римана на трехмерный случай, так как при $D = 2$ они эквивалентны условию аналитичности функции $a + i\Phi$ относительно переменной $x + iy$.

Перейдем к решению уравнений (6.1.5). Введем комплексные переменные $X = x + iy$, $Y = x - iy$ и запишем эту систему в виде двух уравнений для расчета комплексного поля $\Omega = a + i\Phi$:

$$4\partial_X\partial_Y\Omega + \partial_z^2\Omega = 0, \quad 4\partial_X\Omega\partial_Y\Omega + (\partial_z\Omega)^2 = 0. \quad (6.1.6)$$

С помощью второго уравнения (6.1.6) можно исключить производные по переменной z от Ω в первом. После чего получаем выражение

$$(\partial_Y\Omega)^2\partial_X^2\Omega + (\partial_X\Omega)^2\partial_Y^2\Omega - 2(\partial_X\partial_Y\Omega)(\partial_X\Omega)\partial_Y\Omega = 0, \quad (6.1.7)$$

содержащее только частные производные $\partial_X\Omega$, $\partial_Y\Omega$. Оно является пределом знаменитого уравнения минимальных поверхностей [8]:

$$\left[1 + (\partial_Y\Omega)^2\right]\partial_X^2\Omega + \left[1 + (\partial_X\Omega)^2\right]\partial_Y^2\Omega - 2(\partial_X\partial_Y\Omega)\partial_X\Omega\partial_Y\Omega = 0$$

при больших значениях частных производных.

Для решения уравнения (6.1.7) отметим, что оно инвариантно к преобразованиям $\Omega \rightarrow f(\Omega)$ с произвольной функцией f . Поэтому используем подстановку

$$\partial_Y\Omega = \Gamma\partial_X\Omega, \quad (6.1.8)$$

которая сводит формулу (6.1.7) к уравнению

$$\partial_Y\Gamma = \Gamma\partial_X\Gamma. \quad (6.1.9)$$

С помощью подстановки (6.1.8) из второго соотношения (6.1.6) находим

$$\partial_z\Omega = 2i\sqrt{\Gamma}\partial_X\Omega. \quad (6.1.10)$$

Формулы (6.1.8), (6.1.10) позволяют переписать первое уравнение (6.1.6) в терминах Γ :

$$\partial_z \Gamma = 2i\sqrt{\Gamma} \partial_x \Gamma. \quad (6.1.11)$$

Поля Ω и Γ удовлетворяют одним и тем же уравнениям, поэтому Ω является произвольной аналитической функцией от переменной Γ :

$$\Omega = F(\Gamma). \quad (6.1.12)$$

С учетом формулы (6.1.12), соотношения (6.1.9), (6.1.11) образуют замкнутую систему нелинейных уравнений первого порядка с разделенными переменными. Отсюда находим поле $\Gamma(X, Y, z)$ как неявное решение алгебраического уравнения:

$$G(\Gamma, X + Y\Gamma + 2i\sqrt{\Gamma}z) = 0 \quad (6.1.13)$$

с произвольной функцией G .

Напомним, что $\Omega \equiv a + i\Phi = F(\Gamma)$ и угол Θ зависят от a . Если $\Theta = \text{const}$, $\Phi = \text{const}$, то и $\Gamma = \text{const}$. Согласно уравнению (6.1.13), это означает, что прообразом фиксированной точки (Θ, Φ) на сфере $\mathbf{n}^2 = 1$ в пространстве (x, y, z) оказывается прямая линия. Пусть векторы \mathbf{n}_1 и \mathbf{n}_2 – некоторые фиксированные значения поля $\mathbf{n}(\mathbf{r})$. Их прообразы – прямые линии в пространстве (x, y, z) – не могут охватывать друг друга. Поэтому для найденных решений (6.1.12), (6.1.13) инвариант Хопфа (см. п. 6.3), определяемый как коэффициент зацепления прообразов двух точек, равен нулю.

Как и в гидродинамике несжимаемой жидкости, решения (6.1.13) в общем случае неоднозначны. Далее проанализируем только те из них, для которых поле $\Gamma(X, Y, z)$ определяется алгебраическим уравнением $X + Y\Gamma + 2iz\sqrt{\Gamma} = 0$. В этом случае Ω – аналитическая функция комплексной переменной ω :

$$\Omega = F(\omega), \quad \omega = \text{tg}(\theta/2) \exp(i\varphi) \quad (6.1.14)$$

или антианалитическая функция вида $\Omega = F(\omega^*)$. Здесь и далее переменные θ, φ, r параметризуют радиус-вектор \mathbf{r} в сферической системе координат:

$$\mathbf{r} = (x = r \sin \theta \cos \varphi, y = r \sin \theta \sin \varphi, z = r \cos \theta). \quad (6.1.15)$$

Во избежание недоразумений специально подчеркнем, что в спиновом и конфигурационном пространствах ферромагнетика выбраны близкие параметризации, которые в этом пункте обозначены сход-

ными заглавными и прописными буквами греческого алфавита (ср. (6.1.2) и (6.1.15)).

Выберем в качестве $\Theta(a(\mathbf{r}))$ решение уравнения (6.1.4) в виде решетки солитонов:

$$\cos \Theta = \operatorname{sn} \left[\frac{a}{k}, k \right], \quad 0 < k < 1. \quad (6.1.16)$$

При $k = 1$ выражение (6.1.16) упрощается: $\Theta = 2 \operatorname{arctg}[\exp a]$. Тогда комплексное поле $\Psi = \operatorname{tg}(\Theta/2) \exp i\Phi$ равно $\exp \Omega$ и удовлетворяет условию дуальности: $\partial_{\omega^*} \Psi = 0$. При $\Omega = \ln \omega^N$ такие решения описывают «ежи» с топологическим зарядом N , которые впервые получены в работе [9].

Рассмотрим значения $k \neq 1$ и выберем в качестве $\Omega \equiv a + i\Phi$ потенциал вихресточника: $\Omega = (\alpha + i\beta) \ln \omega$, где α, β – вещественные параметры. Это решение описывает нелинейный магнитный дефект в ферромагнетике с сингулярными значениями проекций намагниченности n_1, n_2 вдоль оси Oz . Требование однозначности поля $\mathbf{n}(\mathbf{r})$ приводит к заключению, что при обходе вокруг особой линии Oz изменения функций $\Phi(\mathbf{r})$ и $a(\mathbf{r})$ должны иметь вид

$$\delta\Phi = 2\pi Q, \quad \delta a = 4kKS,$$

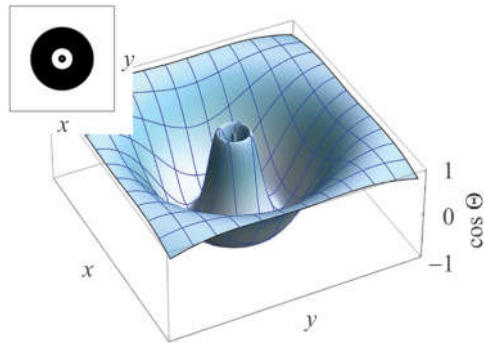
где Q, S – целые числа, $K = K(k)$ – полный эллиптический интеграл первого рода. Как в пункте 1.4, второе ограничение связано с периодом $4K$ эллиптической функции $\operatorname{sn}(u, k)$. В конечном счете простейший линейный дефект характеризуется целочисленными значениями S, Q , а выражения для проекции его намагниченности $n_3 = \cos \Theta$ и азимутального угла Φ имеют вид

$$\cos \Theta = \operatorname{sn} \left(\frac{Q}{k} \ln \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} - \frac{2\varphi}{\pi} SK \right), \quad \Phi = Q\varphi + \frac{2kKS}{\pi} \ln \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}. \quad (6.1.17)$$

Напомним, что модель (6.1.1) описывает также распределение вектора антиферромагнетизма $\mathbf{n}(\mathbf{r})$ в двухподрешеточном антиферромагнетике (в обменном приближении) [10, 11] и поле вектора директора в нематических жидких кристаллах (в одноконстантном приближении) [12, 13]. В указанных теориях неоднородные состояния с векторами $\mathbf{n}(\mathbf{r})$ и $-\mathbf{n}(\mathbf{r})$ физически неразличимы. Поэтому величины Q, S могут одновременно принимать полуцелые значения.

Рис. 6.2. Распределение $\cos \Theta$ в «кноидальном еже» в плоскости $z = 8$ ($k = 1/3$, $Q = 1$).

На вставке показаны домены с отрицательными (темные области) или положительными (светлые области) значениями $\cos \Theta$



Случаю $S = 0$ соответствует магнитная структура – «кноидальный еж», который состоит из бесконечной совокупности доменов. В шаровых слоях $\theta \in (\theta_p, \theta_{p+1/2})$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, где p – целые числа, а θ_m – корни уравнения

$$\operatorname{tg}(\theta_p/2) = \exp(4mkK/Q),$$

величина n_3 принимает положительные значения, отрицательные – в слоях $\theta \in (\theta_{p-1/2}, \theta_p)$, $\varphi \in [0, 2\pi]$. В экваториальной плоскости $z = 0$ распределение намагниченности совпадает с планарным вихрем. В плоскостях $z = h = \text{const}$ вблизи сингулярной нити, где $z \ll r = \sqrt{x^2 + y^2}$, распределение намагниченности отвечает системе кольцевых доменов – двумерной магнитной «мишени» с

$$n_3 = \cos \Theta \approx \operatorname{sn} \left[\frac{Q}{k} \ln \frac{r}{2h}, k \right]$$

и вихревым характером полей $n_{1,2}$. График для компоненты намагниченности n_3 представлен на рис. 6.2.

В предельном случае $k \rightarrow 1$, $\operatorname{sn} u \rightarrow \operatorname{th} u$ решение принимает простой вид

$$\Theta = 2 \operatorname{arctg} \left[\operatorname{tg}^Q (\theta/2) \right], \quad \Phi = Q\varphi.$$

Энергия E кноидального ежа расходится при $\theta \rightarrow 0$, и интеграл должен быть обрезан на значениях $\theta \sim a/L$, отвечающих атомным расстояниям a . С логарифмической точностью имеем

$$E = \frac{1}{2} \int d^3 \mathbf{r} (\partial_k \mathbf{n})^2 = \frac{1-k^2}{2k^2} \pi Q^2 L \ln \frac{L}{a},$$

где L – размер системы.

При $S \neq 0$ проекция n_3 принимает постоянное значение $\text{sn}C$ на геликоидальных поверхностях (рис. 6.3):

$$z = \pm R \operatorname{sh} \left[\frac{2\varphi}{\pi Q} kKS + \frac{kC}{Q} \right],$$

проходящих через начало координат, и на спиралях

$$r = \pm \frac{h}{\operatorname{sh} \left[\frac{2\varphi KkS}{\pi Q} + \frac{Ck}{Q} \right]}$$

в плоскости $z = h$. Значения $C = 2Kp$ (p – целые числа) в таких «спиральных ежах» разделяют области с противоположными направлениями намагниченности. Параметр S характеризует число заходов спирали, а направление ее закручивания определяется знаком произведения QS . Ширина доменов возрастает с увеличением k . Только вблизи сингулярной нити, где $z = h = \text{const} \ll r$, поле n_3 приближенно равно

$$n_3 \approx \operatorname{sn} \left[\frac{Q}{k} \ln \frac{r}{2h} - \frac{2\varphi}{\pi} SK, k \right]$$

и в плоскости $z = \text{const}$ представляет собой S -заходную логарифмическую спираль, качественно совпадающую со структурой спирального вихря в двумерном ферромагнетике. Вдали от сингулярной нити поле n_3 описывает гиперболическую спираль в плоскости $z = \text{const}$:

$$n_3 \approx \operatorname{sn} \left[-\frac{Qh}{kr} - \frac{2K\varphi S}{\pi}, k \right].$$

При конечных z распределения n_3 для одно- и двухзаходной спиралей представлены на рис. 6.4 и 6.5 соответственно.

В пределе $k \rightarrow 1$ ширина доменных границ стремится к нулю, спираль – к прямой линии и в плоскости $z = h$ «спиральный еж» приближается к двум доменам (с постоянными значениями намагниченности в них: $\Theta = 0$ и $\Theta = \pi$).

Структура (6.1.17) при $Q = 0$ имеет интересную особенность: распределение n_3 в ней зависит только от полярного угла φ , а Φ – от угла θ (рис. 6.6). Такая структура, названная трехмерной «лжеспиралью», встречается далее при обсуждении дипольных конфигураций.

Рис. 6.3. Геликоидальная поверхность постоянных значений n_z компоненты для «спирального ежа» при $k = 0.125$, $S = 1$, $Q = 1$

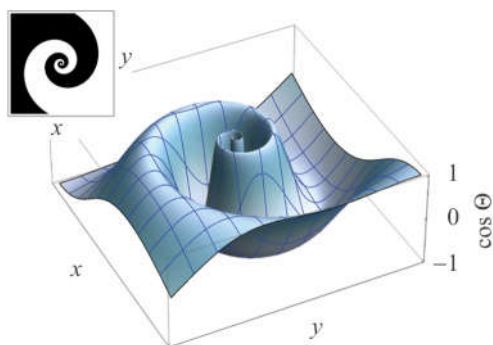
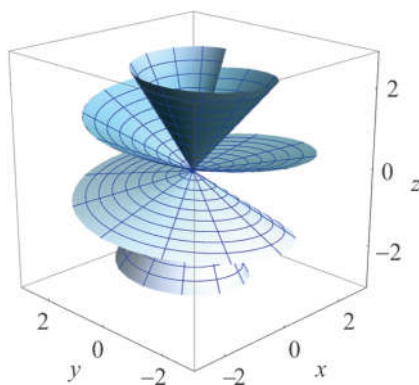
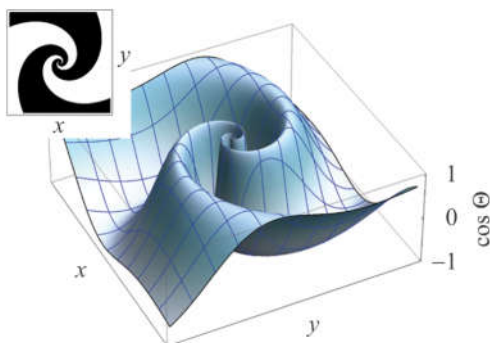


Рис. 6.4. Структура «спирального ежа» $k = 1/4$, $S = 1$, $Q = 1$ при $z = 5$

Рис. 6.5. Структура «спирального ежа» $k = 1/4$, $S = 2$, $Q = 1$ при $z = 5$



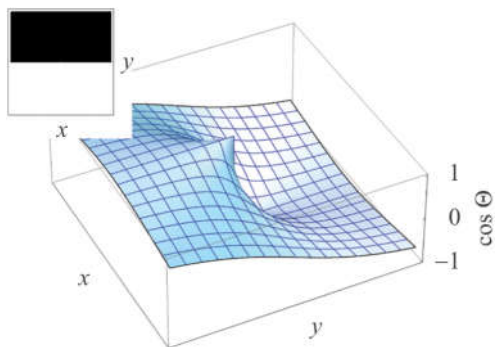


Рис. 6.6. Магнитная структура с $k = 1/4$, $S = 1$, $Q = 0$ при $z = 5$

Рис. 6.7. Диполь, состоящий из двух однозаходных «спиральных ежей» и образующий на больших расстояниях двухзаходную спираль.

$$\theta_2 = \pi/16, \varphi_2 = 0, z = 5, k = 1/4, S_1 = S_2 = 1, Q_1 = Q_2 = 1$$

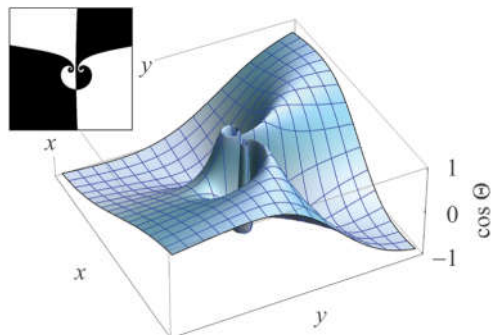
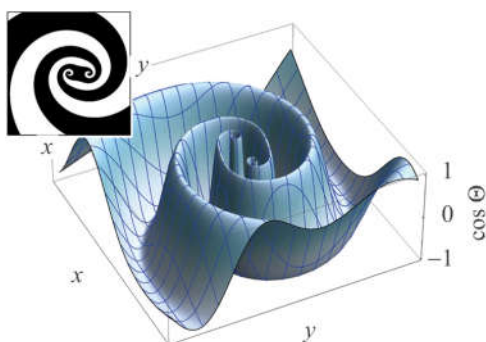


Рис. 6.8. Диполь, состоящий из двух однозаходных «спиральных ежей» и образующий на больших расстояниях «лжеспираль».

$$\theta_2 = \pi/16, \varphi_2 = 0, z = 5, k = 1/4, S_1 = S_2 = 1, Q_1 = -Q_2 = 1$$

Для системы взаимодействующих спиральных ежей функцию Ω выберем в виде

$$\Omega = \sum_{j=1}^n A_j \ln \left[\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \exp(i\varphi) - c_j \right].$$

Полагая постоянные $c_j = \operatorname{tg} \frac{\theta_j}{2} \exp(i\varphi_j)$ и определяя параметры A_j из условия однозначности поля $\mathbf{n}(\mathbf{r})$, получаем общее решение для системы взаимодействующих «спиральных ежей»:

$$\begin{aligned} \Omega &= a + i\Phi = \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\frac{2i}{\pi} kKS_j + Q_j \right) \ln \left(\tan \frac{\theta}{2} \exp(i\varphi) - \tan \frac{\theta_j}{2} \exp(i\varphi_j) \right) + w(\omega). \end{aligned} \quad (6.1.18)$$

Оно характеризуется произвольной мероморфной функцией $w(\omega)$, параметром k , целочисленными значениями S_j , Q_j , произвольными вещественными постоянными θ_j , φ_j и содержит набор сингулярных лучей, исходящих из начала координат, под углами θ_j , φ_j ($j = 1, \dots, n$).

Обсудим структуру решений (6.1.18) с $w \equiv 0$, $n = 2$ (диполи). Поскольку «спиральный еж» характеризуется двумя целыми числами (S , Q), то, как и в двумерном случае, структура диполей из них имеет более сложную структуру, чем для «ежей». Обсудим в качестве примера некоторые типы диполей, состоящих из «спиральных ежей» с числами (S_1 , Q_1) и (S_2 , Q_2). В плоскости $z = \text{const}$ на больших расстояниях от ядра дефекта каждый диполь трансформируются в конфигурацию с числами ($S_1 + S_2$, $Q_1 + Q_2$). Диполь, состоящий из двух «спиральных ежей» с числами (1, 1) образует на больших расстояниях двухзаходную спираль (рис. 6.7). Диполь с (1, 1) и (1, -1) на больших расстояниях образует конфигурацию (2, 0) трехмерной «лжеспирали» (рис. 6.8) и т. д.

6.2. ТРЕХМЕРНЫЕ АНТИФЕРРОМАГНИТНЫЕ ДЕФЕКТЫ И ТЕКСТУРЫ В МОДЕЛИ ГЛАВНОГО КИРАЛЬНОГО ПОЛЯ НА ГРУППЕ $SU(2)$

Именно потому, что современная дифференциальная геометрия разрабатывает и эксплуатирует тесную взаимосвязь между геометрическими и аналитическими понятиями и идеями, она становится все более важной в теоретической физике, упрощая и математический формализм и углубляя физическое понимание.

Б. Шутц. Геометрические методы математической физики

В традиционной феноменологической теории магнетизма сложные магнитные структуры рассматриваются как совокупность вставленных друг в друга магнитных подрешеток. Для анализа магнитных возбуждений и локализованных структур в длинноволновом приближении такой подход оказывается избыточным и малоэффективным. Когда в магнитной среде основную роль играют обменные взаимодействия, можно избежать использования большого числа магнитных подрешеток и найти более простые нелинейные уравнения для магнетиков в рамках метода феноменологических лагранжианов голдстоуновских мод [14–19]. Подробное обсуждение данного подхода и его результатов приведено в [11]. Для статических распределений намагниченности в многоподрешеточных антиферромагнетиках плотность энергии записывается в виде

$$U = \frac{1}{2} c_{ik, lm} \omega_{i,l} \omega_{k,m}, \quad (6.2.1)$$

где $\omega_{n,l} = -i \text{Sp}[(\partial_l G) G^+ \sigma_n]$. Зависящая от пространственных координат $x_k = (x, y, z)$ матрица G является элементом группы $SU(2)$, σ_n – матрицы Паули. Компоненты тензора феноменологических постоянных $c_{ik,lm}$ характеризуют взаимосвязь локальных поворотов намагниченности в элементах объема среды. Индексы, обозначенные буквами латинского алфавита, принимают значения 1, 2, 3. По дважды повторяющимся индексам производится суммирование.

К настоящему времени аналитическое описание трехмерных структур в магнитных средах с разными тензорами $c_{ik,lm}$ – неразрешимая задача. В этом разделе приведем результаты работы [20], в которой найдены и исследованы трехмерные текстуры и нелинейные дефекты в антиферромагнетиках в изотропном приближении, когда $c_{ik,lm} \propto \delta_{ik}\delta_{lm}$. В таком приближении выражение для U (6.2.1) упрощается и после масштабных преобразований принимает вид (см. [11]):

$$U = \frac{1}{2} \omega_{k,m} \omega_{k,m} = \text{Sp} \left[(\partial_m G) \partial_m G^+ \right]. \quad (6.2.2)$$

Соотношение (6.2.2) определяет плотность энергии стационарных состояний в модели главного кирального поля на группе $SU(2)$. Хотя рассматриваемое приближение буквально применимо только к недиссипативному спиновому стеклу [19], оно позволяет упростить задачу и дает качественное понимание нелинейных дефектов и текстур, возможных в реальных многоподрешеточных антиферромагнетиках. Отметим, что подобное приближение используется в континуальной теории нематиков (одноконстантное приближение) и теории упругости с аппроксимацией анизотропного кристалла изотропной средой. Киральная модель (6.2.2) может быть также полезна для описания локальных вращений элементов объема гранулированной среды [21]. Подставляя в формулу (6.2.2) разложение матрицы G по матрицам Паули σ_j и единичной матрице σ_0 :

$$G = i n_j \sigma_j + n_0 \sigma_0,$$

получаем стационарную модель вещественного n -поля: $n_\mu = (n_0, \mathbf{n})$, $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$, $\mu = 0, 1, 2, 3$, со связью $\mathbf{n}^2 + n_0^2 = 1$ ($n_\mu \in S^3$) и плотностью энергии

$$U = 2 \left[\partial_j \mathbf{n} \cdot \partial_j \mathbf{n} + \partial_j n_0 \partial_j n_0 \right]. \quad (6.2.3)$$

Модель n -поля обладает многочисленными приложениями в теории элементарных частиц и физике конденсированного состояния. Модель (6.2.3) является конформно-инвариантной и интегрируемой [22, 23] методом обратной задачи рассеяния в пространствах $(2, 0)$ и $(1, 1)$. В трехмерном случае выявление пространственных структур крайне затруднено из-за существенной нелинейности уравнений для полей $n_\mu = (n_0, \mathbf{n})$.

В данном разделе упрощенная модель (6.2.2) привлекается для описания трехмерных локализованных структур в многоподреше-

точных антиферромагнетиках. Доказательством того, что модель отвечает поставленной цели, могут служить только решения модели. Для их построения используются специальные подстановки, которые выявляют глубокую связь предлагаемой схемы интегрирования с задачами классической дифференциальной геометрии.

В п. 6.2.1 предложены три подстановки, которые редуцируют сложные уравнения модели (6.2.2) к системам уравнений в частных производных с простой геометрической интерпретацией. Первая из них эквивалентна уравнениям определяющим три ортогональные гармонические координатные поверхности. Для ее решения в п. 6.2.2 используем дифференциально-геометрический метод интегрирования, состоящий в следующем. Вначале совершаем преобразование годографа, т. е. меняем роль зависимых и независимых координат. В отличие от стандартного преобразования годографа мы не просто вводим производные от прежних координат по новым, а определяем через эти производные новые поля, связанные с компонентами метрического тензора, возникающего при осуществлении преобразования годографа. Поскольку первоначальные независимые координаты были евклидовы, тензор кривизны в терминах введенной метрики должен обращаться в нуль. В конечном счете получаем самосогласованную систему уравнений для расчета компонент метрического тензора. При этом соотношения, гарантирующие обращение в нуль тензора кривизны, оказываются главными, а система для расчета гармонических координатных поверхностей – их редукцией. Решения построенных уравнений позволяют записать в виде неявных функций решения исходной модели антиферромагнетика. Важно, что дифференциально-геометрический метод интегрирования модели, основанный на вложении нелинейного уравнения в частных производных в определенную дифференциальную связь в евклидовом пространстве, позволяет проанализировать множество разнообразных пространственных структур, изучение которых другими методами крайне затруднительно. Найденные решения описывают трехмерные конфигурации, содержащие, в частности, пространственные вихри, источники, нелокализованные текстуры и структуры со степенью отображения, равной единице, сходные с топологическими солитонами. Многие из полученных решений зависят от произвольных функций.

В п. 6.2.3 обсуждаются решения моделей (6.2.2), (6.2.3), связанные со второй и третьей подстановками. В результате обобщения изложенной схемы удастся теоретически описать трехмерные магнитные структуры, включающие антиферромагнитные «мишени»,

спиральные вихри, их дипольные конфигурации, нитевидные геликоидально-вихревые структуры.

6.2.1. Подстановки, приводящие к упрощению модели

Самая необходимая наука – это наука забывать ненужное.

Антисфен из Афин

В этом пункте мы предлагаем подстановки, которые приводят уравнения модели (6.2.2) к более простым уравнениям и новым задачам дифференциальной геометрии. Воспользуемся параметризацией Эйлера матрицы G :

$$G = \begin{pmatrix} \cos \frac{\Theta}{2} \exp \left[\frac{i}{2}(b+c) \right] & i \sin \frac{\Theta}{2} \exp \left[\frac{i}{2}(b-c) \right] \\ i \sin \frac{\Theta}{2} \exp \left[-\frac{i}{2}(b-c) \right] & \cos \frac{\Theta}{2} \exp \left[-\frac{i}{2}(b+c) \right] \end{pmatrix}. \quad (6.2.4)$$

Углы Эйлера Θ ($0 \leq \Theta \leq \pi$), b ($0 \leq b \leq 2\pi$), c ($0 \leq c \leq 2\pi$) описывают локальные повороты трех взаимно ортогональных антиферромагнитных векторов обменной структуры магнетика [11, 19]. В терминах углов Эйлера плотность энергии (6.2.2) переписывается в виде

$$U = \frac{1}{2} \left[(\partial_i b)^2 + (\partial_i c)^2 + (\partial_i \Theta)^2 + 2\partial_i b \partial_i c \cos \Theta \right].$$

Отсюда для расчета полей b , c , θ получаем уравнения

$$\begin{aligned} \Delta b + \cos \Theta \Delta c - \partial_i c \partial_i \Theta \sin \Theta &= 0, \\ \Delta c + \cos \Theta \Delta b - \partial_i b \partial_i \Theta \sin \Theta &= 0, \\ \Delta \Theta + \partial_i b \partial_i c \sin \Theta &= 0, \end{aligned} \quad (6.2.5)$$

где $\Delta = \partial_i^2$ – трехмерный оператор Лапласа.

Широкие классы решений системы (6.2.5) могут быть получены посредством следующих подстановок.

1. Уравнения (6.2.5) выполняются, если поля Θ , b , c удовлетворяют простой и компактной системе уравнений:

$$\Delta b = \Delta c = \Delta \Theta = 0; \quad (6.2.6)$$

$$\partial_i c \partial_i \Theta = \partial_i b \partial_i \Theta = \partial_i b \partial_i c = 0, \quad (6.2.7)$$

инвариантной к перестановкам Θ , b , c и координат x , y , z . Векторные поля ∇c , ∇b и $\nabla \Theta$ являются нормальными к поверхностям $b = \text{const}$, $c = \text{const}$ и $\Theta = \text{const}$, пересекающимся друг с другом под прямым углом. Поэтому с геометрической точки зрения решение системы (6.2.6), (6.2.7) определяет три ортогональные гармонические координатные поверхности. Начиная с фундаментальной монографии [24] триортогональная система координат обсуждалась во многих книгах по дифференциальной геометрии. Проблема построения всех триортогональных систем координат имеет длительную историю и была решена В.Е. Захаровым [25] в рамках метода обратной задачи рассеяния.

2. Для второй подстановки положим поле Θ локально зависящим от вспомогательного поля $a(\mathbf{r})$: $\Theta = \Theta(a)$. Тогда непосредственными вычислениями нетрудно убедиться, что из уравнений для полей $\Theta(a)$, a , b , c :

$$\partial_a^2 \Theta + \sin \Theta(a) = 0; \quad (6.2.8)$$

$$\Delta b = \Delta a = \Delta c = 0; \quad (6.2.9)$$

$$\partial_i c \partial_i a = 0, \quad \partial_i b \partial_i a = 0, \quad (\partial_i a)^2 = \partial_i b \partial_i c. \quad (6.2.10)$$

следуют соотношения (6.2.5).

3. Наконец, мы используем обобщение подстановки, предложенной в работах [26, 27] для модели \mathbf{n} -поля ($\mathbf{n} \in S^2$) (см. п. 6.1). В рассматриваемой задаче уравнения, которые следуют из (6.2.3), имеют вид

$$\Delta n_\mu - (n_\nu \Delta n_\nu) n_\mu = 0, \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3. \quad (6.2.11)$$

Пусть поля n_μ локально зависят от вспомогательных полей $\alpha(\mathbf{r})$, $\beta(\mathbf{r})$: $n_\mu = n_\mu(\alpha, \beta)$. Нетрудно убедиться, что поле $n_\mu(\alpha, \beta)$ будет удовлетворять уравнениям n -поля в двумерном пространстве с координатами (α, β) :

$$\partial_\alpha^2 n_\mu + \partial_\beta^2 n_\mu - n_\nu \left(\partial_\alpha^2 n_\nu + \partial_\beta^2 n_\nu \right) n_\mu = 0, \quad (6.2.12)$$

если поля α , β удовлетворяют уравнениям

$$\Delta\beta = \Delta\alpha = 0; \quad (6.2.13)$$

$$\partial_i\beta\partial_i\alpha = 0, \quad (\partial_i\alpha)^2 = (\partial_i\beta)^2. \quad (6.2.14)$$

которые решены в п. 6.1.

Таким образом, предложенные подстановки приводят к задачам дифференциальной геометрии, которые предполагают введение специальных координатных систем с условиями (6.2.6), (6.2.7); (6.2.9), (6.2.10); (6.2.13), (6.2.14). Хотя общие решения уравнений (6.2.6), (6.2.8), (6.2.13) нетрудно получить, учет связей (6.2.7), (6.2.10), (6.2.14) после этого встречает непреодолимые трудности. Их можно избежать, если использовать дифференциально-геометрический метод интегрирования [26, 27], редуцирующий исходные задачи к выражениям от меньшего числа независимых переменных.

6.2.2. Пространственные структуры, связанные с триортогональной системой координат. Дифференциально-геометрический метод интегрирования

Из дома реальности легко забрести в лес математики, но лишь немногие способны вернуться обратно.

Х. Штейнхаус

Уместно напомнить прямой способ¹ получения некоторых решений системы (6.2.6), (6.2.7) с помощью популярных 11 ортогональных систем координат, которые приведены в работе [28]. Пусть $u_i = u_i(x, y, z)$ ($i = 1, 2, 3$) криволинейная ортогональная система координат. Тогда система координат, полученная локальными заменами $u_i \rightarrow W_i(u_i(x, y, z))$ ($i = 1, 2, 3$), также будет ортогональной. Для семи ортогональных систем координат можно найти гармонические функции W_i ($i = 1, 2, 3$) следующим образом. В этих сис-

¹ Авторы благодарны В.В. Дякину за указание на такую возможность.

темах оператор Лапласа для произвольной функции $W(u_1, u_2, u_3)$ имеет вид

$$\Delta W = \sum_{i=1}^3 g_i(u_1, u_2, u_3) \frac{\partial}{\partial u_i} \left[f_i(u_i) \frac{\partial W}{\partial u_i} \right]$$

с известной формой записи функций $g_i(u_1, u_2, u_3), f_i(u_i)$ ($i = 1, 2, 3$). Поэтому поля $w_i(x, y, z) = W_i(u_i)$ ($i = 1, 2, 3$), которые удовлетворяют уравнениям

$$f_i(u_i) \frac{\partial W_i(u_i(x, y, z))}{\partial u_i} = C_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

с постоянными значениями C_i являются гармоническими и ортогональными.

Для общего решения уравнений (6.2.6), (6.2.7) привлечем методы классической дифференциальной геометрии. С этой целью вначале используем преобразование годографа. Обозначим $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$, и $y^1 = \Theta, y^2 = b, y^3 = c$. Поменяем роль зависимых и независимых переменных и будем искать $x_i = x_i(y^1, y^2, y^3)$ ($i = 1, 2, 3$) как функции y^1, y^2, y^3 . На геометрическом языке такая зависимость означает введение криволинейной системы координат с элементом длины

$$ds^2 = dx_i dx_i = g_{ik} dy^i dy^k$$

в евклидовом пространстве с координатами x_1, x_2, x_3 . Заметим, что при переходе к криволинейной системе координат следует различать верхние (контравариантные) и нижние (ковариантные) индексы у координат векторов и элементов тензоров. Переменные x_1, x_2, x_3 являются координатами радиуса-вектора точки наблюдения в декартовой системе координат: $\mathbf{r} = x_k \mathbf{i}_k$, где \mathbf{i}_k – базисные орты декартовой системы. Только в ней положения верхних и нижних индексов равноценны: $x^i \equiv x_i, \mathbf{i}_k = \mathbf{i}^k$ ($i, k = 1, 2, 3$). Поэтому в дальнейшем анализе будем следить только за положениями индексов у векторов и тензоров, записанных в криволинейной системе координат. Поднимание и опускание индексов в последней осуществляется с помощью метрического тензора g_{ik} и обратного ему g^{ik} :

$$g_{ik} = \frac{\partial x_p}{\partial y^i} \frac{\partial x_p}{\partial y^k}, \quad g^{ik} = \frac{\partial y^i}{\partial x_p} \frac{\partial y^k}{\partial x_p}. \quad (6.2.15)$$

Приведем для удобства и полноты изложения сведения из дифференциальной геометрии, необходимые для дальнейшего анализа.

При введении криволинейной системы координат в евклидовом пространстве в каждой его точке с радиусом-вектором $\mathbf{r} = x_k \mathbf{i}_k$ задается локальный базис $\mathbf{e}_n = \partial \mathbf{r} / \partial y^n \equiv \mathbf{i}_p \partial x_p / \partial y^n$ ($n = 1, 2, 3$), пространственное изменение которого в векторной форме записи

$$\frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial y^j} = \Gamma_{ij}^k \mathbf{e}_k \quad (6.2.16)$$

и координатном виде

$$\frac{\partial^2 x_n}{\partial y^i \partial y^j} = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial x_n}{\partial y^k} \quad (6.2.17)$$

определяется символами Кристоффеля

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kn} \left(\frac{\partial g_{in}}{\partial y^j} + \frac{\partial g_{jn}}{\partial y^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial y^n} \right). \quad (6.2.18)$$

Условие интегрируемости системы (6.2.16) (условие евклидовости пространства) приводит к обращению в нуль тензора Римана R_{prsi} :

$$R_{prsi} \equiv \frac{\partial \Gamma_{p,ri}}{\partial y^s} - \frac{\partial \Gamma_{p,rs}}{\partial y^i} + \Gamma_{rs}^m \Gamma_{m,pi} - \Gamma_{ri}^m \Gamma_{m,ps} = 0, \quad (6.2.19)$$

где $\Gamma_{m,ps} = g_{mn} \Gamma_{ps}^n$.

Наконец, отметим важное соотношение

$$\frac{\partial^2 y^p}{\partial x_i \partial x_j} = -\Gamma_{ks}^p \frac{\partial y^k}{\partial x_i} \frac{\partial y^s}{\partial x_j}, \quad (6.2.20)$$

которое нетрудно вывести дифференцированием по переменной y^j тождества

$$\frac{\partial x_p}{\partial y^i} \frac{\partial y^i}{\partial x_n} = \delta_{pn}$$

с последующим использованием формулы (6.2.17).

Применим сейчас методы классической геометрии для решения уравнений (6.2.6), (6.2.7). Из (6.2.7) следует, что дважды контравариантный метрический тензор g^{ik} , зависящий от y^1, y^2, y^3 имеет диагональный вид ($g^{12} = g^{13} = g^{23} = 0$):

$$\|g^{ik}\| = \text{diag}(1/H_1^2, 1/H_2^2, 1/H_3^2), \quad (6.2.21)$$

где H_i^2 – диагональные компоненты метрического тензора g_{ik} . Далее в отличие от стандартного преобразования годографа будем рассматривать H_i как *новые независимые поля*. Запишем для них соответствующие уравнения. Условие (6.2.19) дает шесть уравнений Ляме для определения функций H_i . Чтобы записать их кратко, введем символы Дарбу:

$$\beta_{ij} = \frac{1}{H_i} \frac{\partial H_j}{\partial y^i}, \quad i \neq j.$$

Тогда уравнения Ляме примут вид

$$\frac{\partial \beta_{ij}}{\partial y^i} + \frac{\partial \beta_{ij}}{\partial y^j} + \beta_{ik} \beta_{jk} = 0; \quad \frac{\partial \beta_{ij}}{\partial y^k} + \beta_{ik} \beta_{kj} = 0, \quad (6.2.22)$$

где индексы i, j, k различны и равны одному из чисел 1, 2, 3. Эти выражения учитывают условие ортогональности (6.2.7) и евклидовость координат x, y, z , от которых первоначально зависели поля Θ, b, c . Требование гармоничности полей Θ, b, c является дополнительным ограничением на решения уравнений Ляме. Из формулы (6.2.20) сразу следует, что условия (6.2.6) записываются как нелинейные уравнения первого порядка:

$$g^{jk} \Gamma_{i,jk} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (6.2.23)$$

для полей H_i , где Γ_{ijk} – символы Кристоффеля в метрике (6.2.21). Таким образом, решение уравнений (6.2.6), (6.2.7) сведено к геометрической задаче: определению в евклидовом пространстве криволинейной системы координат с метрикой (6.2.21) и дополнительными условиями: т. е. решению уравнений (6.2.22) для компонент H_1, H_2, H_3 метрического тензора с редукциями (6.2.23). По известному метрическому тензору зависимость $x_i = x_i(y^1, y^2, y^3)$ и, следовательно, зависимость полей Θ, b, c от x, y, z находится интегрированием переопределенной, но линейной, системы (6.2.17).

Из системы (6.2.23) следует, что комбинация $H_1 H_2 H_3 / H_i^2$ не зависит от переменной y^i ($i = 1, 2, 3$). Такое ограничение является частным случаем условий Робертсона [29] для систем криволинейных координат, допускающих разделение переменных в трехмерном уравнении Лапласа. В итоге диагональные компоненты метрического тензора факторизуются функциями F_i уже от двух переменных:

$$H_1 = \left[F_2(y^1, y^3) F_3(y^1, y^2) \right]^{-1/2},$$

$$\begin{aligned}
 H_2 &= \left[F_1(y^2, y^3) F_3(y^1, y^2) \right]^{-1/2}, \\
 H_3 &= \left[F_1(y^2, y^3) F_2(y^1, y^3) \right]^{-1/2}.
 \end{aligned}
 \tag{6.2.24}$$

Подставляя соотношения (6.2.24) в уравнения Ляме (6.2.22), получаем шесть уравнений для расчета полей F_i . Первые три из них имеют вид

$$-F_1 F_{2,1} F_{3,2} + F_{1,2} (F_3 F_{2,1} - F_2 F_{3,1}) = 0, \tag{6.2.25}$$

(и циклическая перестановка индексов 1, 2, 3). Вторая группа уравнений содержит частные производные второго порядка:

$$\begin{aligned}
 &-2(F_3 F_{1,2}^2 + F_2 F_{1,3}^2) + \\
 &+ F_1 (2F_3 F_{1,22} + 2F_2 F_{1,33} + F_{1,3} F_{2,33} - F_{2,1} F_{3,1} + F_{1,2} F_{3,2}) = 0,
 \end{aligned}
 \tag{6.2.26}$$

(и циклическая перестановка индексов 1, 2, 3). Здесь введены сокращенные обозначения $F_{1,1} = \partial F_1 / \partial y^1$ и т. д. Обсудим кратко решение уравнений (6.2.25), (6.2.26). Из формулы (6.2.25) следует:

$$F_{3,1} = \frac{F_3 F_{1,3} F_{2,1}}{F_2 F_{1,3} - F_1 F_{2,3}}, \quad F_{3,2} = -\frac{F_3 F_{1,2} F_{2,3}}{F_2 F_{1,3} - F_1 F_{2,3}} \tag{6.2.27}$$

и необходимо рассмотреть вначале варианты, при которых в этом выражении или числитель, или знаменатель, либо оба одновременно обращаются в нуль. В альтернативном случае условие совместности системы (6.2.27):

$$\frac{F_1 F_{1,23}}{F_{1,3} F_{1,2}} = \frac{F_2 F_{2,23}}{F_{2,3} F_{2,1}} \tag{6.2.28}$$

приводит к простым уравнениям:

$$F_{1,3} = F_1^{g_3} g_2, \quad F_{2,3} = F_2^{g_3} g_1. \tag{6.2.29}$$

В выражениях (6.2.29) зависящие только от y^3 поля g_i ($i = 1, 2, 3$) определяются после подстановки формулы (6.2.29) в систему (6.2.26). Можно показать, что $g_3 = 2$ или $g_3 = 1/2$, причем первая возможность приводит к общим эллипсоидальным координатам (см. далее).

После вычисления F_i ($i = 1, 2, 3$) зависимость

$$x = x(\Theta, b, c), \quad y = y(\Theta, b, c), \quad z = z(\Theta, b, c)$$

находится решением линейной системы (6.2.17). Поскольку полученные метрики удовлетворяют условию Робертсона, указанная зависимость может быть найдена в явном виде. Для краткости изложения опустим детальные вычисления и приведем здесь только окончательные формулы для полей F_i ($i = 1, 2, 3$) и (Θ, b, c) в наиболее интересных случаях. При записи формул, если не оговорено дополнительно, используется цилиндрическая система координат: $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, z , $\varphi = \arg(x + iy)$.

1.

$$F_1 = \frac{Q}{f g \alpha} \operatorname{sh}^2 \frac{g b}{2}, \quad F_2 = \frac{f g Q}{\alpha} \operatorname{ch}^2 \frac{\Theta}{2 f},$$

$$F_3 = \frac{8 f}{Q g \alpha} \operatorname{ch}^2 \frac{\Theta}{2 f} \operatorname{sh}^2 \frac{g b}{2} \left[\operatorname{ch} \left(\frac{\Theta}{f} \right) + \operatorname{ch}(g b) \right]^{-1}, \quad (6.2.30)$$

где f, g, Q, α – постоянные параметры. Поля (Θ, b, c) определяются выражениями

$$\operatorname{th} \frac{\Theta}{2 f} = \frac{1}{2 \alpha} \left[\sqrt{r^2 + (z + \alpha)^2} - \sqrt{r^2 + (z - \alpha)^2} \right],$$

$$\operatorname{cth} \frac{b g}{2} = \frac{1}{2 \alpha} \left[\sqrt{r^2 + (z - \alpha)^2} + \sqrt{r^2 + (z + \alpha)^2} \right], \quad c = Q \varphi, \quad Q \in Z. \quad (6.2.31)$$

Вихревое поле c характеризуется индексом Q , который принимает целочисленные значения (условная запись $Q \in Z$). При $Q = 1$ система координат (6.2.31) связана с координатами (u, v, φ) вытянутого эллипсоида вращения [28] соотношениями

$$\sin u = \operatorname{th} \frac{\Theta}{2 f}, \quad \operatorname{ch} v = \operatorname{cth} \frac{b g}{2}.$$

Поля Θ и b определяют нелокализованную текстуру, поскольку во всем интервале изменения x, y, z получаем

$$0 < \operatorname{th} \frac{\Theta}{2 f} < 1, \quad 0 < \operatorname{cth} \frac{b g}{2} < \infty$$

и, следовательно, $0 < \Theta < \infty, 0 < b < \infty$.

2.

$$F_1 = \frac{Q}{2f} \exp\left(-\frac{b}{g}\right), \quad F_2 = \frac{Q}{2f} \exp\left(\frac{\Theta}{f}\right),$$

$$F_3 = \frac{2fg^2}{Q} \exp\frac{\Theta}{f} \left[f^2 + g^2 \exp\left(\frac{\Theta}{f} + \frac{b}{g}\right) \right]^{-1}, \quad (6.2.32)$$

где f, g – константы. Поле c имеет вихревой вид, поля Θ и b определяют нелокализованные структуры:

$$\Theta = -f \ln\left(g \left[\sqrt{r^2 + z^2} - z \right] / 2f^2\right), \quad b = g \ln\left(\left[z + \sqrt{r^2 + z^2} \right] / 2g\right),$$

$$c = Q\varphi, \quad (Q \in Z). \quad (6.2.33)$$

При $Q = 1$ рассмотренная система криволинейных координат простыми заменами связана с параболическими координатами [28].

3. В этом случае поля F_i и (Θ, b, c) имеют вид

$$F_1 = \frac{g\sqrt{2}Q}{f} \left(1 + \operatorname{ch} \frac{b}{g}\right), \quad F_2 = \frac{f\sqrt{2}Q}{g} \left(1 + \sin \frac{\Theta}{f}\right),$$

$$F_3 = \frac{8\sqrt{2}fg \operatorname{ch}^2 \frac{b}{2g} \left(1 + \sin \frac{\Theta}{f}\right)}{Q \left(\operatorname{ch} \frac{b}{g} - \sin \frac{\Theta}{f}\right)}; \quad (6.2.34)$$

$$\Theta = -f \arcsin\left(\left[\sqrt{(1-8r^2)^2 + 16z^2(1+8r^2+4z^2)} - 1 - 8z^2 \right] / 8r^2\right),$$

$$\operatorname{ch} \frac{b}{g} = \left[1 + 8z^2 + \sqrt{(1-8r^2)^2 + 16z^2(1+8r^2+4z^2)} \right] / 8r^2,$$

$$c = Q\varphi, \quad Q \in Z, \quad (6.2.35)$$

где f, g – константы. При $f = -1$ поле $\bar{\Theta} = \Theta + \pi/2$ меняется от нуля до π и образует солитонную структуру, локализованную по оси z (рис. 6.9), и обладает следующим асимптотическим поведением:

$$\bar{\Theta} \rightarrow 4\sqrt{2}z, \quad \sqrt{r^2 + z^2} \rightarrow 0; \quad \bar{\Theta} \rightarrow \pi - \frac{1}{\sqrt{2}R}, \quad R = \sqrt{r^2 + z^2} \rightarrow \infty.$$

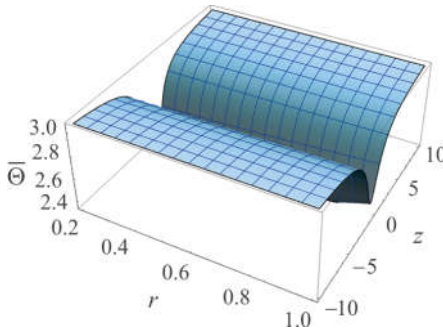


Рис. 6.9. Пространственное распределение поля $\Theta(r, z)$

Отметим, что при $z = 0$ выражение $\sqrt{(1-8r^2)^2 + 16z^2(1+8r^2+4z^2)}$ продолжается через точку ветвления $r = 1/\sqrt{8}$ так, что остаются непрерывными частные производные поля Θ в самой точке.

4.

$$F_1 = \frac{gQ}{f} \operatorname{sh}^2 \frac{b}{g}, \quad F_2 = \frac{fQ}{g} \operatorname{ch}^2 \frac{\Theta}{f},$$

$$F_3 = \frac{2fg}{Q} \operatorname{ch}^2 \frac{\Theta}{f} \operatorname{sh}^2 \frac{b}{g} \left[\operatorname{ch} \frac{2\Theta}{f} + \operatorname{sh} \frac{2b}{g} \right]^{-1}. \quad (6.2.36)$$

Здесь f, g – константы, $Q \in Z$. Поле c имеет вихревой вид, поля Θ, b дают нелокализованные текстуры:

$$\operatorname{ch} \frac{\Theta}{f} = \frac{1}{\sqrt{2}r} \left[r^2 + z^2 - 1 + \sqrt{r^4 + (z^2 - 1)^2 + 2r^2(1 + z^2)} \right]^{1/2},$$

$$\operatorname{ch} \frac{b}{g} = \frac{1}{\sqrt{2}r} \left[1 + r^2 - z^2 + \sqrt{r^4 + (z^2 - 1)^2 + 2r^2(1 + z^2)} \right]^{1/2},$$

$$c = Q\varphi. \quad (6.2.37)$$

5. Поля F_i зависят от функции $P(b, c)$:

$$F_1 = \exp[P(b, c)], \quad F_2 = f^2, \quad F_3 = 1, \quad (6.2.38)$$

которая удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\partial_b^2 P + f^2 \partial_c^2 P = 0, \quad (6.2.39)$$

где $f = \text{const}$. Если определить P как действительную часть комплексной функции $F(b + ic/f)$: $P = \text{Re}[F(b + ic/f)]$, то получим решение в неявном виде:

$$\Theta = fz, \quad x + iy = \int \exp \left[-\frac{F}{2} \left(b + i \frac{c}{f} \right) \right] db. \quad (6.2.40)$$

Данная квазидвумерная структура характеризуется простейшей зависимостью поля Θ от координат и многообразием двумерных решений для полей b, c , характерным для скорости течения двумерной идеальной жидкости. Так, при линейной зависимости функции $F(b + ic/f) = 2(c - ifb)/(fQ_1 + iQ_2)$ от аргумента $(b + ic/f)$ получаем решения

$$b = Q_1 \varphi + \frac{Q_2}{f} \ln r, \quad c = Q_2 \varphi - f Q_1 \ln r, \quad Q_1, Q_2 \in Z, \quad (6.2.41)$$

которые описывают вихри и логарифмические источники полей c и b .

6. Поля F_1 выражаются через функцию $P(\Theta, c)$:

$$F_1 = \frac{1}{4} (kgQb)^2, \quad F_2 = \frac{1}{2} (kgQ)^2 \exp[-P(\Theta, c)], \quad F_3 = \frac{1}{4} b^2, \quad (6.2.42)$$

которая удовлетворяет уравнению Лиувилля:

$$\exp P + \partial_\Theta^2 P + (gkQ)^2 \partial_c^2 P = 0. \quad (6.2.43)$$

Здесь g, k, Q – константы. Уравнение (6.2.43) имеет решение, которое выражается в терминах аналитической функции $F(\Theta + ic/(gkQ))$ и комплексно сопряженной к ней $\bar{F}(\Theta - ic/(gkQ))$:

$$P(\Theta, c) = \ln \left\{ -\frac{8 \partial_\Theta F(\Theta + ic/(gkQ)) \partial_\Theta \bar{F}(\Theta - ic/(gkQ))}{[F(\Theta + ic/(gkQ)) + \bar{F}(\Theta - ic/(gkQ))]^2} \right\}.$$

Однако такие решения приводят к мнимым значениям H_1 и H_3 . Если выберем одномерное решение (6.2.43) в виде

$$P = \ln \left[\frac{k^2}{2} \text{sech}^2 \frac{k\Theta}{2} \right],$$

то в сферической системе координат (R, θ, φ) , где

$$\sin \theta = r/R, \quad \cos \theta = z/R, \quad R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \varphi = \arg(x + iy),$$

получим структуру

$$\text{th}(k\Theta) = -\cos \theta, \quad b = g/R, \quad c = Q\varphi, \quad Q \in Z, \quad (6.2.44)$$

с нелокализованным распределением поля Θ , трехмерным точечным источником поля b и вихрем поля c .

7. Поля F_i выражаются через комбинации эллиптических функций

$$\lambda = \frac{\text{cn}^2(\Theta/c_1, k)}{\text{sn}^2(\Theta/c_1, k)}, \quad \mu = -\frac{k_1^2 \text{cn}^2(b/c_2, k_1)}{\text{dn}^2(b/c_2, k_1)}, \quad \nu = -\text{dn}^2(c/c_3, k) \quad (6.2.45)$$

следующим образом:

$$F_1 = \frac{c_2 c_3}{(\mu - \nu)c_1}, \quad F_2 = \frac{c_1 c_3}{(\nu - \lambda)c_2}, \quad F_3 = \frac{c_1 c_2}{(\mu - \lambda)c_3}. \quad (6.2.46)$$

Здесь k – модуль эллиптических функций Якоби, $k_1 = \sqrt{1 - k^2}$, c_i ($i = 1, 2, 3$) – постоянные. Из уравнений (6.2.20) получаем решение для Θ , b , c в неявном виде

$$\begin{aligned} x &= \frac{k \text{sn}(c/c_3, k)}{\text{dn}(b/c_2, k_1) \text{sn}(\Theta/c_1, k)}, \\ y &= -\frac{k \text{cn}(c/c_3, k) \text{dn}(\Theta/c_1, k) \text{sn}(b/c_2, k_1)}{\text{dn}(b/c_2, k_1) \text{sn}(\Theta/c_1, k)}, \\ z &= \frac{\text{cn}(\Theta/c_1, k) \text{cn}(b/c_2, k_1) \text{dn}(c/c_3, k)}{\text{dn}(b/c_2, k_1) \text{sn}(\Theta/c_1, k)}. \end{aligned} \quad (6.2.47)$$

Отсюда следует, что поля μ , ν , λ являются общими эллипсоидальными координатами (эллиптическими координатами в евклидовом пространстве) [28–30], если они изменяются в интервалах

$$-1 < \nu < -1 + k^2 < \mu < 0 < \lambda < \infty.$$

Положим

$$c_1 = \frac{\pi}{K(k)}, \quad c_2 = \frac{\pi}{K(k_1)}, \quad c_3 = \frac{\pi}{2K(k)}, \quad (6.2.48)$$

где $K(k)$ – полный эллиптический интеграл первого рода. Тогда отображение (6.2.47), (6.2.48) группового многообразия $SU(2)$ в R^3 оказывается взаимно однозначным и характеризуется степенью отображения [31], равной единице.

С точностью до сдвигов полей и масштабных преобразований параметризация (6.2.47) совпадает с приведенной в монографии [30]. Тем не менее для анализа решений модели требуется дополнительное исследование. Из представления (6.2.47) находим соотношения симметрии

$$b(x, y, z) = -b(x, y, -z) + 2\pi,$$

$$c(x, y, z) = -c(x, -y, z) + \pi = c(-x, -y, z) + \pi,$$

которые сразу определяют области значений полей b, c :

$$0 < b < \pi \quad (z > 0), \quad \pi < b < 2\pi \quad (z < 0),$$

$$0 < c < \pi/2 \quad (x > 0, y < 0), \quad \pi/2 < c < \pi \quad (x > 0, y > 0),$$

$$\pi < c < 3\pi/2 \quad (x < 0, y > 0), \quad 3\pi/2 < c < 2\pi \quad (x < 0, y < 0).$$

Отсюда следует, что поле b равно π при $z \rightarrow 0$, а поле c имеет структуру вытянутой вдоль оси z вихревой нити со скачком поля на 2π в полуплоскости $x = 0, y < 0$. Заметим, что при $z = 0, b = \pi$ уравнения (6.2.47) принимают вид

$$x = \frac{\operatorname{sn}(c/c_3, k)}{\operatorname{sn}(\Theta/c_1, k)}, \quad y = -\frac{\operatorname{cn}(c/c_3, k) \operatorname{dn}(\Theta/c_1, k)}{\operatorname{sn}(\Theta/c_1, k)}, \quad z = 0.$$

Поэтому при $k = 0$ поле c совпадает с полярным углом $\varphi + \pi/2$, поскольку в этом случае

$$x = \frac{\sin c}{\sin(\Theta/2)}, \quad y = -\frac{\cos c}{\sin(\Theta/2)}.$$

Явное выражение для сложной трехмерной структуры (6.2.47), (6.2.48) можно получить следующим образом. Выражение

$$\frac{x^2}{1+t} + \frac{y^2}{1-k^2+t} + \frac{z^2}{t} = 1 \quad (6.2.49)$$

определяет поверхность второго порядка. Известно, что корни этого уравнения t_1, t_2, t_3 , выбранные в интервалах

$$-1 < t_1 < -1 + k^2 < t_2 < 0 < t_3 < \infty,$$

совпадают с параметрами ν, μ, λ , соответственно, что и дает выражение последних через x, y, z . В конечном счете поля Θ, b, c находятся численными методами из соотношений (6.2.45).

Локализованное распределение поля Θ для разных значений z представлено на рис. 6.10. Из выражений (6.2.45), (6.2.49) следует асимптотическое поведение поля Θ :

$$\Theta \sim \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad x^2 + y^2 + z^2 \rightarrow \infty.$$

Поле b локализовано для малых значений z и делокализовано при больших (рис. 6.11).

Вихревой характер поля c изображен на рис. 6.12 для двух значений z . Вертикальная стенка соответствует скачку поля на 2π .

Структуры (6.2.47) не являются топологическими, так как отсутствие постоянных пределов у полей b, c при $x^2 + y^2 + z^2 \rightarrow \infty$ не позволяет компактифицировать пространство R^3 в сферу S^3 и ввести топологический инвариант из $\pi_3(SU(2))$ [31].

6.2.3. Пространственные структуры, связанные со второй и третьей подстановками

В этом пункте используем дифференциально-геометрический метод для интегрирования уравнений (6.2.9), (6.2.10) второй подстановки. Обозначим $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$ и $y^1 = a, y^2 = b, y^3 = c$. Наша цель найти зависимость $x_i = x_i(y^1, y^2, y^3)$ ($i = 1, 2, 3$). Из выражений (6.2.10), (6.2.15) следует, что метрический тензор g^{ik} , связанный с таким преобразованием, имеет недиагональный вид:

$$\|g^{ik}\| = \begin{pmatrix} h_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & h_2^2 & h_1^2 \\ 0 & h_1^2 & h_3^2 \end{pmatrix}. \quad (6.2.50)$$

После преобразования годографа уравнения (6.2.9) записываются в виде (6.2.23) с метрическим тензором (6.2.50). Можно показать, что

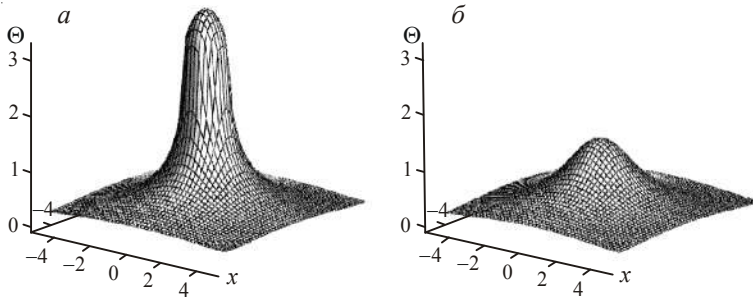


Рис. 6.10. Локализованная структура поля $\Theta(x, y, z)$ в текстуре, связанной с триортогональной гармонической системой координат ($k = 0.3$).
Солитоны при $z = 0$ (а) и $z = 1$ (б)

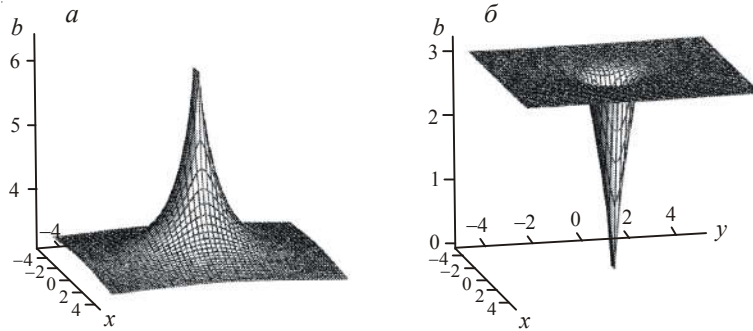


Рис. 6.11. Структура поля $b(x, y, z)$ в текстуре, связанной с триортогональной гармонической системой координат ($k = 0.3$).
Локализация поля при $z = -1$ (а) и $z = 0.1$ (б)

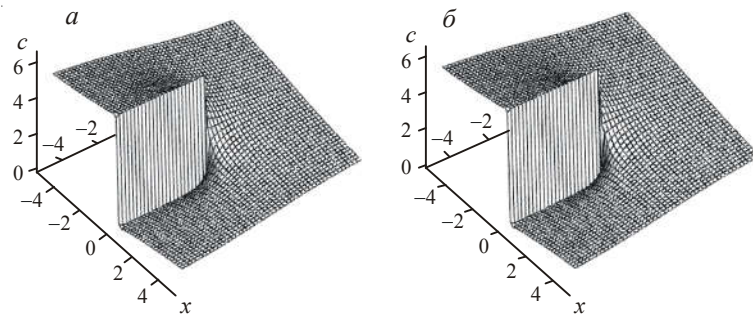


Рис. 6.12. Вихревая структура поля $c(x, y, z)$ в текстуре, связанной с триортогональной гармонической системой координат ($k = 0.3$).
Распределение поля при $z = -0.1$ (а) и $z = 1$ (б) со скачком 2π в полуплоскости $x = 0, y < 0$

их решение имеет вид

$$h_1 = \left[U_{,22} U_{,33} - (U_{,23})^2 \right]^{-1/2}, \quad h_2 = \sqrt{U_{,33}} \left[U_{,23} \left((U_{,23})^2 - U_{,22} U_{,33} \right) \right]^{-1/2},$$

$$h_3 = \sqrt{U_{,22}} \left[U_{,23} \left((U_{,23})^2 - U_{,22} U_{,33} \right) \right]^{-1/2}, \quad (6.2.51)$$

где поле U представляет собой сумму трех полей, зависящих только от двух переменных:

$$U(y^1, y^2, y^3) = U_1(y^2, y^3) + U_2(y^1, y^3) + U_3(y^1, y^2), \quad (6.2.52)$$

$U_{,2} = \partial U / \partial y^2$ и т. д. Явный вид функций U_i определяется решением уравнений (6.2.19) с метрическим тензором (6.2.50). Эти формулы имеют громоздкий вид и мы приведем здесь только одно из них:

$$\det \begin{pmatrix} U_{,222} & U_{,223} & U_{,233} \\ U_{,223} & U_{,233} & U_{,333} \\ U_{,22} & U_{,23} & U_{,33} \end{pmatrix} = 0. \quad (6.2.53)$$

Первая и вторая строки матрицы (6.2.53) являются производными от третьей строки по y^2 и y^3 соответственно. Уравнение (6.2.53) имеет решение, когда первая или вторая строки равны нулю, а также при линейной зависимости между столбцами:

$$\begin{pmatrix} U_{,222} \\ U_{,223} \\ U_{,22} \end{pmatrix} = f_1 \begin{pmatrix} U_{,223} \\ U_{,233} \\ U_{,23} \end{pmatrix} + f_2 \begin{pmatrix} U_{,233} \\ U_{,333} \\ U_{,33} \end{pmatrix}. \quad (6.2.54)$$

Первые два условия эквивалентны, поскольку система (6.2.9), (6.2.10) инвариантна относительно перестановок b и c . Совместно с решением уравнений (6.2.19) эти условия приводят к результатам, изложенным далее в пунктах под номерами 8 и 9. Можно показать, что другие типы решений, совместимые со связью (6.2.54), существуют лишь тогда, когда функции f_1, f_2 постоянны или зависят от одной переменной y_1 . После вычисления функций U_i ($i = 1, 2, 3$) зависимость $x = x(a, b, c)$, $y = y(a, b, c)$, $z = z(a, b, c)$ находится решением линейной системы (6.2.17).

Для анализа текстур Θ , b , c используем решение уравнения (6.2.8) в виде 2π -солитона

$$\Theta = 4\text{arctg}(\exp(-a)) \quad (6.2.55)$$

или решетки солитонов

$$\sin \frac{\Theta}{2} = \text{cn} \left(\frac{a}{k}, k \right), \quad \cos \frac{\Theta}{2} = \text{sn} \left(\frac{a}{k}, k \right). \quad (6.2.56)$$

Для краткости изложения опускаем детальные вычисления для всех случаев. Приведем только окончательные формулы для полей h_i ($i = 1, 2, 3$) и Θ , b , c . Как и ранее, выражения для полей Θ , b , c , если это не оговорено особо, приводятся в цилиндрических координатах (r , z , φ). Это упрощает форму записи.

8. Поля h_1 , h_2 , h_3 имеют вид

$$\begin{aligned} h_1 &= \exp \left(\frac{a}{\sqrt{Q_1 Q_2}} \right), \\ h_2 &= -p^2 \sqrt{\frac{Q_1}{Q_2}} \exp \left(\frac{a}{\sqrt{Q_1 Q_2}} \right) \sqrt{\exp \left(-\frac{2a}{\sqrt{Q_1 Q_2}} \right) + \frac{Q_2^2}{p^4 Q_1^2}}, \\ h_3 &= \sqrt{\frac{Q_1}{Q_2}} \exp \left(\frac{a}{\sqrt{Q_1 Q_2}} \right), \end{aligned} \quad (6.2.57)$$

с параметром p и $Q_1 Q_2 > 0$. В плоскости xOy у полей b , c вихревой вид, функция a описывает логарифмический источник:

$$a = -\sqrt{Q_1 Q_2} \ln r, \quad b = p^2 Q_1 z + \varphi Q_2, \quad c = \varphi Q_1. \quad (6.2.58)$$

Из формул (6.2.55), (6.2.58) находим поле Θ в виде локализованного вдоль оси Oz радиально симметричного 2π -солитона:

$$\Theta = 4\text{arctg} \left(r^{\sqrt{Q_1 Q_2}} \right).$$

9. Поля h_i зависят от функции $P(a, b)$:

$$h_1 = g^2 \exp \left(-\frac{P}{2} \right), \quad h_2 = g^2 Q \exp \left(-\frac{P}{2} \right), \quad h_3 = \frac{\sqrt{g^6 \exp(-P) + Q^4}}{Qg}, \quad (6.2.59)$$

которая удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\partial_a^2 P + Q^2 \partial_b^2 P = 0. \quad (6.2.60)$$

Выберем решение (6.2.60) в виде действительной части комплексной функции $T(a - ib/Q)$:

$$P(a, b) = \operatorname{Re} [T(a - ib/Q)].$$

Тогда структура имеет простейшую зависимость от z , и многообразие решений определяется решением неявных уравнений

$$c = \frac{b}{Q^2} + \frac{Q}{g^3} z, \quad x + iy = \int_{-\infty}^{a-ib/Q} \exp\{T(x)\} dx, \quad (6.2.61)$$

из которых следует, что $a - ib/Q$ – произвольная аналитическая функция $x + iy$.

Простейшие антиферромагнитные структуры получаются при выборе Θ в виде решетки солитонов (6.2.56), а решения уравнения (6.2.61) в форме

$$a - i\frac{b}{Q} = \sum_{s=1}^n (f_s + ig_s) \ln(x + iy - c_s), \quad f_s, g_s \in R, \quad (6.2.62)$$

с комплексными постоянными c_s . Тогда поля a и b описывают квазидвумерные спиральные структуры п. 1.4.

10. Структура определяется полем $P(a, c)$:

$$h_1 = (-b + B^2 c) \exp(-P),$$

$$h_2 = \frac{1}{B} (b - B^2 c) [B^4 \exp(-2P) + (b - B^2 c)^2]^{1/2},$$

$$[B^4 \exp(-2P) + (b - B^2 c)^2]^{1/2}, \quad h_3 = \frac{1}{B} (-b + B^2 c) \exp(-P), \quad (6.2.63)$$

удовлетворяющим эллиптическому уравнению Лиувилля:

$$\exp(2P) + \partial_c^2 P + B^2 \partial_a^2 P = 0.$$

Его одномерные решения $P = \ln[C \operatorname{sech}(Ca/B)]$ дают в сферической системе координат (R, θ, φ) текстуру

$$c = \frac{\varphi}{C}, \quad b = \frac{B}{R} + \frac{B^2\varphi}{C}, \quad a = -\frac{B}{C} \operatorname{arctg} \cos \theta, \quad \frac{1}{C} \in Z, \quad \frac{B^2}{C} \in Z, \quad (6.2.64)$$

которая характеризуется вихрем поля c , вихрем с пространственным источником поля b .

11. Поля h_i , как и в случае эллиптических координат в пространстве, выражаются эллиптическими функциями с модулями k и $k_1 = \sqrt{1-k^2}$ и зависят от постоянных параметров c_2, c_3 :

$$h_2 = -\frac{h_1}{\operatorname{dn}^2(a/c_3, k_1) c_2^2 c_3} \left[\operatorname{dn}^2(a/c_3, k_1) c_2^2 c_3^4 + k^2 \left\{ 1 - (bc_2^2 - c c_3^2) \operatorname{dn}^2(a/c_3, k_1) \operatorname{sn}^2(c/c_2, k) \right\} \right]^{1/2},$$

$$h_1 = \frac{c_3 (bc_2^2 - c c_3^2) \operatorname{dn}(a/c_3, k_1)}{k \left[1 - \operatorname{dn}^2(a/c_3, k_1) \operatorname{sn}^2(c/c_2, k) \right]^{1/2}}, \quad h_3 = -h_1 \frac{c_2}{c_3}. \quad (6.2.65)$$

При $k = 1$ эти формулы определяют нелокализованные структуры

$$c = c_2 \operatorname{arth}(\cos \theta), \quad b = \frac{1}{c_2^2 R} + \frac{c_3^2}{c_2} \operatorname{arth}(\cos \theta), \quad a = c_3 \varphi.$$

Здесь использована сферическая система координат (R, θ, φ) .

Кратко обсудим локализованные магнитные конфигурации и текстуры, связанные с третьей подстановкой (6.2.12) – (6.2.14). Решение системы нелинейных уравнений (6.2.13) – (6.2.14) приведено в предыдущем подразделе (см. (6.1.13)):

$$A(\omega) + (x + iy) - 2iz\sqrt{B(\omega)} + B(\omega)(x - iy) = 0, \quad (6.2.66)$$

где $A(\omega), B(\omega)$ – произвольные аналитические функции от переменной $\omega = \alpha + i\beta$. При заданных функциях $A(\omega), B(\omega)$ поля $\alpha(x, y, z), \beta(x, y, z)$ находятся из комплексного уравнения (6.2.66). Тогда любое решение $n_{\mu}(\alpha, \beta)$ двумерного уравнения (6.2.12) дает магнитные

структуры. Однако для определения однозначных полей $\Theta(\alpha, \beta)$, $b(\alpha, \beta)$, $c(\alpha, \beta)$, требуется дополнительный анализ. Ограничимся обсуждением простейших непротиворечивых выражений для полей Θ , b , c . Положим

$$\Theta = \Theta(\alpha), \quad b = b(\beta), \quad c = c(\beta).$$

Тогда из формул (6.2.13) или системы (6.2.5) появляется возможность следующего выбора:

$$b = -f_1\beta, \quad c = f_2\beta \quad (6.2.67)$$

с постоянными значениями f_1, f_2 . При этом поле $\Theta(\alpha)$ удовлетворяет уравнению синус-Гордон

$$\frac{d^2\Theta}{d^2\alpha} - f_1 f_2 \sin \Theta = 0. \quad (6.2.68)$$

Несложный анализ показывает, что при выборе $A(\omega) = 0$ получим, что $\omega = \alpha + i\beta$ – произвольная аналитическая функция комплексной переменной Ω :

$$\omega = F(\Omega), \quad \Omega = \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \exp(i\varphi), \quad (6.2.68)$$

и модель описывает кноидальные и спиральные «ежи». Здесь $\varphi = \arg(x + iy)$, $\cos \theta = z/R$, $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Итак, мы показали, что модель главного кирального поля на группе $SU(2)$ обладает богатым многообразием пространственных структур и применение методов классической дифференциальной геометрии оказывается плодотворным для их анализа. Подстановки типа (6.2.12) – (6.2.14) (совместно с дифференциально-геометрическим методом) могут быть обобщены на случаи многокомпонентных моделей n -поля ($n \in S^N$), систем ортогональных n -полей на многообразиях Штифеля [23] и т. д. в пространстве-времени любой размерности.

Обсудим возможность реализации найденных текстур и мезодефектов в антиферромагнетиках. Масштабно инвариантные уравнения (6.1.1), (6.2.5) записаны в обменном приближении без учета магнитостатических полей и полей анизотропии. В антиферромагнетиках эффекты магнитостатических взаимодействий малы. При учете кристаллографической магнитной анизотропии найденные решения справедливы только вблизи дефектов на расстояниях $r < l = \sqrt{\alpha/\beta}$ от их центров (α – постоянная обменного взаимодей-

ствия, β – постоянная анизотропии). Вне этой области влияние анизотропии изменит поля дефектов. Описанные нитевидные вихревые и спиральные трехмерные структуры могут зарождаться на дефектах немагнитной природы, например на линиях дислокаций и дислинаций. В многоподрешеточных антиферромагнетиках (как и в двухподрешеточных [32]) локальная намагниченность пропорциональна вторым производным от полей и сильно возрастает вблизи вихревых нитей и ядер сингулярных структур. Поэтому в антиферромагнитных наноматериалах вихревые и спиральные структуры можно обнаружить методами спин-поляризованной сканирующей туннельной микроскопии.

Отметим, что многие локализованные топологические структуры, включая магнитные, наблюдались в сверхтекучем гелии. Обстоятельный обзор соответствующих экспериментальных и теоретических результатов приведен в монографии [4].

6.3. ТРЕХМЕРНЫЕ ЛОКАЛИЗОВАННЫЕ ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ С КОНЕЧНОЙ ЭНЕРГИЕЙ В ФЕРРОМАГНЕТИКЕ

Предмет математики настолько серьезен, что полезно не упустить случая и сделать его немного занимательным.

Б. Паскаль

Эйнштейн объяснял мне свою теорию каждый день, и вскоре я уже был совершенно уверен, что он ее понял.

Х. Вейцман. 1929 г.

6.3.1. Классификация трехмерных топологических солитонов с помощью инварианта Хопфа

Фундаментальные исследования – это то, чем я занимаюсь, когда я понятия не имею о том, чем я занимаюсь.

В. фон Браун

Перейдем к обсуждению трехмерных локализованных структур в одноосных ферромагнитных кристаллах. Будем считать, что мо-

дугль вектора намагниченности $\mathbf{M} = M_0 \mathbf{n}$ останаея постоаянным $|\mathbf{M}(\mathbf{r})| = M_0$, а едичный вектор ферромагнетизма $\mathbf{n}(\mathbf{r})$:

$$\mathbf{n} = (\sin \Theta \cos \Phi, \sin \Theta \sin \Phi, \cos \Theta) \quad (6.3.1)$$

удовлетворяет асимптотическим условиям

$$\mathbf{n} \rightarrow \mathbf{n}_0 = (0, 0, 1) \text{ при } R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \rightarrow \infty.$$

Рассматриваемая модель содержит вырожденное непрерывное семейство «классических вакуумов», переводимых друг в друга преобразованиями группы $SO(2)$ (вращениями в спиновом пространстве вокруг оси n_3). В силу граничных условий пространство R^3 пополняется бесконечно удаленными точками и эффективно компактифицируется. Оно эквивалентно трехмерной сфере S^3 :

$$R^3 \cup \{\infty\} = S^3. \quad (6.3.2)$$

Поэтому с математической точки зрения поле $\mathbf{n}(x, y, z)$ осуществляет отображение сферы S^3 на сферу S^2 ($\mathbf{n}^2 = 1$):

$$S^3 \Rightarrow S^2,$$

которая параметризована углами Θ, Φ (6.3.1). Для описания таких отображений полезна топологическая классификация. К топологическим свойствам объектов и отображений относятся качественные, устойчивые свойства, не меняющиеся при деформациях, а основной идеей топологии является идея непрерывности. В топологии доказывается важная теорема о том, что

а) все непрерывные локализованные отображения $S^3 \Rightarrow S^2$ разбиваются на классы *гомотопных* отображений;

б) классы гомотопных отображений $S^3 \Rightarrow S^2$ однозначно характеризуются целым числом – *инвариантом Хопфа* H .

Два непрерывных поля $\mathbf{n}_1(\mathbf{r})$ и $\mathbf{n}_2(\mathbf{r})$ называются гомотопными, если существует непрерывное семейство функций $\mathbf{n}(\mathbf{r}, t)$, зависящее от параметра t ($0 \leq t \leq 1$), такое что $\mathbf{n}(\mathbf{r}, t = 0) = \mathbf{n}_1(\mathbf{r})$ и $\mathbf{n}(\mathbf{r}, t = 1) = \mathbf{n}_2(\mathbf{r})$. В физике параметр t обычно имеет смысл времени. Тогда поля $\mathbf{n}_1(\mathbf{r})$ и $\mathbf{n}_2(\mathbf{r})$ гомотопны, если связаны непрерывной эволюцией, и отыскание гомотопий эквивалентно задаче решения уравнений поля. Итак, локализованное распределение намагниченности в трехмерном топологическом солитоне характеризуется целым числом H , которое не меняется при любых непрерывных изменениях поля $\mathbf{n}(x, y, z)$.

Замечательным примером отображения $R^3 \cup \{\infty\} = S^3 \Rightarrow S^2$ с индексом $H = 1$ является *расслоение* Хопфа, построенное в 1931 г. Перейдем к его обсуждению. Представим сферу S^3 как поверхность в четырехмерном евклидовом пространстве R^4 , заданную уравнением

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 = 1, \quad (6.3.3)$$

где y_α ($\alpha = 1, 2, 3, 4$) – декартовы координаты в R^4 . Тогда стереографическая проекция из S^3 в трехмерное евклидово пространство R^3 с декартовыми координатами (x_1, x_2, x_3) задается соотношениями

$$x_i = \frac{2y_i}{y_4 + 1}. \quad (6.3.4)$$

Обратное преобразование $R^3 \Rightarrow S^3$ также имеет простой вид:

$$y_4 = \frac{4 - R^2}{R^2 + 4}, \quad y_i = \frac{4x_i}{R^2 + 4} \quad (i = 1, 2, 3), \quad (6.3.5)$$

где $R^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$.

Отображение Хопфа сферы $R^3 \cup \{\infty\} = S^3$ на сферу S^2 ($\mathbf{n}^2 = 1$) с координатами (Θ, Φ) записывается в терминах другой стереографической проекции:

$$\Omega = \frac{n_1 + in_2}{1 + n_3} = \operatorname{tg} \left(\frac{\Theta}{2} \right) \exp(i\Phi), \quad (6.3.6)$$

где

$$\Omega = z_1/z_2, \quad z_1 = y_1 + iy_2, \quad z_2 = y_3 + iy_4. \quad (6.3.7)$$

В цилиндрических координатах (r, z, φ) отображение $S^3 \Rightarrow S^2$ имеет простой вид:

$$\operatorname{tg} \frac{\Theta}{2} = \frac{4r}{\sqrt{(r^2 + z^2)^2 + 8(z^2 - r^2 + 2)}},$$

$$\Phi = \varphi + \operatorname{Arctg} \left[\frac{1}{4z} (r^2 + z^2 - 4) \right]. \quad (6.3.8)$$

Обсудим поведение векторного поля $\mathbf{n}(\mathbf{r})$ с такими значениями (Θ, Φ) . В пределе $r \rightarrow \infty$ или $z \rightarrow \infty$ и на оси Oz поле $\mathbf{n}(\mathbf{r})$ стремится к предельному значению $\mathbf{n}_0 = (0, 0, 1)$, которому соответствует «север-

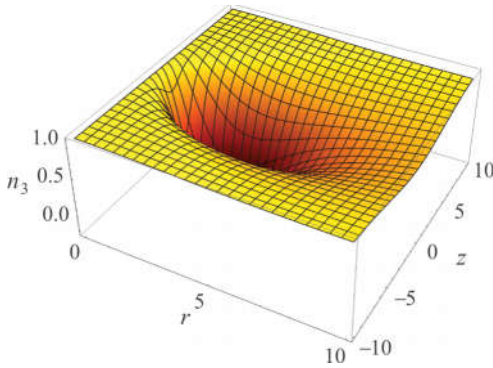


Рис. 6.13. График поля $n_3(r, z)$, инвариантного относительно вращений вокруг оси Oz

ный полюс» сферы $\mathbf{n}^2 = 1$. Распределение $n_3(r, z)$ представлено на рис. 6.13.

Поле $\mathbf{n}(r, z, \varphi)$ принимает минимальное значение $n_3 = -1$ в точке $r = 2$, $z = 0$ («южный полюс» сферы $\mathbf{n}^2 = 1$) и монотонно возрастает при удалении от

нее. Выражение для азимутального угла Φ существенно упрощается с помощью разложения $r = 2 + p \cos \Psi$, $z = p \sin \Psi$ ($p \ll 1$, $0 \leq \Psi \leq 2\pi$) вблизи «южного полюса», где поле Φ приобретает вид

$$\Phi \approx \varphi + \frac{\pi}{2} - \Psi. \quad (6.3.9)$$

Третье слагаемое в правой части данного соотношения описывает вихревую структуру поля Φ , центр которой есть замкнутая вихревая линия с координатами $r = 2$, $z = 0$ (*вихревое кольцо*). Схематично векторное поле $\mathbf{n}(\mathbf{r})$, определенное формулами (6.3.8), показано на рис. 6.14. Вихревая структура состоит из двух зацепляющихся вихревых нитей: прямолинейной (с бесконечным радиусом) нити, расположенной вдоль вертикальной оси Oz , и вихревого кольца. Более глубокое понимание отображения Хопфа дает анализ его *прообразов*, т. е. множеств точек в пространстве R^3 , каждое из которых соответствует некоторому фиксированному направлению вектора $\mathbf{n}(\mathbf{r})$.

Из выражений (6.3.8) следует, что поле (Θ, Φ) принимает постоянные значения на замкнутой кривой типа $r(\varphi)$, $z(\varphi)$. Несложные выкладки приводят формулу (6.3.8) к виду

$$\left(r - \frac{2}{\sin \Theta/2} \right)^2 + z^2 = \frac{4}{\operatorname{tg}^2 \Theta/2}; \quad (6.3.10)$$

$$x \cos \Phi + y \sin \Phi - z \operatorname{tg}(\Theta/2) = 0. \quad (6.3.11)$$

Отсюда сразу следует, что поле Θ постоянно на торе радиуса $2/\operatorname{tg}(\Theta/2)$ и прообраз любой фиксированной точки (Θ, Φ) есть замкнутая линия,

Рис. 6.14. Вихревая структура векторного поля $\mathbf{n}(\mathbf{r})$

которая образована пересечением тора (6.3.10) и плоскости (6.3.11), проходящей через центр тора. Такие кривые в дифференциальной геометрии носят название окружностей Вилларсо (Villarcseau circles).

Известно, что сфера S^3 изоморфна пространству параметров группы $SU(2)$. Изоморфизм устанавливается формулами

$$z_1 = i \sin \frac{\theta}{2} \exp \left[\frac{i}{2} (\gamma - \alpha) \right],$$

$$z_2 = \cos \frac{\theta}{2} \exp \left[\frac{i}{2} (\alpha + \gamma) \right],$$

которые связывают комплексные числа z_1, z_2 (6.3.7) с углами Эйлера (θ, α, γ) . Тогда при отображении Хопфа (6.3.6), (6.3.7) поля (Θ, Φ) записываются в более простом виде:

$$\Theta = \theta, \quad \Phi = \frac{\pi}{2} - \alpha.$$

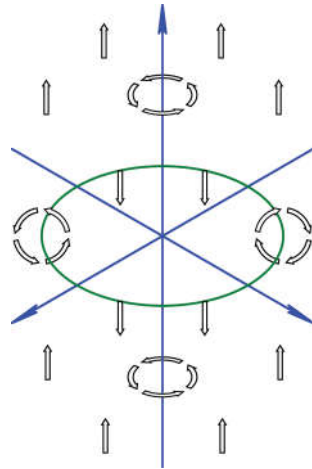
Результат не зависит от параметра γ , поэтому трехмерная сфера S^3 расслаивается в семейство окружностей S^1 . Фактор-пространством S^3/S^1 будет двумерная сфера S^2 . Отсюда происходит название отображения (6.3.6) – *расслоение Хопфа*.

Окружности Вилларсо обладают еще одной примечательной особенностью, важной в дальнейшем изложении. Для двух замкнутых непересекающихся кривых γ_1, γ_2 , параметризованных переменной t ($0 \leq t \leq 2\pi$) в виде $\mathbf{r}_1(t), \mathbf{r}_2(t)$, можно определить коэффициент зацепления \bar{H} [31, 35]:

$$\bar{H} = \frac{1}{4\pi} \oint_{\gamma_1} \oint_{\gamma_2} \frac{([\mathbf{dr}_1 \times \mathbf{dr}_2] \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2))}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3}. \quad (6.3.12)$$

Он равен числу витков одной кривой вокруг другой и не меняется при деформациях кривых, при которых они попарно не пересекаются. Для доказательства утверждения используем теорему Стокса и уравнение

$$\Delta G(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r})$$



для функции Грина $G(\mathbf{r}) = -1/(4\pi|\mathbf{r}|)$, где Δ – оператор Лапласа и $\delta(\mathbf{r})$ – трехмерная дельта-функция. Тогда после несложных преобразований интеграл (6.3.12) приводится к виду

$$\bar{H} = \oint_{\gamma_1} d\mathbf{r}_1 \cdot \iint_{S_2} d\mathbf{S} \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2),$$

где S_2 – поверхность, натянутая на контур γ_2 . Если кривая γ_1 пересекает поверхность S_2 в точках P_1, P_2, \dots, P_n , то в каждой точке интеграл равен единице, если скалярное произведение $(d\mathbf{r}_1 \cdot d\mathbf{S})$ больше нуля, и минус единице, если $(d\mathbf{r}_1 \cdot d\mathbf{S}) < 0$. Поэтому \bar{H} представляет собой алгебраическое число витков, которыми первый контур охватывает второй. Непосредственные вычисления показывают, что для всех окружностей Вилларсо индекс зацепления \bar{H} равен единице. Поверхность $\Theta = \text{const}$ и два прообраза векторов с разными углами Φ в отображении Хопфа схематично показаны на рис. 6.15.

Обсудим важную формулу Уайхеда [33–35], выражающую инвариант Хопфа H через векторное поле $\mathbf{n}(\mathbf{r})$. Внешней форме второй степени

$$\sin \Theta d\Theta \wedge d\Phi = \sin \Theta \left(\frac{\partial \Theta}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} - \frac{\partial \Theta}{\partial x_j} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right) dx_i \wedge dx_j$$

соответствует вектор

$$F_i = 2\varepsilon_{ijk} \sin \Theta \frac{\partial \Theta}{\partial x_j} \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} = -2\varepsilon_{ijk} \frac{\partial n_3}{\partial x_j} \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} = 2\varepsilon_{ijk} \left(\mathbf{n} \cdot \left[\partial_j \mathbf{n} \times \partial_k \mathbf{n} \right] \right). \quad (6.3.13)$$

Поскольку векторное поле \mathbf{F} соленоидально: $\text{div } \mathbf{F} = 0$, его можно выразить с помощью векторного потенциала $\mathbf{A}(\mathbf{r})$:

$$\mathbf{F} = \text{rot} \mathbf{A}. \quad (6.3.14)$$

Рассмотрим вначале две точки q_1, q_2 на сфере S^2 ($\mathbf{n}^2 = 1$) и соединим их гладкой кривой L (рис. 6.16, а). Прообразом этой

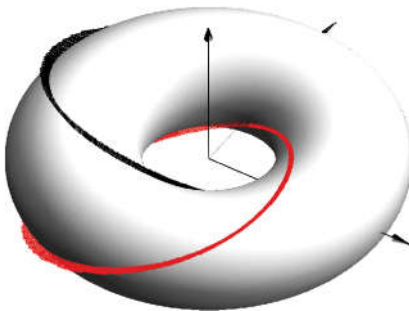


Рис. 6.15. Зацепление прообразов на поверхности $\Theta = \text{const}$

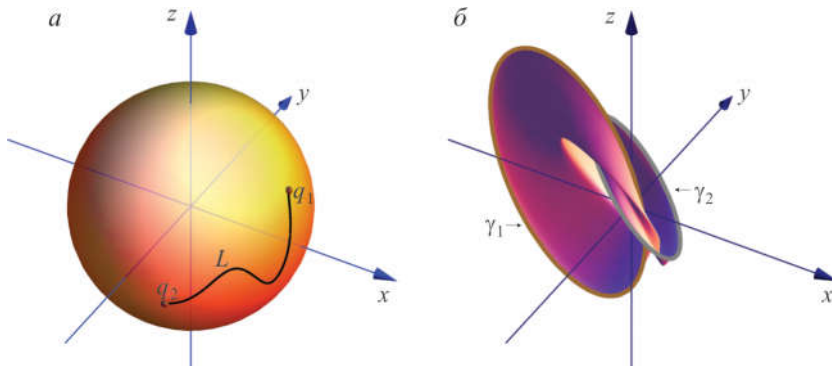


Рис. 6.16. Линия L на сфере $\mathbf{n}^2 = 1$ (а) и ее прообраз в пространстве (x, y, z) (б)

кривой в пространстве (x, y, z) будет поверхность S , ограниченная замкнутыми кривыми γ_1, γ_2 – прообразами точек q_1, q_2 (рис. 6.16, б для зацепляющихся кривых). Кривые γ_1, γ_2 оказываются замкнутыми (возможно, в бесконечно удаленной точке) из-за однозначности поля $\mathbf{n}(\mathbf{r}, t)$.

По теореме Стокса интеграл

$$\frac{1}{4\pi} \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

по поверхности S преобразуется в разность контурных интегралов:

$$\frac{1}{4\pi} \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{4\pi} \left(\oint_{\gamma_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} - \oint_{\gamma_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \right).$$

Если u_1, u_2 – локальные координаты на S , то левая часть равенства преобразуется к виду

$$\frac{1}{4\pi} \iint_S \sin \Theta \left(\frac{\partial \Theta}{\partial u_1} \frac{\partial \Phi}{\partial u_2} - \frac{\partial \Theta}{\partial u_2} \frac{\partial \Phi}{\partial u_1} \right) du_1 du_2$$

и равна нулю, так как поверхность S является прообразом линии L на сфере, координаты которой связаны функциональной зависимостью $\Theta = f(\Phi)$. В итоге интеграл

$$H = \frac{1}{4\pi} \oint_{\gamma} (\mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}) \quad (6.3.15)$$

по прообразу γ любой точки на сфере $\mathbf{n}^2 = 1$ дает одинаковое число H – инвариант Хопфа отображения $R^3 \cup \{\infty\} \Rightarrow S^2$.

Пусть S_1 – замкнутая поверхность с координатами (v_1, v_2) , натянутая на контур γ_1 . Тогда по теореме Стокса

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{4\pi} \oint_{\gamma_1} (\mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}) = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_1} \sin \Theta d\Theta d\Phi = \\ &= \frac{1}{4\pi} \iint_{S_1} \sin \Theta \left(\frac{\partial \Theta}{\partial v_1} \frac{\partial \Phi}{\partial v_2} - \frac{\partial \Theta}{\partial v_2} \frac{\partial \Phi}{\partial v_1} \right) dv_1 dv_2. \end{aligned} \quad (6.3.16)$$

Поскольку кривая γ_1 из пространства R^3 отображается в точку на сфере S^2 , то поверхность S_1 при отображении $\Theta(v_1, v_2)$, $\Phi(v_1, v_2)$ покрывает сферу S^2 некоторое целое число раз. Кривая γ_2 , являющаяся прообразом другой точки на сфере S^2 , должна пересекать поверхность S_1 такое же число раз. Поэтому справедливо замечательное соотношение

$$H = \bar{H}, \quad (6.3.17)$$

которое связывает инвариант Хопфа и коэффициент зацепления.

Отметим также, что инвариант Хопфа определяет число зацеплений векторного поля \mathbf{F} . Действительно, уравнения

$$\Theta(\mathbf{r}(s)) = \text{const}, \quad \Phi(\mathbf{r}(s)) = \text{const},$$

определяют кривую $\mathbf{r}(s)$ с параметром s в трехмерном пространстве (x, y, z) . Она является прообразом точки на сфере S^2 с фиксированными значениями (Θ, Φ) . Для такой кривой справедливы уравнения

$$\nabla \Theta \cdot \frac{d\mathbf{r}}{ds} = 0, \quad \nabla \Phi \cdot \frac{d\mathbf{r}}{ds} = 0.$$

Согласно формуле (6.3.13), поле \mathbf{F} ортогонально векторным полям $\nabla \Theta$, $\nabla \Phi$. Поэтому векторы \mathbf{F} в каждой точке пропорциональны векторам $d\mathbf{r}/ds$.

Для конкретных расчетов инварианта Хопфа выражение (6.3.15) не всегда удобно, так как кривая γ обычно неизвестна. Приведем еще одну формулу Уайхеда для инварианта Хопфа:

$$H = -\frac{1}{(8\pi)^2} \iiint d^3\mathbf{r} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{A}). \quad (6.3.18)$$

Ее подробный вывод можно найти в работе [34] и монографиях [31, 33].

Вычисление инварианта H существенно упрощается в важном частном случае, когда гамильтониан системы инвариантен относительно группы

$$SO(2)_I \times SO(2)_S,$$

где $SO(2)_I$ – группа вращений намагниченности вокруг оси n_3 , а $SO(2)_S$ – группа независимых пространственных поворотов вокруг оси Oz . Тогда в цилиндрических координатах (r, φ, z) полярный и азимутальный углы намагниченности можно конкретизировать:

$$\Theta = \Theta(r, z), \quad \Phi = Q\varphi + \phi(r, z). \quad (6.3.19)$$

Слагаемое $Q\varphi$ с целым числом Q описывает вихревой характер поля $\mathbf{n}(\mathbf{r})$ вокруг оси Oz . Для таких полей компоненты векторного потенциала имеют простой вид:

$$A_r = -2(1+n_3)\partial_r\phi, \quad A_z = -2(1+n_3)\partial_z\phi, \quad A_\varphi = \frac{2Q}{r}(1-n_3). \quad (6.3.20)$$

Подставляя формулы (6.3.13), (6.3.20) в соотношение (6.3.18), получаем

$$H = \frac{Q}{4\pi} \int_0^\infty dr \int_{-\infty}^\infty dz (\partial_r\phi\partial_z n_3 - \partial_z\phi\partial_r n_3). \quad (6.3.21)$$

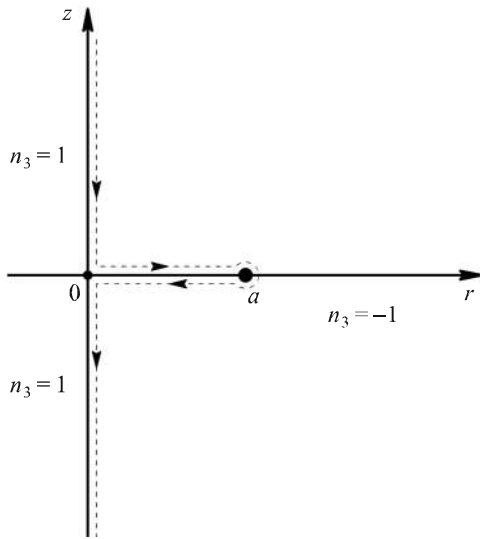
Поскольку подынтегральное выражение имеет вид

$$\partial_r\phi\partial_z n_3 - \partial_z\phi\partial_r n_3 = \partial_r(\phi\partial_z n_3) - \partial_z(\phi\partial_r n_3),$$

правую часть уравнения (6.3.21) с помощью формулы Грина можно преобразовать в контурный интеграл:

$$H = \frac{Q}{4\pi} \oint_\Gamma (\phi\partial_z n_3 dz + \phi\partial_r n_3 dr) = \frac{Q}{4\pi} \oint_\Gamma \phi dn_3.$$

Из ограниченности векторного потенциала (6.3.20) при $r=0$ следует, что $n_3=1$ на оси Oz . Если мы выберем эту ось и бесконечно удаленную полуокружность $r^2+z^2 \rightarrow \infty$ в (r, z) -плоскости в качестве контура Γ , то на нем $dn_3=0$ и, следовательно, $H=0$, когда поле ϕ однозначено. Для конфигураций с $H \neq 0$ поле ϕ не должно быть однозначным в (r, z) -плоскости.

Рис. 6.17. Контур Γ в плоскости (r, z)

Для конфигураций с $H \neq 0$ однозначность поля $\phi(r, z)$ восстанавливается проведением разреза в (r, z) -плоскости. Без потери общности выберем контур Γ , изображенный штриховой линией на рис. 6.17, полагая, что в области, ограниченной контуром, поле ϕ однозначно, а на интервале $0 \leq r \leq a$ вдоль оси r оно терпит скачок, кратный 2π :

$$\phi(r, \varepsilon) = \phi(r, -\varepsilon) - 2\pi T,$$

$$0 < \varepsilon \ll 1, \quad T \in \mathbb{Z}. \quad (6.3.22)$$

В точке $r = a, z = 0$ поле ϕ неопределенно, и эта точка может соответствовать только полюсу сферы: $n_3(a, 0) = -1$. В конечном счете инвариант Хопфа равен произведению T на топологический заряд Q :

$$H = \frac{Q}{4\pi} \oint_{\Gamma} \phi dn_3 = -\frac{QT}{2} \int_0^a \partial_r n_3(r, 0) dr = -\frac{QT}{2} (n_3(r, a) - n_3(r, 0)) = QT. \quad (6.3.23)$$

Таким образом, трехмерное распределение поля намагниченности с ненулевым инвариантом Хопфа и симметрией (6.3.19) всегда содержит вихревую линию вдоль оси Oz и вихревое кольцо, инвариантное к вращениям относительно этой оси, а инвариант Хопфа равен произведению их топологических зарядов [36, 37].

Когда поля (Θ, ϕ) обладают дополнительной симметрией:

$$\Theta(r, z) = \Theta(r, -z), \quad \phi(r, z) = -\phi(r, -z) + 2\pi T, \quad T \in \mathbb{Z},$$

из условия (6.3.22) сразу следует, что при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \phi(r, \varepsilon) = -\pi T, \quad \phi(r, -\varepsilon) = \pi T, \quad 0 \leq r \leq a; \quad \phi(r, \varepsilon) = \phi(r, -\varepsilon) = 0, \\ a \leq r \leq \infty. \end{aligned} \quad (6.3.24)$$

6.3.2. Модель Фаддеева

... Физическая теория – это просто математическая модель, используемая нами для описания результатов наблюдений. Теория является хорошей, если модель изящна, если она описывает большой класс наблюдений и предсказывает результаты новых наблюдений.

С. Хокинг

Модели ферромагнетика принадлежат классу моделей в теории поля, описывающих динамику или статику трехмерного единичного вектора $\mathbf{n}(\mathbf{r}, t)$, и называются моделями n -поля. Исторически первой моделью, где были найдены устойчивые локализованные трехмерные солитоны, является популярная модель Фаддеева [38, 39] (называемая также моделью Фаддеева – Скирма или Фаддеева – Ниemi), представляющая собой частный случай модели Скирма [40] и предел многих более сложных, реалистических моделей в теории поля и физике конденсированных сред [40–44]. В этой модели плотность энергии

$$h_0 = \frac{1}{2} \partial_i n_k \partial_i n_k + g F_i F_i, \quad g > 0, \quad (6.3.25)$$

где вектор \mathbf{F} определяется формулой (6.3.13). Для модели (6.3.25) при $D = 3$ соотношения (1.2.21), (1.2.22) принимают вид

$$E_2 = E_4, \quad E_2 > 0, \quad E_4 > 0.$$

Поэтому все условия теоремы Деррика выполнены, и ограниченность энергий гарантирует существование локализованных конфигураций. Они должны иметь некоторый фиксированный размер, обусловленный размерной постоянной g . Доказано, что энергия локализованных решений с индексом Хопфа H (хопфионов) ограничена снизу [45]: $E \geq cH^{3/4}$. Численное значение постоянной c уточнялось многими исследователями [44]. Решение уравнений модели в аналитическом виде крайне затруднено, поэтому привлекались нетривиальные численные методы. Первые численные исследования хопфионов независимо выполнены в работах [37, 39, 46], где предполагалась аксиальная симметрия конфигураций и была использована подстановка (6.3.19), эффективно редуцирующая трехмерную

задачу в двумерную. В статье [37] численными методами найдены хопфионы с $H = 1, 2$ в модели с плотностью энергии

$$h = \frac{1}{2}(\partial_i \mathbf{n})^2 + g[\partial_i \mathbf{n} \times \partial_j \mathbf{n}]^2 + g_1(\partial_i \mathbf{n})^2(\partial_j \mathbf{n})^2,$$

которая при $g_1 = 0$ совпадает с формулой (6.3.25). В работах [39, 46] представлены результаты по хопфионам с $H = 1, 2$ в модели Фаддеева и сделаны предположения о возможности существования «узловых» солитонов, что дало новый импульс исследований в этой области. Впоследствии был проведен полный трехмерный численный анализ хопфионов в модели Фаддеева. Численные методы и полученные результаты подробно описаны в монографии [44]. Мы приведем только часть из них. В работах [47–50] методом релаксации численно установлена структура хопфионов в модели (6.3.25) (при $g = 1/4$) с топологическими зарядами от единицы до восьми. Опишем далее кратко результаты этих вычислений.

Центром солитона является прообраз вектора $\mathbf{n} = (0, 0, -1)$. Поскольку трудно вычислить прообраз «южного полюса» на дискретной решетке, то при расчетах в трехмерном пространстве строился прообраз близкого вектора $\mathbf{n} = (0, 0, -1 + \varepsilon)$ ($\varepsilon \approx 0.2$). Он оказался замкнутой трубчатой поверхностью, внутри которой расположена одиночная линия центра солитона. Эта поверхность далее называется *положением* солитона или *ядром* солитона. В качестве начального состояния при численном счете выбирались аксиально-симметричная и не аксиально-симметричная конфигурации. В первом случае аксиальная симметрия сохраняется, и окончательную конфигурацию полей далее называем *тороидальным солитоном* (или просто «тором»). Вычисленная форма их ядер для разных топологических зарядов H представлена на рис. 6.18.

Следуя указанным работам, конфигурацию полей, полученную в результате релаксации начальных состояний без цилиндрической симметрии, далее называем просто солитоном. Структура ядер таких солитонов изображена на рис. 6.19. Инвариант Хопфа солитонов в этих работах определялся числом зацеплений прообразов векторов $\mathbf{n} = (0, 0, -1)$ и $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$ (см. рис. 6.20).

Поверхности равных значений плотности энергии изображены на рис. 6.21.

Из рис. 6.18 и 6.19 видно, что при $H = 1, 2$ солитон релаксирует из аксиально-симметричного или несимметричного начальных состояний в аксиально-симметричную конфигурацию. В обоих случаях положение солитона есть тор, но для $H = 1$ плотность энергии

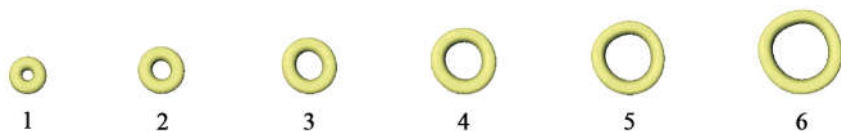


Рис. 6.18. Форма ядер тороидальных солитонов после релаксации аксиально-симметричных начальных состояний с индексом H от единицы до шести

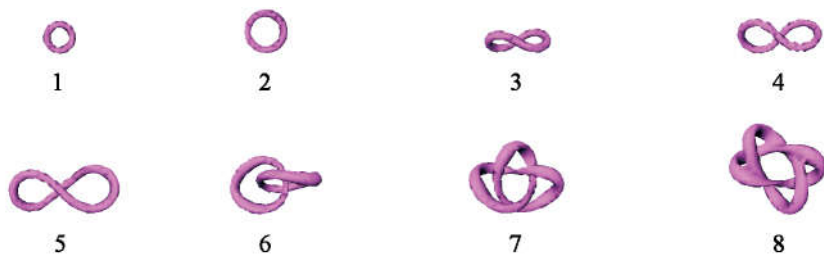


Рис. 6.19. Положение солитонов с индексом H от единицы до восьми

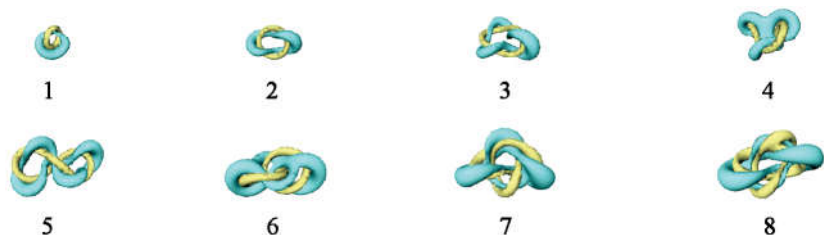


Рис. 6.20. Поверхности прообразов двух разных значений вектора \mathbf{n} , показывающих коэффициент зацепления солитонов с H от единицы до восьми

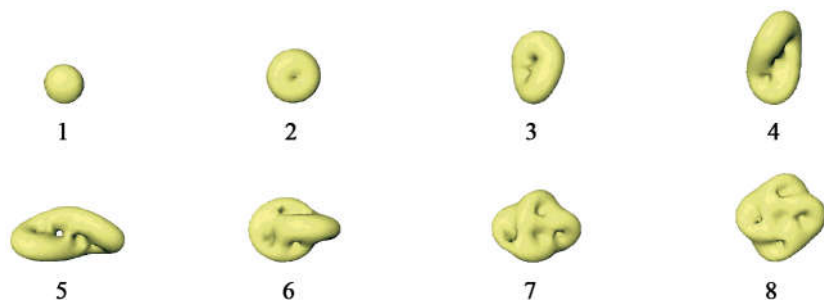


Рис. 6.21. Поверхности равных значений плотности энергии солитонов с H от единицы до восьми

локализована в начале координат, а при $H = 2$ – внутри тора (см. рис. 6.21). Значения вычисленной полной энергии для солитона и тороидального солитона приведены в табл. 6.1. Видно, что в пределах точности вычислений эти энергии совпадают. Кроме того, энергия солитона при $H = 2$ меньше, чем энергия двух солитонов с $H = 1$, что запрещает распад двухсолитонной конфигурации на односолитонные. Для $H = 3, 4, 5$ солитоны не аксиально-симметричны и их положение представляется замкнутой перекрученной петлей (см. рис. 6.19). Изоповерхности плотности энергии напоминают крендель с одной, двумя или тремя дырами. Полная энергия солитонов меньше, чем энергия тора (см. табл. 6.1). При $H = 6$ качественно меняется конфигурация солитона. Из рис. 6.19 видно, что положение солитона характеризуется не одиночной изолированной петлей, а описывается двумя раздельными зацепленными замкнутыми петлями. Коэффициент их зацепления равен единице и отличается от топологического заряда. Плотность энергии солитона не имеет форму двух зацепленных петель, а концентрируется в области их зацепления.

Как следует из рис. 6.19, при $H = 7$ резко меняется траектория центра солитона. Эти замечательные траектории в алгебраической топологии называют *узлами* [51]. Положение солитона представляется в виде простейшего узла, называемого *трилистником*. Он принадлежит к так называемым *торическим* узлам, которые являются замкнутыми кривыми на торе. Если сделать веревочные модели положений солитонов, то, не разрезая веревки, нельзя превратить траекторию центра солитона с $H = 7$ в таковую с $H = 1$. В численном счете трилистник возникает в результате релаксации асимметричных конфигураций, не требующих специальных начальных данных. Для $H = 8$ найдена другая интересная траектория центра солитона: она представляет собой две зацепленные петли, каждая из которых дважды зацеплена.

Из приведенной таблицы полной энергии солитонов следует, что энергия торов при $H \geq 3$ всегда больше таковой солитонов, что указывает на отсутствие аксиальной симметрии у конфигураций с высокими значениями топологических зарядов. Кроме того, энергия солитонов с $H \geq 2$ всегда меньше суммарной энергии солитонов с таким же общим топологическим зарядом. Это позволяет рассматривать солитоны с $H \geq 2$ как связанные состояния солитонов с меньшими значениями топологических зарядов и запрещает их распад на солитонные кластеры. Отметим, что позднее в работе [52] проанализированы солитоны до значений $H = 16$. В работах [53–54] была подробно численно исследована диссипативная динамика зацеплен-

Таблица 6.1

Энергия тороидального солитона и солитона с топологическими зарядами от единицы до восьми

H	Энергия солитона	Энергия тороидального солитона	H	Энергия солитона	Энергия тороидального солитона
1	504	505	5	1808	1974
2	835	836	6	1981	2361
3	1157	1181	7	2210	2600
4	1486	1542	8	2447	3050

ных солитонов с различными начальными конфигурациями полей. Авторы развили информативный метод визуализации солитонов и, реализуя первоначальную привлекательную идею Фаддеева, подтвердили результаты предыдущих работ, в частности существование трилистника с $H = 7$.

6.3.3. Стационарные и динамические прецессионные топологические солитоны в одноосном ферромагнетике

Машины должны работать. Люди должны думать.

Девиз компании IBM

В науках мы ищем причин не столько того, что было, сколько того, что могло бы быть.

Т. Гоббс

Как известно, энергия E «легкоосного» соизмеримого ферромагнетика включает в себя энергию магнитного дипольного взаимодействия (1.2.18), обменную энергию

$$E_{\text{exch}} = \frac{\alpha}{2} \int (\partial_i \mathbf{M})^2 d^3 \mathbf{r} \quad (6.3.26)$$

с постоянной $\alpha > 0$ и энергию кристаллографической анизотропии

$$E_{\text{anis}} = \frac{\beta}{2} \int (M_1^2 + M_2^2) d^3 \mathbf{r}, \quad (6.3.27)$$

где константа $\beta > 0$. Здесь мы ограничились учетом только членов второго порядка по степеням намагниченности $\mathbf{M} = M_0 \mathbf{n}$. Минимум энергии анизотропии достигается при намагничивании среды вдоль оси симметрии (ось Oz), которая является направлением «легкого» намагничивания. Однородное состояние $\mathbf{M} = (0, 0, M_0)$ есть основное, или нормальное, состояние ферромагнитной среды.

Размагничивающие поля стремятся привести систему к состоянию с замкнутым потоком магнитного поля, и нормальное состояние как глобальный энергетический минимум реализуется не всегда. Эффект дипольного взаимодействия существенно зависит от конечных размеров и формы ферромагнитного образца. Влияние магнитостатических полей на структуру основного состояния удобно оценивать по значению безразмерной величины Q_M (фактору качества): $Q_M = \beta / (4\pi)$. Если ферромагнетик имеет форму тонкой пластины с нормалью вдоль оси анизотропии, то при $Q_M < 1$ нормальное состояние оказывается энергетически невыгодным, а более предпочтительным становится случай продольной намагниченности. Если $Q_M > 1$, то нормальное состояние будет тем более ярко выражено, чем лучше удовлетворяется неравенство. На фоне однородного состояния с $Q_M > 1$ магнитное дипольное взаимодействие может приводить к формированию в пластине разнообразных уединенных доменных структур – цилиндрических [55], спиральных и более сложных [56]. Если фактор качества $Q_M \gg 1$, то могут возникать более компактные структуры, такие как прецессионные вихри [57–59], для которых наличие эффектов дипольного взаимодействия перестает быть критическим. Характерные размеры подобных солитонов порядка магнитной длины $l_0 = \sqrt{\alpha/\beta}$.

В дальнейшем будем считать $Q_M \gg 1$. Вклад дипольных взаимодействий в энергию ферромагнетика при этом мал, и их учет должен незначительно сказаться на структуре исследуемых солитонов. Далее полагаем, что полная энергия ферромагнетика

$$E = E_{\text{exch}} + E_{\text{anis}}. \quad (6.3.28)$$

Напомним, что аргументы Деррика о невозможности существования в безграничном ферромагнетике с энергией (6.3.28) статических локализованных структур (см. п. 1.2.1) не распространяются на динамические возбуждения. Так, в безграничном «легкоосном» ферромагнетике присутствуют неподвижные сферически-симметричные нетопологические солитоны, которые стабилизируются прецессией намагниченности внутри солитона [60, 61]. В результа-

те численного интегрирования соответствующих уравнений с подстановкой

$$\Theta = \Theta(R), \quad \Phi = \omega t, \quad R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

была определена структура локализованной «магنونной капли». Она существует только при частотах $\omega \leq 0.915\omega_0$, меньших частоты $\omega_0 = \gamma M_0 \beta$ ферромагнитного резонанса (γ – магнитомеханическое отношение), и описывает следующее состояние ферромагнетика. В макроскопической области решение представляет собой зародыш перемagnичивания, где $\Theta \approx \pi$. Эта область отделена от остальной части пространства сферической доменной границей, где происходит непрерывный переход от одного равновесного состояния $\mathbf{M} = (0, 0, -M_0)$ к другому $\mathbf{M} = (0, 0, M_0)$. Движущиеся с постоянной скоростью «магنونные капли» численно исследовались в работе [62], тогда сферическая симметрия нарушается и солитоны становятся кольцеобразными.

В физике конденсированных сред топологические дефекты с ненулевым инвариантом Хопфа впервые обсуждались в пионерных работах Воловика и Минеева для сверхтекучего ${}^3\text{He}$ [6] и Дзялошинского и Иванова [63] для одноосного ферромагнетика. До недавнего времени трехмерные магнитные структуры экспериментально были мало изучены. В последние годы появился ряд оригинальных работ по теоретическому и экспериментальному исследованию магнитных структур в сверхтекучем ${}^3\text{He}$ [64–66].

В модели изотропного ферромагнетика Гейзенберга в результате численного счета найдены движущиеся с постоянной скоростью прецессионные солитоны [67] с ненулевым инвариантом Хопфа. Кроме того, в работе [68] рассматривался случай движущегося топологического солитона, однако стабильные конфигурации с $H \neq 0$ найдены не были.

В статьях [69, 70] численным интегрированием найдены локализованные трехмерные топологические решения уравнения Ландау – Лифшица

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = -\gamma [\mathbf{M} \times \mathbf{H}_{\text{eff}}], \quad \mathbf{H}_{\text{eff}} = -\frac{\delta E}{\delta \mathbf{M}}, \quad \gamma > 0, \quad (6.3.29)$$

вида

$$\Theta = \Theta(r, z - Vt), \quad \Phi = \omega t + Q\varphi + \phi(r, z - Vt), \quad (6.3.30)$$

где $Q \in Z$, φ – полярный угол цилиндрической системы координат (r, φ, z) и $\Theta \rightarrow 0$ при $|\mathbf{r}| \rightarrow \infty$. Такие структуры описывают трехмер-

ные прецессионные солитоны стационарного профиля, распространяющиеся вдоль оси анизотропии. Далее в этом пункте изложены результаты данных работ.

Уравнение (6.3.29) инвариантно к дискретным симметриям:

$$\Theta(r, -z) = \Theta(r, z), \quad \Phi(r, -z) = \varphi_0 - \Phi(r, z). \quad (6.3.31)$$

Для определенности выберем $\varphi_0 = \pi$. От полей Θ , Φ для дальнейшего анализа удобно перейти к векторному полю

$$\mathbf{n}^* = (\sin\Theta \cos\phi, \sin\Theta \sin\phi, \cos\Theta),$$

заданному на полуплоскости ($r \geq 0, -\infty \leq z \leq \infty$). Профиль \mathbf{n}^* -солитона остается постоянным в движущейся системе координат. Поэтому для простоты будем считать \mathbf{n}^* не зависящим от времени и исследовать структуру в нулевой момент:

$$\mathbf{n}^* = \mathbf{n}^*(r, z - Vt)|_{t=0}.$$

Решению типа (6.3.31) соответствует солитон с индексом Хопфа H :

$$H = QT, \quad T = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_0^{\infty} dr \left(\mathbf{n}^* \cdot \left[\partial_r \mathbf{n}^* \times \partial_z \mathbf{n}^* \right] \right). \quad (6.3.32)$$

Представим энергию как функционал векторного поля \mathbf{n}^* :

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_0^{\infty} dr \sigma_E,$$

$$\sigma_E = \alpha M_0^2 \pi r \left[(\partial_r \mathbf{n}^*)^2 + (\partial_z \mathbf{n}^*)^2 + \left(\frac{Q^2}{r^2} + \frac{\beta}{\alpha} \right) (n_1^{*2} + n_2^{*2}) \right]. \quad (6.3.33)$$

Помимо энергии уравнение (6.3.29) обладает двумя интегралами движения: числом спиновых отклонений (магнонов):

$$N = \frac{M_0}{\gamma \hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_0^{\infty} dr 2\pi r (1 - n_3) \quad (6.3.34)$$

и проекцией $P_3 = P$ импульса поля намагниченности на ось анизотропии. Существуют разные подходы к интегральному представлению проекции импульса, но для выбранного метода решения задачи более удобно представление Папаниколау – Томараса [71]:

$$P = -\frac{M_0}{\gamma} \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_0^{\infty} dr \pi r^2 \left(\mathbf{n}^* \cdot \left[\partial_r \mathbf{n}^* \times \partial_z \mathbf{n}^* \right] \right). \quad (6.3.35)$$

Известно [59, 71], что исследование динамики локализованных структур в уравнении Ландау – Лифшица эквивалентно решению вариационной задачи о минимизации функционала энергии E при фиксированном значении интегралов движения: полного числа спиновых отклонений N и импульса P . Используя необходимые условия экстремума для функционала

$$J = E - \hbar\omega N + VP \quad (6.3.36)$$

при вариациях $\mathbf{n}^*(r, z) \rightarrow \mathbf{n}^*(r + \lambda r, z)$, $\mathbf{n}^*(r, z) \rightarrow \mathbf{n}^*(r, z + \lambda z)$ из уравнений

$$\frac{d}{d\lambda} J\{\mathbf{n}^*(r + \lambda r, z)\} |_{\lambda=0} = 0, \quad \frac{d}{d\lambda} J\{\mathbf{n}^*(r, z + \lambda z)\} |_{\lambda=0} = 0$$

получаем формулы для расчета частоты прецессии ω и скорости V солитона:

$$\omega = \frac{1}{\hbar N} (E_{\text{exch}} + E_{\text{anis}} - I_z), \quad V = \frac{1}{2P} (2E_{\text{exch}} - 3I_z), \quad (6.3.37)$$

где

$$I_z = \alpha M_0^2 \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_0^{\infty} dr 2\pi r (\partial_z \mathbf{n}^*)^2.$$

Частоту прецессии и скорость удобно нормировать на частоту однородного ферромагнитного резонанса и характерную скорость соответственно: $\omega_0 = \gamma M_0 \beta$, $V_0 = \omega_0 l_0$.

На основе полученных соотношений можно построить схему численного решения задачи – поиска экстремума функционала (6.3.36):

$$J = \frac{\pi r \omega_0^2 l_0^4}{\alpha \gamma^2} \left\{ (\partial_r \Theta)^2 + (\partial_z \Theta)^2 + \sin^2 \Theta \left[(\partial_r \phi)^2 + (\partial_z \phi)^2 + \frac{Q^2}{r^2} + \frac{1}{l_0^2} \right] + \frac{2\omega}{\omega_0 l_0^2} (\cos \Theta - 1) + \frac{rV}{V_0 l_0} \sin \Theta (\partial_z \Theta \partial_r \phi - \partial_z \phi \partial_r \Theta) \right\}. \quad (6.3.38)$$

Все слагаемые здесь положительны, кроме двух последних. Предпоследнее слагаемое для положительных значений частоты прецессии всегда принимает отрицательные значения и минимально в «южном полюсе», где $\Theta = \pi$. Последнее становится минималь-

ным при условии, что поля Θ и ϕ связаны функциональной зависимостью.

От функционала J (6.3.38) можно перейти к функции, аргументами которой являются проекции вектора \mathbf{n}^* в узлах дискретной сетки. Функционалы преобразуются в функции от компонент тензора η : $\eta_{ijk} = n_k^*(r_i, z_j)$, где r_i и z_j – координаты узла, заданного парой индексов (i, j) . С учетом того что при $z < 0$ конфигурация поля может быть восстановлена соотношениями симметрии (6.3.31), в качестве области дискретизации был выбран квадрат: $0 \leq r \leq L$, $0 \leq z \leq L$. Размер L должен быть таким, чтобы солитон целиком поместился в область моделирования и не упирался в край. В то же время L должен быть достаточно большим, чтобы дискретная сетка точно отражала гладкую форму солитона. Удачным выбором оказалась величина $L = 20l_0$. Для повышения эффективности дискретную сетку накладывали не равномерно, а с увеличением плотности точек к центру системы. Это правомерно, когда неоднородность локализована вблизи центра и поле быстро переходит в однородное состояние при удалении от центра солитона. На границах области при значениях $z = L$ и $r = L$ полагали $\mathbf{n}^* = \mathbf{n}_0 = (0, 0, 1)$.

Суть численного метода состоит в минимизации энергии (6.3.33) с учетом ограничений (6.3.34), (6.3.35) и $\mathbf{n}^{*2} = 1$. Она может быть проведена методом сопряженных градиентов. Интеграл (6.3.34) после дискретизации преобразуется в линейную форму, и накладываемая связь учитывается действием линейного оператора [72] при вычислении направления минимума целевой функции на каждой итерации. Для учета остальных ограничений использовали метод квадратичных штрафных функций, выбирая в качестве целевой функции

$$F(\eta) = E(\eta) + f_p (P(\eta) - P)^2 + f_n \sum_{i,j} \left(\sum_{k=1}^3 \eta_{ijk}^2 - 1 \right)^2,$$

где суммирование ведется по всем узлам дискретной сетки. Штрафные множители f_p и f_n брали достаточно большими – так, чтобы точность результатов оказалась приемлемой. Однако слишком большое значение может существенно замедлить скорость минимизации. Для решения этой проблемы штрафы увеличивали поэтапно. Например, если алгоритм после некоторого количества итераций переставал быть эффективным – не наблюдался прогресс в целевой функции, но точность результатов недостаточна, то повышали штрафной множитель и минимизация продолжалась.

Проверка точности результата состояла в следующем. На каждом итерационном шаге рассчитывалась невязка по норме векторного поля $\mathbf{n}^{*2} - 1 = 0$. Степень соответствия этому равенству (по всем узлам) есть один из критериев. В узлах сетки рассчитывались значения углов Θ и ϕ , их пространственные производные первого и второго порядков. Затем по формулам (6.3.37) рассчитывались ω и V , и вычислялась невязка непосредственно для уравнений Эйлера – Лагранжа функционала (6.3.38):

$$\frac{1}{l_0^2} \sin\Theta \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{V_0}{V_0} \partial_z \phi \right) - \frac{1}{2} \sin 2\Theta \left(\frac{Q^2}{r^2} + \frac{1}{l_0^2} + (\nabla\phi)^2 \right) + \Delta_2 \Theta = 0, \quad (6.3.39)$$

$$\frac{V}{V_0 l_0} \partial_z \Theta + 2 \cos\Theta (\nabla\phi \cdot \nabla\Theta) + \sin\Theta \Delta_2 \phi = 0, \quad (6.3.40)$$

где дифференциальные операторы

$$\Delta_2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad \nabla = \mathbf{i}_r \partial_r + \mathbf{i}_z \partial_z.$$

Минимизация функционала энергии проводилась до тех пор, пока перечисленные критерии не выполнялись с требуемой степенью точности.

Отличительной особенностью численных исследований был выбор начального состояния – пробной конфигурации поля, от которой начинался поиск минимума. Для прецессионных стационарных солитонов с $V = 0$ во всей области моделирования, кроме небольшого квадранта вблизи центра, вектор \mathbf{n}^* отвечал основному состоянию, а внутри квадранта векторы лежали в перпендикулярной плоскости со случайной ориентацией от точки к точке. Начальная конфигурация была в определенной мере хаотичной и даже не соответствовала дискретизации какой бы то ни было гладкой функции.

Для динамических солитонов в качестве начальной конфигурации в работе [70] выбиралось непрерывное поле \mathbf{n}^* с заданным топологическим индексом T . Суть численной процедуры – сохранять постоянными на каждом шаге итерации значения интегралов движения N и P . Эти значения становятся свободными параметрами. Удобно использовать в качестве начальной конфигурации гладкие

функции ϕ_{in} и Θ_{in} , которые выражаются явно через N и P . Пример такой конфигурации с $T = 1$:

$$\phi_{in} = -\frac{\pi}{2} + v + k \frac{z}{a}, \quad \cos \Theta_{in} = 1 - \frac{4 \operatorname{sh}^2 u}{2 + \operatorname{ch} 2u} \exp[6(1 - \operatorname{cth} u)],$$

где u и v – тороидальные координаты:

$$\operatorname{th} u = 2ar / (a^2 + r^2 + z^2), \quad 0 \leq u < \infty;$$

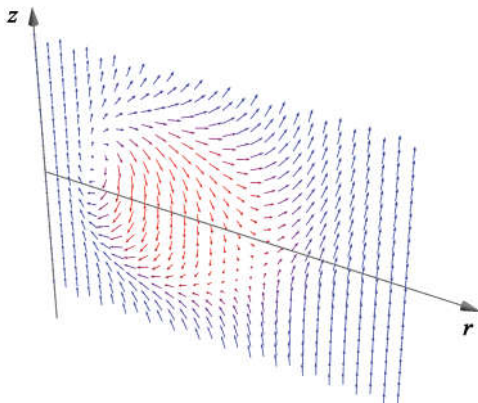
$$\operatorname{ctg} v = (a^2 - r^2 - z^2) / (2az), \quad 0 \leq v < 2\pi.$$

Параметры a и k выражаются явно через N и P :

$$a = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi^2} \frac{\gamma \hbar}{M_0} N}, \quad k = k_0 + k_p \frac{\gamma}{M_0} \frac{P}{a^2},$$

где константы $k_0 \approx 3.353$, $k_p \approx 0.076$. По результатам численных вычислений по формуле (6.3.32) рассчитывался индекс Хопфа. Обсудим полученные результаты.

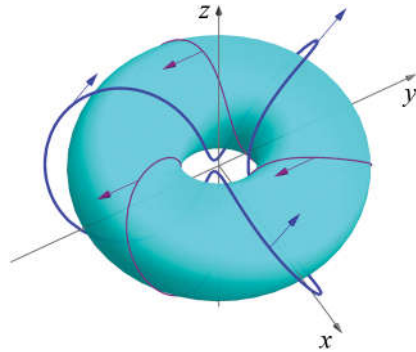
Распределение поля \mathbf{n} для динамического хопфиона с $H = 3$ представлено на рис. 6.22. Соответствующая конфигурация поля намагниченности в трехмерном пространстве проиллюстрирована на рис. 6.23. Торообразной поверхности соответствует значение $\Theta = \pi/2$. На рис. 6.24 изображены две кривые (прообразы двух точек с $\Theta = \pi/2$) для разных поворотов системы координат. Видно, что коэффициент их зацепления равен трем.



Как следует из формулы (6.3.32), одному значению H могут соответствовать различные комбинации целочисленной пары (Q, T) . При этом хопфионы с одинаковым индексом H могут качественно различаться по структуре.

Рис. 6.22. Векторное поле \mathbf{n} в полуплоскости $r \geq 0$, соответствующее нестационарному хопфиону с $H = 3$ ($Q = 3, T = 1$), $\omega = 0.567\omega_0$, $V = 0.084V_0$

Рис. 6.23. Распределение намагниченности в динамическом хопфионе с $H = 3$ ($Q = 3, T = 1$), $\omega = 0.567\omega_0, V = 0.084V_0$. Здесь и на рис. 6.25 синей линией обозначен прообраз точки $(\Theta_1, \Phi_1) = (\pi/2, 3\pi/2)$ на сфере S^2 , красной – прообраз точки $(\Theta_2, \Phi_2) = (\pi/4, \pi/2)$



На рис. 6.25 показаны результаты численного счета комбинаций $(Q, T) = (1, 2)$ и $(Q, T) = (2, 1)$. Видно, что при обходе тороида вдоль образующей (малый контур), мы пересечем любую кривую-прообраз T раз, а при обходе тороида в перпендикулярной плоскости (большой контур) – Q раз. Это правило было отмечено в работе [54]. В известных нам случаях хопфионы с $T = 1$ обладают меньшей энергией.

Сначала обсудим структуру покоящихся хопфионов. На рис. 6.26 построены линии постоянного значения углов, параметризующих вектор \mathbf{n}^* , для хопфионов с индексом $H = 3$. Кривая $\Theta = \text{const}$ является сечением аксиально-симметричной торообразной поверхности плоскостью $\phi = \text{const}$. Точке пересечения ($r \approx 1.8l_0, z = 0$) линий $\phi = \text{const}$ соответствует «южный полюс» сферы ($\Theta = \pi$) – центр вихревого кольца.

На рис. 6.27 изображено распределение полярного угла в плоскости $z = 0$. Видно, что оно представляет собой локализованную область перемагничивания – магнитный солитон с $\Theta = \pi$ в центре солитона.

При удалении от плоскости $z = 0$ амплитуда солитона уменьшается и стремится к нулю при $z \rightarrow \pm\infty$ (рис. 6.28).

Как указано в работе [70], наиболее трудно проводить численные расчеты внутренней структуры солитона при меньших значениях H . Для $H = 3$ и $H = 4$ в этой работе осуществлена серия результативных вычислений на дискретной сетке размером 600×400 точек.

Для случая $H = 2$ приемлемый результат удалось получить лишь на сетке размером 1600×800 точек. Причина этого связана с интересной особенностью исследуемых объектов. Наиболее наглядно она проявляется при анализе нормированной плотности энергии

$\rho_E(r) = E^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} dz w_E$. На рис. 6.29 представлен график зависимости

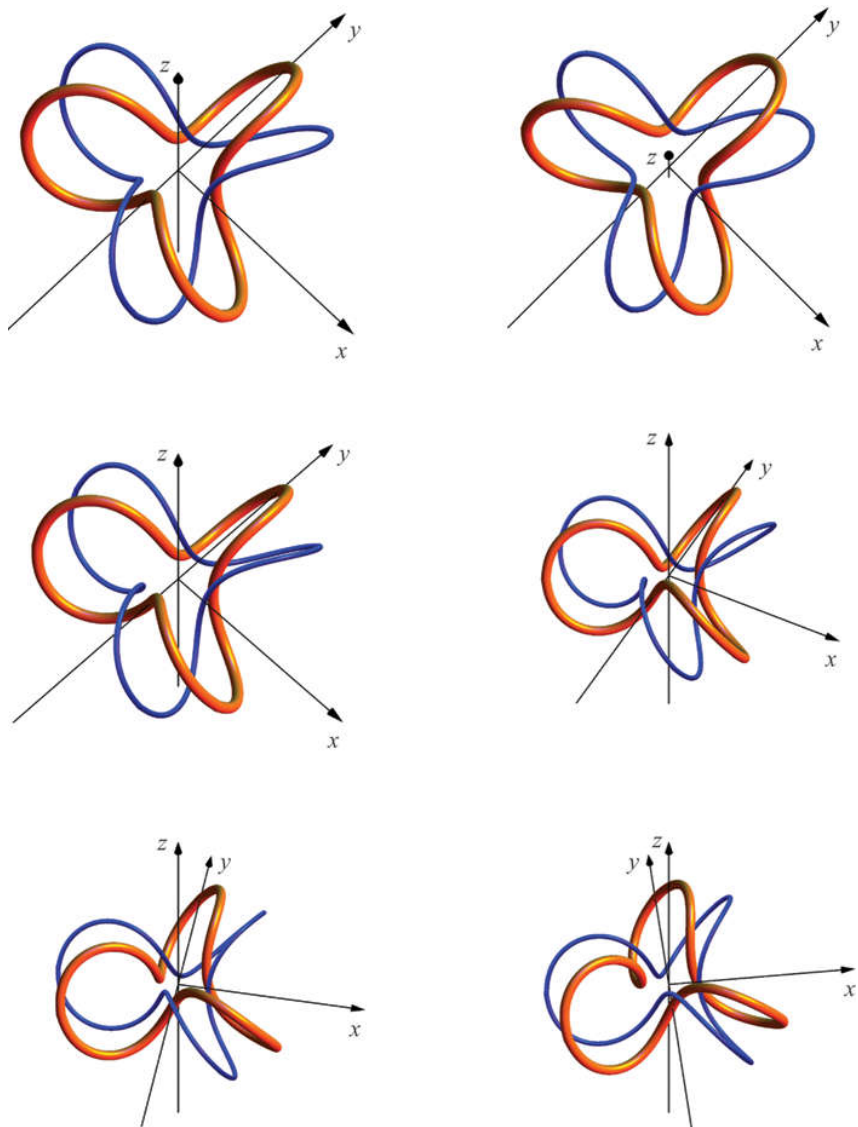


Рис. 6.24. Зацепление прообразов для разных поворотов системы координат

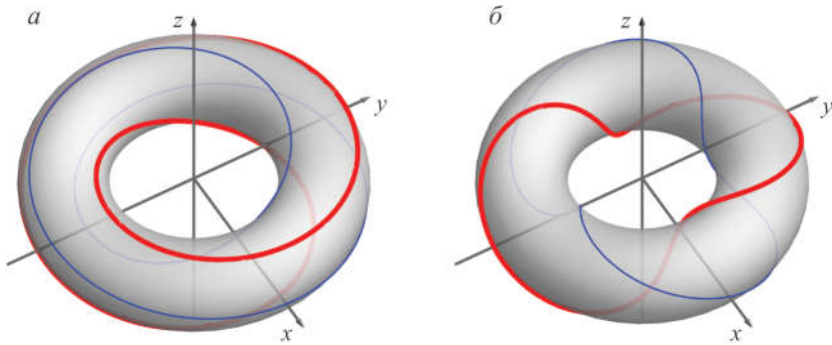


Рис. 6.25. Структура динамических хофионов с $H = 2$:
 $a - (Q, T) = (1, 2)$; $b - (Q, T) = (2, 1)$

ρ_E от r для разных значений H . Максимальные значения ρ_E находятся в окрестности $\Theta = \pi/2$. При уменьшении H область локализации, соответствующая первому максимуму $\rho_E(r)$ сужается и максимум увеличивается. Структура солитона становится более тонкой и для дискретизации необходимо использовать сетку с большим количеством узлов.

Интегрирование уравнений (6.3.39), (6.3.40) крайне затруднено, поэтому здесь приведем лишь анализ асимптотических решений. Поведение поля Θ при больших значениях $r^2 + z^2$ легко получить линеаризацией (6.3.39), (6.3.40) при $\Theta \ll 1$, $V = 0$. В этом пределе ограниченное решение уравнения

$$\frac{\Theta}{l_0^2} \left(\frac{\omega}{\omega_0} - 1 \right) + \Delta_2 \Theta = 0$$

имеет простой вид

$$\Theta = \frac{\text{const}}{R} \exp \left[-\sqrt{\left(1 - \frac{\omega}{\omega_0}\right)} \frac{R}{l_0} \right], \quad R = \sqrt{r^2 + z^2} > l_0. \quad (6.3.41)$$

Поэтому локализованный хофион с конечной энергией существует только при $\omega \leq \omega_0$. Увеличение частоты прецессии приводит к сжатию солитона (рис. 6.30).

На рис. 6.31 изображена зависимость приведенной энергии $\varepsilon = E/(\alpha M_0^2 l_0)$ от отношения ω/ω_0 . Энергия солитона уменьшается

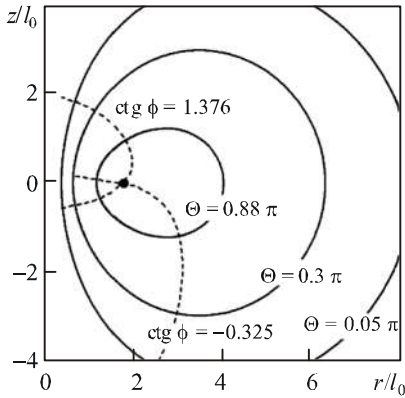


Рис. 6.26. Линии постоянного значения углов, параметризующих единичный вектор \mathbf{n}^* , для прецессионного хопфиона с индексом $H = 3$, $\omega = 0.567\omega_0$. Сплошная линия – $\Theta = \text{const}$, штриховая – $\text{ctg } \phi = \text{const}$

Рис. 6.27. Зависимость полярного угла от r при $z = 0$

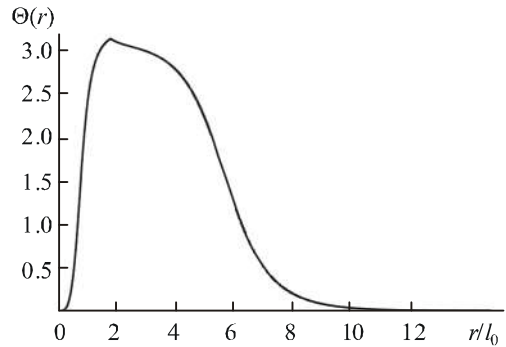


Рис. 6.28. Зависимость полярного угла от r при $z > 0$

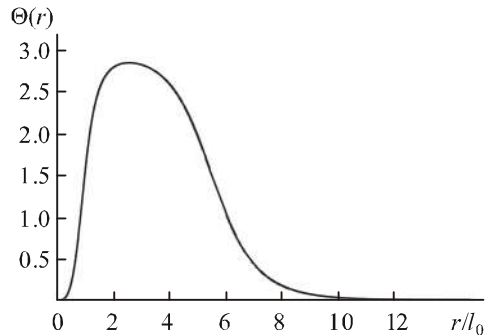


Рис. 6.29. Зависимость нормированной плотности энергии от расстояния для солитонов с одинаковой частотой прецессии при разных значениях H

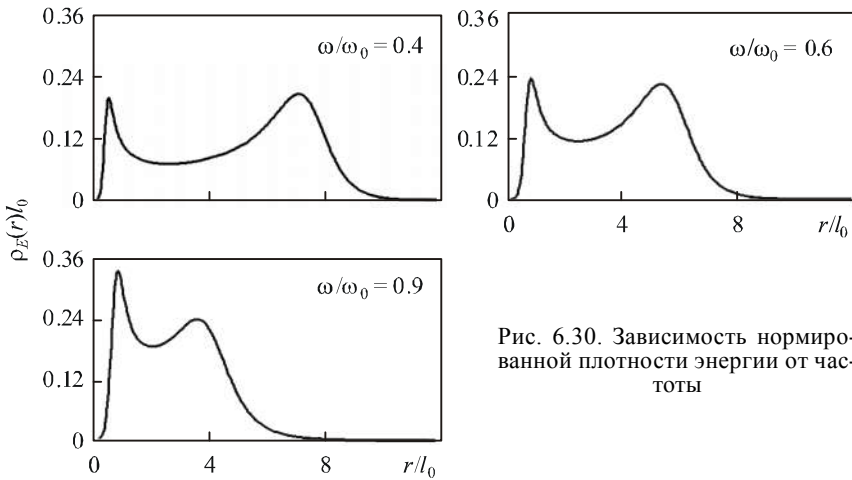
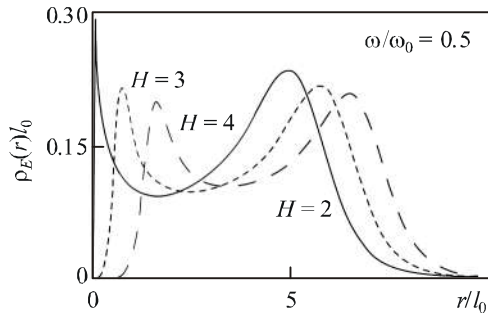
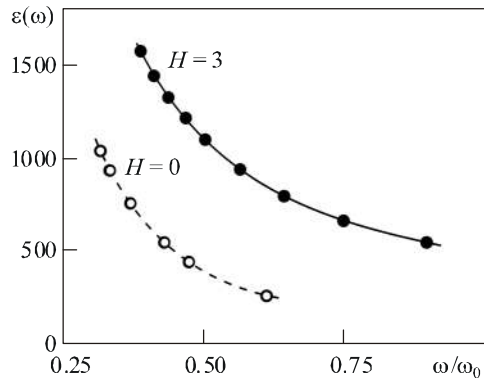


Рис. 6.30. Зависимость нормированной плотности энергии от частоты

Рис. 6.31. Зависимость приведенной энергии от частоты прецессии для нетопологического ($H=0$) и топологического ($H=3$) солитонов.

Точками обозначены результаты численного счета



с увеличением частоты прецессии. Для сравнения на рисунке приведена рассчитанная описанным методом подобная зависимость для «магнетонной капли» с $H = 0$.

Как видно из рис. 6.26, для стационарного прецессионного солитона при малых и умеренных значениях $r^2 + z^2$ линии постоянных значений Θ и ϕ почти ортогональны. Хотя дальнейшие аналитические вычисления не подтверждают условие ортогональности

$$\partial_r \Theta \partial_r \phi + \partial_r \phi \partial_z \Theta = 0 \quad (6.3.42)$$

во всем пространстве, численные расчеты показывают, что оно выполняется с точностью до 98%. Поэтому, используя формулу (6.3.42), можно в первом приближении найти структуру поля ϕ вблизи центра вихря. Действительно, при этом условии и $V = 0$ (6.3.40) переходит в уравнение Лапласа

$$\partial_r^2 \phi + \frac{1}{r} \partial_r \phi + \partial_z^2 \phi = 0. \quad (6.3.43)$$

Вихревая структура поля ϕ (вихревое кольцо) характеризуется условием

$$\oint_{\Gamma} (\partial_r \phi dr + \partial_z \phi dz) = 2\pi T, \quad \partial_r \phi \rightarrow 0, \quad \partial_z \phi \rightarrow 0 \quad (r^2 + z^2 \rightarrow \infty), \quad (6.3.44)$$

где Γ – произвольный контур, окружающий центр вихря («южный полюс») в точке $r = a, z = 0$. С помощью формулы Грина условие (6.3.44) записывается в виде некоммутативности частных производных от вихревого поля ϕ :

$$\partial_z \partial_r \phi - \partial_r \partial_z \phi = \Delta(r, z). \quad (6.3.45)$$

Здесь введено обозначение $\Delta(r, z) = 2\pi T \delta(r - a) \delta(z)$. Для решения задачи (6.3.43), (6.3.45) достаточно найти явный вид частных производных $\partial_r \phi$, $\partial_z \phi$, которые обозначим как новые поля $\partial_r \phi = \varphi_1$, $\partial_z \phi = \varphi_2$. Тогда, дифференцируя уравнение

$$\partial_r \varphi_2 - \partial_z \varphi_1 = -\Delta(r, z)$$

по переменной r и складывая его с выражением (6.3.43), продифференцированным по z , с учетом равенства $\partial_r \partial_z \varphi_1 = \partial_z \partial_r \varphi_1$ получаем замкнутое уравнение для расчета φ_2 :

$$\partial_r^2 \varphi_2 + \partial_z^2 \varphi_2 + \frac{1}{r} \partial_r \varphi_2 = -\partial_r \Delta - \frac{1}{r} \Delta. \quad (6.3.46)$$

Уравнение

$$\partial_r^2 \varphi_1 + \partial_z^2 \varphi_1 + \partial_r \left(\frac{1}{r} \varphi_1 \right) = \partial_z \Delta \quad (6.3.47)$$

можно получить аналогичным способом. Решение линейного неоднородного уравнения (6.3.46) имеет вид

$$\varphi_2(r, z) = \int_0^\infty dr' \int_{-\infty}^\infty dz' G_2(r, r', z, z') \left(\partial_{r'} \Delta(r', z')_{,r'} + \frac{1}{r'} \Delta(r', z') \right), \quad (6.3.48)$$

где функция Грина $G(r, r', z, z')$ подчиняется уравнению

$$\partial_r^2 G_2 + \frac{1}{r} \partial_r G_2 + \partial_z^2 G_2 = \delta(r - r') \delta(z - z'). \quad (6.3.49)$$

Ее явный вид находится с помощью представления в виде

$$G_2(r, r', z, z') = \frac{1}{2\pi} \iint J_0(k_2 r) C(k_1, k_2, r') e^{ik_1(z-z')} dk_1 dk_2 \quad (6.3.50)$$

и выражения правой части формулы (6.3.49) через функции Бесселя J_0 первого рода нулевого порядка:

$$\delta(r - r') \delta(z - z') = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty r' J_0(k_2 r') J_0(k_2 r) k_2 dk_2 \int_{-\infty}^\infty e^{ik_1(z-z')} dk_1.$$

Тогда

$$C(k_1, k_2, r') = -\frac{r' k_2}{k_1^2 + k_2^2} J_0(k_2 r'),$$

и интеграл в (6.3.50) вычисляется с помощью теоремы о вычетах и табличной формулы:

$$\int_0^\infty e^{-px} J_0(bx) J_0(cx) dx = \frac{k}{\pi \sqrt{bc}} K(k),$$

где $k = 2\sqrt{bc} / \sqrt{p^2 + (b+c)^2}$. В результате функция Грина выражается через полный эллиптический интеграл первого рода $K(k)$:

$$G_2(r, r', z, z') = -\frac{r'}{\pi\sqrt{(z-z')^2 + (r+r')^2}} K(k) \quad (6.3.51)$$

с модулем

$$k = \frac{2\sqrt{rr'}}{\sqrt{(z-z')^2 + (r+r')^2}}, \quad (6.3.52)$$

зависящим от координат r, z, r', z' . Нетрудно убедиться, что величина k меняется от нуля (при $r \rightarrow 0$) до единицы (при $r' \rightarrow r, z' \rightarrow z$). Из-за сингулярного поведения полного эллиптического интеграла первого рода при $k \rightarrow 1$:

$$K(k) \approx \ln \frac{4}{\sqrt{1-k^2}}$$

выражение (6.3.51) при $r' \rightarrow r, z' \rightarrow z$ имеет характерную логарифмическую особенность. В конечном счете из формулы (6.3.48) следует явное выражение для $\partial_z \phi$:

$$\begin{aligned} \partial_z \phi &= \left(+\partial_{r'} G_2(r, r', z, z') - \frac{1}{r'} G_2(r, r', z, z') \right) (r' = a, z' = 0) = \\ &= +\frac{T}{\sqrt{(a+r)^2 + z^2}} \left[\frac{a^2 - r^2 - z^2}{(a-r)^2 + z^2} E(\kappa) + K(\kappa) \right] \end{aligned} \quad (6.3.53)$$

через полные эллиптические интегралы первого $K(\kappa)$ и второго рода $E(\kappa)$ с модулем

$$\kappa = \frac{2\sqrt{ra}}{\sqrt{(a+r)^2 + z^2}}. \quad (6.3.54)$$

Подобным образом с помощью функции Грина

$$G_1(r, r', z, z') = -\frac{r'}{2\pi k \sqrt{r'r}} \left[(2-k^2)K(k) - 2E(k) \right],$$

где k определяется формулой (6.3.52), из уравнения (6.3.47) можно найти $\partial_r \phi$:

$$\partial_r \phi = + \frac{Tz}{r\sqrt{(a+r)^2 + z^2}} \left[\frac{a^2 + r^2 + z^2}{(a-r)^2 + z^2} E(\kappa) - K(\kappa) \right],$$

$$\kappa = \frac{2\sqrt{ra}}{\sqrt{(a+r)^2 + z^2}}. \quad (6.3.55)$$

Соотношения (6.3.53), (6.3.55) конкретизируют вихревую структуру поля ϕ при $r \rightarrow a$, $z \rightarrow 0$:

$$\phi(r, z) = -T \arctg \left[(r-a)/z \right]. \quad (6.3.56)$$

Обсудим далее структуру движущегося солитона. На рис. 6.32 изображены линии постоянного значения углов Θ , ϕ . Видно, что радиус центрального вихревого кольца, соответствующего значению $\Theta = \pi$ («южному полюсу» сферы S^2), у движущегося солитона больше, чем у покоящегося. Поэтому область локализации движущегося солитона несколько больше – хопфион уширяется. Как и в стационарном случае, асимптотическое поведение решения в пределе $r^2 + z^2 \gg l_0$ можно определить линеаризацией уравнения (6.3.40) при $\Theta \ll 1$. Тогда

$$r \left(\frac{V}{V_0 l_0} + 2\partial_z \phi \right) \partial_z \Theta + 2r\partial_r \phi \partial_r \Theta + \Theta \left(r\partial_z^2 \phi + r\partial_r^2 \phi + \partial_r \phi \right) = 0,$$

и в первом порядке поле ϕ имеет геликоидальную структуру

$$\phi = -\frac{V}{2V_0 l_0} z, \quad (6.3.57)$$

которая подтверждается численными расчетами. Из линеаризации уравнения (6.3.39) при $\Theta \ll 1$ и (6.3.57) сразу следует асимптотическое поведение полярного угла:

$$\Theta = \frac{\text{const}}{R} \exp \left[-\frac{R}{l_0} \sqrt{1 - \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{V^2}{4V_0^2}} \right], \quad R = \sqrt{r^2 + z^2} \gg l_0. \quad (6.3.58)$$

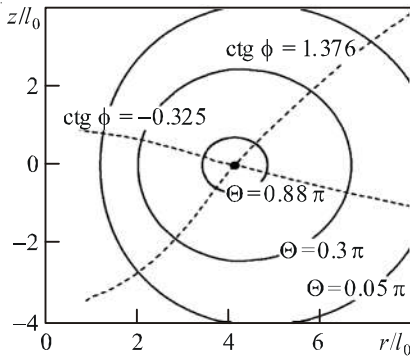


Рис. 6.32. Линии постоянного значения углов, параметризующих единичный вектор \mathbf{n} , для равномерно движущегося со скоростью $V = 0.134V_0$ хопффона с индексом $H = 3$, $\omega = 0.567\omega_0$. Сплошная линия – $\Theta = \text{const}$, штриховая – $\text{ctg } \phi = \text{const}$

Рис. 6.33. Зависимость приведенной энергии от скорости для «магнойной капли» ($H = 0$) и топологических ($H = 1, 2, 3$) солитонов при одинаковой частоте прецессии $\omega = 0.567\omega_0$. Точками обозначены результаты численного счета

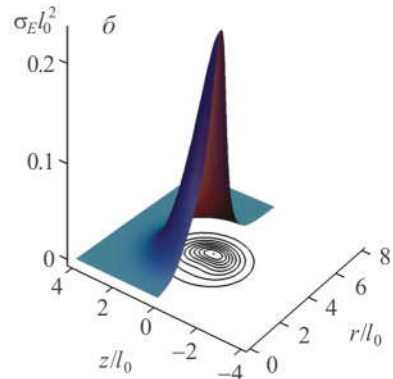
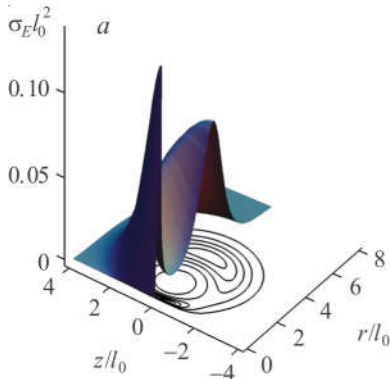
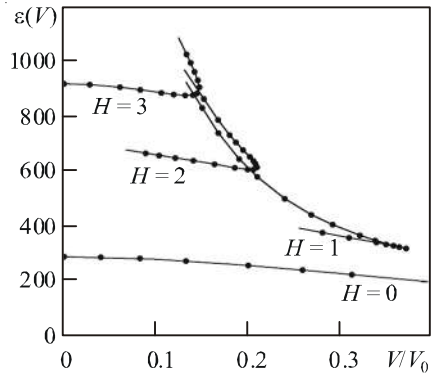


Рис. 6.34. Зависимость безразмерной плотности энергии от координат для хопффионов нижней (а) и верхней (б) энергетических ветвей при $H = 1$, $\omega = 0.567\omega_0$, $V = 0.314V_0$

Скорость хопфионов ограничена тем же условием

$$\frac{\omega}{\omega_0} + \frac{V^2}{4V_0^2} < 1,$$

что и для одномерных динамических солитонов в одноосных ферромагнетиках [60].

На рис. 6.33 изображена зависимость приведенной энергии от отношения V/V_0 . График отражает важное свойство – существование двух типов движущихся устойчивых хопфионов (по крайней мере в некотором интервале скоростей) с равными H , V и ω . Характерным их свойством является различие в локализации энергии.

Определим безразмерную плотность энергии $\sigma_E l_0^2$ (см. (6.3.33)). Для хопфионов нижней энергетической ветки с малыми скоростями характерна высокая безразмерная плотность энергии вдоль стенки тороидальной поверхности (рис. 6.34, *a*), а для хопфионов верхней ветки — плотность энергии возрастает от стенки к центру тороида (рис. 6.34, *б*).

Найденные локализованные структуры с характерными размерами от единиц до десятков l_0 существенно меньше характерных размеров ЦМД. Хопфионы могут найти применение в принципиально новых устройствах записи и хранения информации, в которых биты информации размещены не на планарных структурах, а во всем объеме.

В заключение напомним (см. п. 1.2.1 и 1.2.2), что статические локализованные трехмерные распределения намагниченности могут существовать в несоизмеримых ферромагнетиках. Предварительные результаты по структурам неподвижных хопфионов с конечной энергией в одноосном ферромагнетике во внешнем магнитном поле с учетом взаимодействия Дзялошинского – Мория $E_1 = D(\mathbf{n} \cdot \text{rot } \mathbf{n})$ получены в работе [73].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

К главе 1

1. *Косевич А.М., Иванов Б.А., Ковалев А.С.* Нелинейные волны намагниченности. Динамические и топологические солитоны. Киев: Наук. думка, 1983. 192 с.
2. *Gouvea S.E., Wysin G.S., Mertens F.G., Bishop A.R.* Vortices in the classical two dimensional Heisenberg Model // *Phys. Rev. B*, 1989. V. 39, No. 16. P. 11840–11849.
3. *Иванов Б.А., Колежук А.К.* Солитоны в низкоразмерных антиферромагнетиках (обзор) // *ФНТ*, 1995. Т. 21, № 4. С. 355–389.
4. *Nonlinearity in condensed matter* / Ed. by A.R. Bishop, R. Ecke, S. Gubernatis. Berlin: Springer, 1993. 276 p.
5. *Nonlinear coherent structures in physics and biology* / Ed. by K.H. Spatchek, F.G. Mertens. N. Y.: Plenum, 1994. 484 p.
6. *Kosterlitz J.M., Thouless D.J.* Ordering, metastability and phase transitions in two dimensional systems // *J. Phys. C: Solid State Phys.*, 1973. V. 6. P. 1181–1203.
7. *Kosterlitz J.M.* The critical properties of the two dimensional XY-model // *J. Phys. C: Solid State Phys.*, 1974. V. 7. P. 1046–1060.
8. *Fluctuation phenomena: Disorder and nonlinearity* / Ed. by A.R. Bishop, S. Jimenez, L. Vazquez. Singapore: World Scientific, 1995. 244 p.
9. *Кандаурова Г.С., Свицерский А.Э.* Наблюдение автоволнового состояния и устойчивых динамических структур в многодоменных магнитных пленках // *Письма в ЖТФ*, 1988. Т. 14, № 9. С. 777–780.
10. *Кандаурова Г.С., Свицерский А.Э.* Возбужденное состояние и спиральная динамическая доменная структура в магнетиках // *Письма в ЖЭТФ*, 1988. Т. 47, № 8. С. 410–419.
11. *Кандаурова Г.С., Свицерский А.Э.* Процессы самоорганизации в многодоменных магнитных средах и формирование устойчивых динамических структур // *ЖЭТФ*, 1990. Т. 97, № 4. С. 1218–1229.
12. *Кандаурова Г.С.* Новые явления в низкочастотной динамике коллектива магнитных доменов // *УФН*, 2002. Т. 172, № 10. С. 1165–1187.
13. *Лисовский Ф.В., Мансветова Е.Г.* Спиральные домены в магнитных пленках // *ФТТ*, 1989. Т. 31, вып. 5. С. 273–275.
14. *Дикштейн И.Е., Лисовский Ф.В., Мансветова Е.Г., Чижиж Е.С.* Формирование рефлексивных доменных структур при монополярном и циклическом намагничивании одноосных магнитных пленок // *ЖЭТФ*, 1991. Т. 100, № 5. С. 1606–1626.
15. *Лоскутов А.Ю., Михайлов А.С.* Введение в синергетику. М: Наука, 1990. 272 с.
16. *Gross M.C., Honenbergh H.C.* Pattern formation outside of equilibrium // *Rev. Mod. Phys.*, 1993. V. 65, No. 3. P. 851–1112.
17. *Pismen L.M.* Vortices in nonlinear fields. From liquid crystals to superfluids, from non equilibrium patterns to cosmic strings. Oxford: Clarendon Press, 1999. 312 p.
18. *Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П.* Статистическая физика. Ч. 2. М.: Наука, 1978. 448 с.

19. *Абрикосов А.А.* Основы теории металлов. М.: Наука, 1987. 520 с.
20. *Hagan P.S.* Spiral waves in reaction diffusion equations // *SIAM. J. Appl. Math.*, 1982. V. 42, No. 4. P. 762–786.
21. *Aranson I.S., Kramer L.* The complex Ginzburg – Landau equation // *Rev. Mod. Phys.*, 2002. V. 74, No. 1. P. 99–143.
22. *Борисов А.Б., Фейгин В.А., Филиппов Б.Н.* Спиральные солитоны в магнетиках // *ФТТ*, 1989. Т. 31, No. 5. С. 273–275.
23. *Борисов А.Б., Ялышев Ю.И.* Магнитостатическая устойчивость спирального домена // *ФММ*, 1995. Т. 79, No. 5. С. 18–31.
24. *Михайлов А.В., Яремчук А.И.* Аксиально симметричные решения двумерной модели Гейзенберга // *Письма в ЖЭТФ*, 1982. Т. 36, No. 3. С. 75–77.
25. *Борисов А.Б., Киселев В.В.* Нелинейные волны, солитоны и локализованные структуры в магнетиках. Т. 1. Квазидвумерные магнитные солитоны. Екатеринбург: УрО РАН, 2009. 511 с.
26. *Mikhailov A.V., Yaremchuk A.I.* Cylindrically symmetric solutions of the nonlinear chiral field model (σ -model) // *Nucl. Phys. B*, 1982. V. 202. P. 508–522.
27. *Барьяхтар И.В., Иванов Б.А.* Нелинейные волны намагниченности антиферромагнетиков // *ФНТ*, 1979. Т. 5, №. 7. С. 759–770.
28. *Бурцев С.П., Захаров В.Е., Михайлов А.В.* Метод обратной задачи с переменным спектральным параметром // *ТМФ*, 1987. Т. 70, № 3. С. 323–341.
29. *Захаров В.Е., Михайлов А.В.* Релятивистски-инвариантные двумерные модели теории поля, интегрируемые методом обратной задачи // *ЖЭТФ*, 1978. Т. 74, № 6. С. 1953–1973.
30. *Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П.* Теория солитонов: Метод обратной задачи. М.: Наука, 1980. 320 с.
31. *Де Жен П.* Физика жидких кристаллов. М: Мир. 1977. 400 с. (*De Gennes P.G.* The physics of liquid crystals. Oxford: Clarendon Press, 1974).
32. *Гутишабаи Е.Ш., Липовский В.Д.* Граничная задача для двумерного стационарного магнетика Гейзенберга с нетривиальным фоном. I // *ТМФ*, 1992. Т. 90, № 2. С. 259–272.
33. *Варзугин Г.Г., Гутишабаи Е.Ш., Липовский В.Д.* Граничная задача для двумерного стационарного магнетика Гейзенберга с нетривиальным фоном. II // *ТМФ*, 1995. Т. 104, № 3. С. 513–528.
34. *Гутишабаи Е.Ш., Липовский В.Д., Никуличев С.С.* Нелинейная сигма-модель в искривленном пространстве, калибровочная эквивалентность и точные решения $(2+0)$ -мерных интегрируемых уравнений // *ТМФ*, 1998. Т. 115, № 3. С. 323–348.
35. *Гутишабаи Е.Ш.* Спирально-логарифмические структуры в модели ферромагнетика Гейзенберга // *Письма в ЖЭТФ*, 2001. Т. 73, № 6. С. 317–319.
36. *Гутишабаи Е.Ш.* Обобщенное преобразование Дарбу в модели магнетика Иши-мори на фоне спиральных структур // *Письма в ЖЭТФ*, 2003. Т. 78, № 11. С. 1257–1262.
37. *Gutshabash E.Sh.* Some remarks on Ishimori's magnet model // *J. Math. Sci.*, 2005. V. 125, No. 2. P. 185–192.
38. *Derrick G.H.* Comments on nonlinear wave equations as models for elementary particles // *J. Math. Phys.*, 1964. V. 5, No. 9. P. 1252–1254.
39. *Ахуезер А.И., Барьяхтар В.Г., Пелетминский С.В.* Спиновые волны. М.: Наука, 1967. 368 с.
40. *Браун У.Ф.* Микромагнетизм. М.: Наука, 1979. 160 с. (*Braun W.F.* Micromagnetics. N. J.; L.: Interscience Publ. J. Wiley and sons).

41. *Барьяхтар В.Г., Горобец Ю.И.* Цилиндрические магнитные домены и их решетки. Киев: Наук. думка, 1988. 168 с.
42. *Дзялошинский И.Е.* Теория геликоидальных структур в антиферромагнетиках. III // ЖЭТФ, 1964. Т. 47, вып. 3. С. 992–1003.
43. *Изюмов Ю.А.* Модулированные или длиннопериодические магнитные структуры кристаллов // УФН, 1984. Т. 144, № 3. С. 430–470.
44. *Изюмов Ю.А.* Дифракция нейтронов на длиннопериодических структурах. М.: Энергоатомиздат, 1987. 199 с.
45. *Ivanov B.A., Stephanovich V.A., Zhmudskii A.A.* Magnetic vortices – the microscopic analogs of magnetic bubbles // JMMM, 1990. V. 88. P. 116–120.
46. *Богданов А.Н., Яблонский Д.А.* Термодинамические устойчивые «вихри» в магнитоупорядоченных кристаллах. Смешанное состояние магнетиков // ЖЭТФ, 1989. Т. 95, № 1. С. 178–182.
47. *Богданов А.Н., Кудинов М.В., Яблонский Д.А.* К теории магнитных вихрей в легкоосных ферромагнетиках // ФТТ, 1989. Т. 31. С. 99–104.
48. *Vogdanov A.N., Hubert A.* Thermodynamically stable magnetic vortex states in magnetic crystals // JMMM, 1994. V. 138, No. 3. P. 255–269.
49. *Богданов А.Н.* Новые локализованные решения нелинейных полевых уравнений // Письма в ЖЭТФ, 1995. Т. 62, вып. 3. С. 231–235.
50. *Papanicolaou N., Tomaras T.N.* Dynamics of magnetic vortices // Nucl. Phys. B, 1991. V. 360. P. 425–462.
51. *Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т.* Современная геометрия. М: Наука, 1979. 760 с.
52. *Белавин А.А., Поляков А.М.* Метастабильные состояния двумерного изотропного ферромагнетика // Письма в ЖЭТФ, 1975. Т. 22, № 10. С. 500–506.
53. *Хирт Дж., Лоте И.* Теория дислокаций. М.: Атомиздат, 1972. 600 с. (*Hirth J.P., Lote J.* Theory of dislocations. New York; St. Louis; San Francisco; Toronto; London; Sydney).
54. *Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В.* Введение в теорию квантовых полей. М.: Наука, 1973. 416 с.
55. *Медведев Б.В.* Начала теоретической физики. М.: Наука, 1977. 496 с.
56. *Thiele A.A.* Steady state motion of magnetic domains // Phys. Rev. Lett., 1973. V. 30, No. 6. P. 230–233.
57. *Thiele A.A.* Applications of the gyro coupling vector and dissipation dyadic in the dynamics of magnetic domains // J. Appl. Phys., 1974. V. 45, No. 1. P. 377–393.
58. *Воловик Г.Е., Минеев В.П.* Исследование особенностей в сверхтекучем ^3He и жидких кристаллах методами гомотопической топологии // ЖЭТФ, 1977. Т. 72, № 6. С. 2256–2244.
59. *Mermin M.D.* The topological theory of defects in ordered media // Rev. Mod. Phys., 1979. V. 51, No. 3. P. 591–648.
60. *Trebin H.R.* The topology of non uniform media in condensed matter physics // Adv. Phys., 1982. V. 31, No. 3. P. 195–254.
61. *Болтянский В.Г., Ефремович В.А.* Наглядная топология. М.: Наука, 1982. 148 с.
62. *Michel L.* Symmetry defects and broken symmetry. Configuration. Hidden symmetry // Rev. Mod. Phys., 1980. V. 52, No. 3. P. 617–653.
63. *Шварц А.С.* Квантовая теория поля. М.: Наука, 1989. 400 с.
64. *Монастырский М.И.* Топология калибровочных полей и конденсированных сред. М.: ПАИМС, 1995. 478 с.

65. Туров Е.А. Физические свойства магнитоупорядоченных кристаллов. М.: Изд-во АН СССР, 1963. 224 с. (*Turov E.A. Physical properties of magnetically ordered crystals. N. Y.; L.: Acad. Press, 1965. 222 p.*)
66. Дзялошинский И.Е. Домены и дисклинации в антиферромагнетиках // Письма в ЖЭТФ, 1977. Т. 25, вып. 2. С. 110–113.
67. Ковалев А.С., Косевич А.М. Дислокации и домены в антиферромагнетиках // ФНТ, 1977. Т. 3, № 2. С. 259–260.
68. Барьяхтар И.В., Иванов Б.А. О нелинейных волнах намагниченности антиферромагнетика. Препринт № 80-4 ДонФТИ АН УССР. Донецк, 1980. 61 с.
69. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 733 с.
70. Kleiber M., Bode M., Ravlić R., Wiesendanger R. Topology induced spin frustrations at the Cr (001) surface studied by spin-polarized scanning tunneling spectroscopy // Phys. Rev. Lett., 2000. V. 85, No. 21. P. 4606–4609.
71. Borisov A.B., Kiseliev T.T. Two dimensional solutions of the Landau – Lifshitz equation // Phys. Lett. A. 1985. V. 107, No. 4. P. 161–163.
72. Борисов А.Б., Киселев В.В., Талуц Г.Г. Дисклинации в изотропном антиферромагнетике // Исследования по физике кинетических явлений. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1984. С. 118–126.
73. Mikhailov A.V. Integrable magnetic models // Solitons / Ed. by S.E. Trullinger, V.E. Zakharov, V.L. Pokrovsky. Amsterdam: Elsevier Science Publishers B.V., 1986. P. 625–690.
74. Papanicolaou N. Duality rotation for 2D classical ferromagnets // Phys. Lett. A, 1985. V. 84, No. 3. P. 151–154.
75. Borisov A.B., Kiseliev V.V., Taluts G.G. Solitons in a ferrimagnet // Sol. St. Comm., 1982. V. 44, No. 3. P. 441–442.
76. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. М.: Наука, 1981. 800 с.
77. Лаврентьев М.А., Шабат Б.А. Проблемы гидродинамики и их математические модели. М.: Наука, 1973. 417 с.
78. Борисов А.Б. Спиральные вихри в ферромагнетиках // Докл. РАН, 2001. Т. 379, № 3. С. 319–321.
79. Борисов А.Б. Спиральные вихри в ферромагнетиках // Письма в ЖЭТФ, 2001. Т. 75, № 5. С. 242–245.
80. Биркгоф Г. Гидродинамика. М.: ИЛ, 1954. 180 с.
81. Сонин С.А. Введение в физику жидких кристаллов. М: Наука, 1983. 320 с.
82. Борисов А.Б., Зыков С.А., Микушина Н.А., Москвин А.С. Вихри и магнитные структуры типа «мишени» в двумерном ферромагнетике с анизотропным обменным взаимодействием // ФТТ, 2002. Т. 44, № 3. С. 312–320.
83. Цвелик А.М. Квантовая теория поля в физике конденсированного состояния. М.: Физматлит, 2002. 320 с.
84. Bostrem I.G., Ovchinnikov A.S. A new class of nodal stationary states in 2D Heisenberg ferromagnet // Письма в ЖЭТФ, 2002. Т. 76, №. 12. С. 846–849.
85. Egorov R.F., Bostrem I.G., Ovchinnikov A.S. The variational symmetries and conservation laws in classical theory of Heisenberg (anti)ferromagnet // Phys. Lett. A, 2002. V. 292, No. 6. P. 325–334.
86. Borisov A.B., Bostrem I.G., Ovchinnikov A.S. Spiral vortex in a two dimensional ferromagnet // Phys. Rev. B, 2005. V. 72. P. 134423 (1–15).
87. Борисов А.Б., Бострем И.Г., Овчинников А.С. Стабильные нелинейные возбуждения типа спиралей в двумерных магнитных системах // Письма в ЖЭТФ, 2004. Т. 80, № 2. С. 112–117.

88. *Shinjo T., Okuno T., Hassdorf R. et al.* Magnetic vortex core observation in circular dots of permalloy // *Science*, 2000. V. 289, No. 5481. P. 930–931.
89. *Xiaobin Zhu, Grütter P., Metlushko V., Ilic B.* Magnetic force microscopy study of electron-beam-patterned soft permalloy particles: Technique and magnetization behavior // *Phys. Rev. B*, 2002. V. 66, No. 2. P. 024423 (1–7).
90. *Höllinger R., Killinger A., Krey U.* Statics and fast dynamics of nanomagnets with vortex structure // *JMMM*, 2003. V. 261. P. 178–189.

К главе 2

1. *Kleman M.* Points, lines and walls in liquid crystals, magnetic systems and various ordered media. Chichester; New York; Brisbane; Toronto: J Wiley and sons Ltd., 1983. 322 p.
2. *Юрченко С.Е.* Магнитные запоминающие устройства большой емкости на вертикальных блоховских линиях // *Микроэлектроника*, 1986. Т. 15, № 1. С. 3–15.
3. *Kryder M.H., Gallagher T.J., Scranton R.A.* Neel walls and line transition in a (100) garnet film // *J. Appl. Phys.*, 1982. V. 53, No. 8. P. 5810–5814.
4. *Туров Е.А.* Физические свойства магнитоупорядоченных кристаллов. М.: Изд-во АН СССР, 1963. 224 с. (*Turov E.A.* Physical properties of magnetically ordered crystals. N. Y.; L.: Acad. Press, 1965. 222 p.)
5. *Борисов А.Б., Киселев В.В.* Нелинейные волны, солитоны и локализованные структуры в магнетиках. Т. 1. Квазиодномерные магнитные солитоны. Екатеринбург: УрО РАН, 2009. 511 с.
6. *Малоземов А., Слонзуски Дж.* Доменные стенки в материалах с цилиндрическими доменами. М.: Мир, 1982. 382 с.
7. *Суху Р.* Магнитные тонкие пленки. М.: Мир, 1967. 423 с.
8. *Звездин А.К.* О динамике доменных границ в слабых ферромагнетиках // *Письма в ЖЭТФ*, 1979. Т. 29, № 2. С. 605–610.
9. *Барьяхтар И.В., Иванов Б.А.* Нелинейные волны намагниченности антиферромагнетиков // *ФНТ*, 1979. Т. 5, вып. 7. С. 759–770.
10. *Барьяхтар И.В., Иванов Б.А.* О нелинейных волнах намагниченности антиферромагнетика. Препринт № 80-4 ДонФТИ АН УССР. Донецк, 1980. 61 с.
11. *Иванов Б.А.* Динамика доменных границ в ферромагнетиках. Препринт № 80/5 ИФМ УНЦ АН СССР. Свердловск, 1980. 25 с.
12. *Барьяхтар И.В., Иванов Б.А., Сукстанский А.Л.* Нелинейные волны и динамика доменных границ в слабых ферромагнетиках // *ЖЭТФ*, 1980. Т. 78, № 4. С. 1509–1522.
13. *Березинский В.Л.* Разрушение дальнего порядка в одномерных и двумерных системах с непрерывной группой симметрии. I. Классические системы // *ЖЭТФ*, 1970. Т. 59, № 3. С. 907–920.
14. *Kosterlitz J.M., Thouless D.J.* Ordering, metastability and phase transitions in two-dimensional systems // *J. Phys. C: Sol. St. Phys.*, 1973. V. 6. P. 1181–1203.
15. *Kosterlitz J.M.* The critical properties of the two-dimensional XY-model // *J. Phys. C: Sol. St. Phys.*, 1974. V. 7. P. 1046–1060.
16. *Pokrovsky V.L., Talapov A.L.* Theory of incommensurate crystals. Hardwood etc.: Acad. Publ., 1984. 161 p.
17. *Bak P.* Commensurate phases, incommensurate phases and the devil's staircase // *Rep. Prog. Phys.*, 1982. V. 45. P. 587–629.

18. Люксютов И.Ф., Наумовец А.Г., Покровский В.Л. Двумерные кристаллы. Киев: Наук. думка, 1988. 220 с.
19. Изюмов Ю.А. Дифракция нейтронов на длиннопериодических структурах. М.: Энергоатомиздат, 1987. 199 с.
20. Janovec V. Linear defects in incommensurate phases // Phys. Lett. A, 1983. V. 99, No. 8. P. 384–386.
21. Барьяхтар В.Г., Леонов И.А., Соболев В.Л., Суслин Л.А. Геометрическая классификация линейных магнитных дефектов в одноосных ферромагнетиках. Препринт № 86–86 РИТФ. Киев, 1986. 33 с.
22. Барьяхтар В.Г., Коротенко Е.Б., Яблонский Д.А. Магнитная симметрия доменных границ с блоховскими линиями в ферромагнетиках и ферритах // ЖЭТФ, 1986. Т. 91, № 3. С. 921–933.
23. Марченко В.А. Операторы Штурма – Лиувилля и их приложения. Киев: Наук. думка, 1978. 331 с.
24. Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П. Теория солитонов: Метод обратной задачи. М.: Наука, 1980. 320 с.
25. Тахтаджян Л.А., Фаддеев Л.Д. Гамильтонов подход в теории солитонов. М.: Наука, 1986. 528 с.
26. Абловиц М., Сегур Х. Солитоны и метод обратной задачи рассеяния. М.: Мир, 1987. 444 с. (Ablowitz M., Segur H. Solitons and the inverse scattering transform. Philadelphia: SIAM, 1981).
27. Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х. Солитоны и нелинейные волновые уравнения. М.: Мир, 1988. 694 с. (Dodd R.K., Eilbeck J.C., Gibbon J.D., Morris H.C. Solitons and nonlinear wave equation. London; Orlando; San Diego; New York; Toronto; Montreal; Sydney; Tokio: Acad. Press).
28. Ньюэлл А. Солитоны в математике и физике. М.: Мир, 1989. 324 с.
29. Hirota R. Bilinearization of soliton equation // J. Phys. Soc. Jpn, 1982. V. 51, No. 1. P. 323–331.
30. Хирота Р. Прямые методы в теории солитонов // Солитоны / Под ред. Р. Буллафа, Ф. Кодри. М.: Мир, 1983. С. 175–192.
31. Скотт Э. Нелинейная наука. Развитие и рождение когерентных структур. М.: Физматлит, 2007. 560 с. (Scott A. Nonlinear science. Emergence and dynamics of coherent structures. Oxford: University Press, 2003).
32. Matveev V.B. Kadomtsev – Petviashvili equation depending on functional parameters // Lett. Math. Phys., 1979. V. 3. P. 213–218.
33. Matveev V.B., Salle M.A. Darboux transformations and solitons. Springer series in nonlinear dynamics. Berlin: Springer Verlag, 1991. 120 p.
34. Калоджеро Ф., Дегасперис А. Спектральные преобразования и солитоны. Методы решения и исследования нелинейных эволюционных уравнений. М.: Мир, 1985. 472 с. (Calogero F., Degasperis A. Spectral transform and solitons. Tools to solve and investigate nonlinear evolution equations. North Holland Publ. company, 1982).
35. Лэм Дж. Л. Введение в теорию солитонов. М.: Мир, 1983. 294 с. (Lamb G.L. Elements of soliton theory. New York; Chichester; Brisbane; Toronto: Interscience Publ. J. Wiley and sons).
36. Poppe C. Construction of solutions of the sine-Gordon equation by means of Fredholm determinants // Physica D, 1983. V. 9. P. 103–139.
37. Friiman N.C., Nimmo J.J.C. Soliton solutions of the Korteweg de Vries and Kadomtsev – Petviashvili equations: The Wronskian technique // Phys. Lett. A, 1985. V. 95. P. 1–3.

38. *Satsuma J., Kaup D.J.* A Bäcklund transformation for a higher order Korteweg de Vries equation // *J. Phys. Soc. Jpn*, 1977. V. 43. P. 692–697.
39. *Nakamura A.* Bäcklund transformation and conservative laws of the Benjamin – Ono equation // *J. Phys. Soc. Jpn*, 1979. V. 47. P. 1335–1340.
40. *Leibbrandt G.* Exact solutions of elliptic sine-Gordon equation in the two-dimensions with application to Josephson effect // *Phys. Rev. B*, 1977. V. 15, No. 7. P. 3353–3361.
41. *Borisov A.B., Tankeyev A.P., Shagalov A.G., Bezmaternih G.V.* Multi-vortex-like solutions of the sine-Gordon equation // *Phys. Lett. A*, 1985. V. 111, No. 1–2. P. 15–18.
42. *Борисов А.Б., Талуц Г.Г., Танкеев А.П., Безматерных Г.В.* Вихри и солитоны двумерного синус-Гордон уравнения. Современные проблемы теории магнетизма: Сб. науч. тр. Киев: Наук. думка, 1986. 168 с.
43. *Борисов А.Б., Танкеев А.П., Шагалов А.Г.* Вихри и двумерные солитоны в легкоплоскостных магнетиках // *ФММ*, 1985. Т. 60, № 3. С. 467–479.
44. *Борисов А.Б., Танкеев А.П., Шагалов А.Г.* Новые типы двумерных вихреподобных состояний в магнетиках // *ФТТ*, 1989. Т. 31, № 5. С. 140–147.
45. *Lamb G.L.Jr.* Analytical description of ultra short optical pulse propagation in a resonant medium // *Rev. Mod. Phys.*, 1971. V. 43, No. 2. P. 99–124.
46. *Borisov A.B., Kiseliev V.V.* Vortices in incommensurate structures // *Sol. St. Comm.*, 1986. V. 59, No. 7. P. 445–448.
47. *Борисов А.Б., Киселев В.В., Талуц Г.Г.* Дислокации в несоизмеримых структурах // *Вопросы теории дефектов в кристаллах / Под ред. С.В. Вонсовского, М.А. Кривоглаза. Л.: Наука, 1987. С. 58–67.*
48. *Borisov A.B., Kiseliev V.V.* Topological defects in incommensurate magnetic and crystal structures and quasi-periodic solutions of the elliptic sine-Gordon equation // *Physica D*, 1988. V. 31. P. 49–64.
49. *Borisov A.B., Kiseliev V.V., Talutz G.G.* Topological defects in incommensurate structures and quasi-periodic solutions of the elliptic sine-Gordon equation // *Proc. III Int. Workshop on Nonlinear and Turbulent Processes in Physic. Kiev: Nauk. dumka*, 1988. V. 1. P. 40–43.
50. *Ходенков Г.Е.* Некоторые точные многомерные решения уравнения Ландау – Лифшица в одноосном ферромагнетике // *ФММ*, 1982. Т. 54, вып. 4. С. 644–649.
51. *Takeno S.* Multi-(resonant-soliton)-solitons and vortex-like solutions to the two and three-dimensional sine-Gordon equations // *Progr. Theor. Phys.*, 1982. V. 68, No. 3. P. 992–999.
52. *Nakamura A.* Relation between certain quasivortex solutions and solitons of the sine-Gordon equation and other nonlinear equations // *J. Phys. Soc. Jpn*, 1983. V. 52, No. 6. P. 1918–1920.
53. *Аваева И.Г., Лисовский Ф.В., Мансветова Е.Г.* 360°-е доменные границы с периодически распределенными блоховскими линиями в эпитаксиальных пленках магнитных гранатов // *Письма в ЖЭТФ*, 1978. Т. 4, № 24. С. 1485–1490.
54. *Bezmaternih G.V., Borisov A.B.* Rational-exponential solutions of nonlinear equations // *Lett. Math. Phys.*, 1985. V. 18. P. 1–8.
55. *Bezmaternih G.V.* Exact solutions of the sine-Gordon and Landau – Lifshitz equations: rational-exponential solutions // *Phys. Lett. A*, 1985. V. 146, No. 9. P. 492–495.
56. *Сан Жам Д., Сарма Г., Томас Е.* Сверхпроводимость второго рода. М.: Мир, 1970. 363 с.
57. *Абрикосов А.А.* Основы теории металлов. М.: Наука, 1987. 520 с.

58. *Matveev V.B.* Abelian functions and solitons. Preprint No. 273. Univ. Wroclaw. Wroclaw, 1976. 98 p.
59. *Zagrodzinski J., Jaworski M.* Mixed solution of the sine-Gordon equation // *Z. Phys. B*, 1982. V. 49. P. 75–77.
60. *Парментье Р.* Флюксоны в распределенных джозефсоновских контактах // Солитоны в действии / Под ред. К. Лангрена, Э. Скотта. М.: Мир, 1981. С. 185–206.
61. *Byrd P.F., Friedman M.D.* Handbook of elliptic integrals for engineers and scientists. Springer Verlag, 1971. 360 p.
62. *Huber D.L.* Critical slowing down in the tranverse autocorrelation function of a two-dimensional planar magnet // *Phys. Lett. A*, 1978. V. 68, No. 1. P. 125–126.
63. *Huber D.L.* Dynamics of vortices in quasi-two-dimensional planar magnets // *Phys. Lett. A*, 1980. V. 76, No. 56. P. 406–407.
64. *Huber D.L.* Dynamics of spin vortices in two-dimensional-planar magnets // *Phys. Lett. B*, 1982. V. 26, No. 7. P. 3758–3765.
65. *Никифоров А.В., Сонин Э.Б.* Динамика магнитных вихрей в планарном ферромагнетике // *ЖЭТФ*, 1983. Т. 85, № 2. С. 642–651.
66. *Takeo S., Homma S.* Dynamics of vortices in two-dimensional spin fluids // *Progr. Theor. Phys.*, 1982. V. 67, No. 5. P. 1633–1636.
67. *Takeo S., Homma S.* Dynamics of vortices in Bose fluids and classical continuous spin models // *Progr. Theor. Phys.*, 1983. V. 69, No. 3. P. 773–789.
68. *Зиглин С.Л.* Неинтегрируемость задачи о движении четырех точечных вихрей // *ДАН СССР*, 1980. Т. 250, № 6. С. 1296–1300.
69. *Новиков Е.А., Седов Ю.Б.* Коллапс вихрей // *ЖЭТФ*, 1979. Т. 77, № 2. С. 388–397.
70. *Gibbon J.D.* The interaction of n-dimensional soliton wave fronts // *Nuovo Cimento. B*, 1975. V. 28, No. 1. P. 1–17.
71. *Kobayashi K.K., Izutsu M.* Exact solution of the n-dimensional sine-Gordon equation // *J. Phys. Soc. Jpn*, 1976. V. 41, No. 3. P. 1091–1092.
72. *Kryder M.H., Gallagher T.J., Scranton R.A.* Neel walls and line transitions in a (100) garnet film // *J. Appl. Phys.*, 1982. V. 53, No. 8. P. 5810–5814.
73. *Slonczewski J.C.* Breathing vibrations of a Neel wall // *J. Appl. Phys.*, 1984. P. 55, No. 6. P. 2536–2538.
74. *Argyle B.E., Terrenzio E., Slonczewski J.C.* Magnetic vortex dynamics using the optical Cotton – Muton effect // *Phys. Rev. Lett.*, 1984. V. 53, No. 2. P. 190–193.
75. *Конторова Т.А., Френкель Я.И.* К теории пластической деформации и двойникования // *ЖЭТФ*, 1938. Т. 8, № 1. С. 89–95.
76. *Frank F.C., Van der Merve J.H.* One-dimensional dislocations. I. Static theory // *Proc. Roy. Soc. London A*, 1949. V. 198, No. 1053. P. 205–225.
77. *Покровский В.Л., Талапов А.Л.* Фазовые переходы и спектры колебаний почти соизмеримых структур // *ЖЭТФ*, 1978. Т. 75, вып. 3. С. 1151–1157.
78. *Покровский В.Л., Талапов А.Л.* Теория двумерных несоизмеримых кристаллов // *ЖЭТФ*, 1980. Т. 78, № 1. С. 270–295.
79. *Люксютов И.Ф.* Фазовые переходы в адсорбированных пленках // *УФЖ*, 1983. Т. 28, № 9. С. 1281–1303.
80. *Дзялошинский И.Е.* Теория геликоидальных структур в антиферромагнетиках. III // *ЖЭТФ*, 1964. Т. 47, № 3. С. 992–1003.
81. *Изюмов Ю.А.* Модулированные или длиннопериодические магнитные структуры кристаллов // *УФН*, 1984. Т. 144, № 3. С. 430–470.

82. *Соболева Т.К., Стефановский Е.П.* Равновесные состояния и магнитные фазовые переходы в ромбических кристаллах с неоднородным обменно-релятивистским взаимодействием // ФММ, 1982. Т. 54, № 1. С. 186–188.
83. *Барьяхтар В.Г., Яблонский Д.А.* Индуцирование длиннопериодических структур в ромбических и ромбоэдрических антиферромагнетиках // ФТТ, 1982. Т. 24, № 8. С. 2522–2524.
84. *Витебский И.М.* Об индуцировании несоизмерных структур внешним полем // ЖЭТФ, 1982. Т. 82, № 2. С. 357–361.
85. *Барьяхтар В.Г., Леонов И.А., Соболева Т.К.* Некоторые качественные аспекты теории неоднородных сверхструктур в магнетиках. Препринт № 84-126 РИТФ, Киев, 1984. 14 с.
86. *Де Жен П.* Жидкие кристаллы. М.: Мир, 1977. 400 с.
87. *Chandrasekhar S., Ranganath G.S.* The structure and energetics of defects in liquid crystals // Adv. Phys., 1986. V. 35, No. 6. P. 507–596.
88. *Ахизер А.И.* Элементы теории эллиптических функций. М.: Наука, 1970. 304 с.
89. *Широбоков М.* К теории механизма намагничивания ферромагнетиков // ЖЭТФ, 1945. Т. 15, № 1–2. С. 57–76.
90. *Derrick G.H.* Comments on nonlinear wave equations as models for elementary particles // J. Math. Phys., 1964. V. 5, No. 9. P. 1252–1254.
91. *Люксютов И.Ф.* Мультикритическая точка двумерного несоизмеримого кристалла // Письма в ЖЭТФ, 1980. Т. 32, № 10. С. 593–595.
92. *Калиткин Н.Н.* Численные методы. М.: Наука, 1978. 512 с.
93. *Adler S.L., Piran T.* Relaxation methods for gauge field equilibrium equations // Rev. Mod. Phys., 1984. V. 56, No. 4. P. 1–40.
94. *Smith D.O., Harte K.J.* Noncoherent switching in permalloy films // J. Appl. Phys., 1962. V. 33, No. 4. P. 1399–1413.
95. *Feldtkeller E., Liesk W.* 360°-wände in magnetischen schichten // Zs. Angew. Phys., 1962. V. 14, No. 4. P. 195–199.
96. *Шюппель В., Камберский В.* Структура доменов и междоменных стенок // Тонкие ферромагнитные пленки / Под ред. Р.В. Телеснина. М.: Мир, 1964. С. 105–158.
97. *Mineev V.P., Volovik G.E.* Planar and linear solitons in superfluid ^3He // Phys. Rev. B, 1978. V. 18, No. 7. P. 3197–3203.
98. *Овидько И.А.* Топологические устойчивые конфигурации с сингулярными ядрами в упорядоченных средах // ЖЭТФ, 1985. Т. 89, № 4. С. 1301–1303.
99. *Овидько И.А., Романов Е.П.* Топологические возбуждения (дисклинация, вихри, солитоны, текстуры, фрустрации) в конденсированных средах // Теоретическое и экспериментальное исследование дисклинаций / Под ред. В.И. Владимирова. Л., ФТИ АН СССР, 1986. С. 6–53.

К главе 3

1. *Борисов А.Б., Киселев В.В., Талуц Г.Г.* Солитонные решения нелинейной динамики магнетиков // ФНТ, 1983. Т. 9, № 2. С. 170–78.
2. *Борисов А.Б., Киселев В.В.* Динамика квазиодномерного ферромагнетика с анизотропией типа «легкая плоскость» // ФММ, 1984. Т. 58, № 2. С. 238–251.
3. *Елеонский В.М., Новожилова Н.С., Кулагин Н.Е.* О новых примерах топологических солитонов в магнитоупорядоченных средах // ЖЭТФ, 1985. Т. 89, № 6(12). С. 2174–2180.

4. Ахмедиев Н.Н., Елеонский В.М., Кулагин Н.Е. Генерация периодической последовательности пикосекундных импульсов в оптическом волокне. Точные решения // ЖЭТФ, 1985. Т. 89, № 5. С. 1542–1551.
5. Ковалев А.С., Кулагин Н.Е. Динамика темных солитонов ненулевого вакуума в однокомпонентной системе. Препринт № 14. ФТИНТ, Харьков, 1987. 23 с.
6. Kovalev A.S., Kulagin N.T. Dynamics of hole-like solitons in stable condensate // Nonlinear and turbulent processes in physics. V. 2. Kiev: Nauk. dumka, 1988. P. 273–276.
7. Borisov A.B., Kiseliev V.V. Vortices in incommensurate structures // Sol. St. Comm., 1986. V. 59, No. 7. P. 445–448.
8. Борисов А.Б., Киселев В.В., Талуц Г.Г. Дислокации в несоизмеримых структурах // Вопросы теории дефектов в кристаллах / Под ред. С.В. Вонсовского, М.А. Кривоглаза. Л.: Наука, 1987. С. 58–67.
9. Borisov A.B., Kiseliev V.V. Topological defects in incommensurate magnetic and crystal structures and quasi-periodic solutions of the elliptic sine-Gordon equation // Physica D, 1988. V. 31. P. 49–64.
10. Borisov A.B., Kiseliev V.V., Talutz G.G. Topological defects in incommensurate structures and quasi-periodic solutions of the elliptic sine-Gordon equation // Proc. III Int. Workshop on Nonlinear and Turbulent Processes in Physic. Kiev: Nauk. dumka, 1988. V. 1. P. 40–43.
11. Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П. Теория солитонов: Метод обратной задачи. М.: Наука, 1980. 320 с.
12. Лэм Дж. Л. Введение в теорию солитонов. М.: Мир, 1983. 294 с. (Lamb G.L. Elements of soliton theory. New York; Chichester; Brisbane; Toronto: Interscience Publ. J. Wiley and sons).
13. Тахтаджян Л.А., Фаддеев Л.Д. Гамильтонов подход в теории солитонов. М.: Наука, 1986. 528 с.
14. Абловиц М., Сигур Х. Солитоны и метод обратной задачи рассеяния. М.: Мир, 1987. 444 с.
15. Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х. Солитоны и нелинейные волновые уравнения. М.: Мир, 1988. 694 с. (Dodd R.K., Eilbeck J.C., Gibbon J.D., Morris H.C. Solitons and nonlinear wave equation. London; Orlando; San Diego; New York; Toronto; Montreal; Sydney; Tokio: Acad. Press).
16. Ньюэлл А. Солитоны в математике и физике. М.: Мир, 1989. 324 с.
17. Тарасов В.О. Начально краевая задача для нелинейного уравнения Шредингера // Зап. науч. сем. ЛОМИ, 1988. Т. 169. С. 151–165.
18. Бибииков П.Н., Тарасов В.О. Краевая задача для нелинейного уравнения Шредингера // ТМФ. 1989. Т. 79, № 3. С. 334–346.
19. Fokas A.S. An initial-boundary value problem for nonlinear Schrödinger equation // Physica D, 1989. V. 35. P. 167–185.
20. Fokas A.S., Ablowitz M.J. Forced nonlinear evolution equations and the inverse scattering transform // Stud. Appl. Math., 1989. V. 80, No. 3. P. 253–272.
21. Бикбаев Р.Ф., Итс Р.Ф. Алгеброгеометрические решения краевой задачи для нелинейного уравнения Шредингера // Мат. заметки, 1989. Т. 45, № 5. С. 3–9.
22. Bikbaev R.F., Tarasov V.O. Initial-boundary problem for the nonlinear Schrödinger equation // J. Phys. A, 1991. V. 24. P. 2507–2518.
23. Бикбаев Р.Ф. Конечнзонные решения краевых задач для интегрируемых уравнений // Мат. заметки, 1991. Т. 48, вып. 4. С. 130–138.
24. Бикбаев Р.Ф., Тарасов В.О. Неоднородная краевая задача на полуоси и на отрезке для уравнения sine-Gordon // Алгебра и анализ, 1991. Т. 3, вып. 4. С. 78–92.

25. *Фокас А.С., Итс А.Р.* Краевая задача с начальными условиями для уравнения sine-Gordon в лабораторных координатах // ТМФ, 1992. Т. 92, № 3. С. 387–403.
26. *Хабидуллин И.Т.* Уравнение КдФ на полуоси с нулевым краевым условием // ТМФ, 1999. Т. 119, № 3. С. 397–404.
27. *Fokas A.S.* Integrable nonlinear evolution equations on the half-line // Comm. Math. Phys., 2002. V. 230. P. 1–39.
28. *Fokas A.S.* Linearizable initial boundary value problems for the sine-Gordon equation on the half-line // Nonlinearity, 2004. V. 17. P. 1521–1524.
29. *Fokas A.S.* The generalized Dirichlet to Neumann map to certain nonlinear evolution RDEs // Comm. Pure Appl. Math., 2005. V. LVIII. P. 639–670.
30. *Склянин Е.К.* Граничные условия для интегрируемых систем // Функцион. анализ и его прил., 1987. Т. 21, вып. 2. С. 86–87.
31. *Бобенко А.И.* Собственные функции краевых задач Дирихле и Неймана на прямоугольнике для эллиптического уравнения синус-Гордон // Зап. науч. сем. ЛОМИ, 1989. Т. 179. С. 32–36.
32. *Habibullin I.T.* Backlund transformation and integrale boundary-initial value problems // Nonlinear World: IV Int. Workshop on Nonlinear and Turbulent Processes in Physics / Ed. by V.G. Baryakhtar et al. Singapore: World Scientific, 1989. V. 1. P. 130–138.
33. *Tarasov V.O.* The integrable initial-boundary value problem on semiline: nonlinear Schrödinger and sine-Gordon equations // Inverse Problems, 1991. V. 7. P. 435–439.
34. *Хабидуллин И.Т.* Уравнение синус-Гордон на полуоси // ТМФ, 1998. Т. 114, № 1. С. 115–125.
35. *Кузнецов Е.А., Михайлов А.В.* Устойчивость стационарных волн в нелинейных средах со слабой дисперсией // ЖЭТФ, 1974. Т. 67, вып. 5 (11). С. 1717–1724.
36. *Борисов А.Б.* Обратная задача рассеяния для уравнения Ландау – Лифшица // ДАН СССР, 1986. Т. 288, № 6. С. 1339–1342.
37. *Борисов А.Б.* Нелинейные возбуждения и двумерные топологические солитоны в магнетиках: Дис. ... докт. физ. мат. наук. ИФМ УНЦ АН СССР. Свердловск, 1986. 303 с.
38. *Борисов А.Б., Киселев В.В.* Нелинейные волны, солитоны и локализованные структуры в магнетиках: Т. 1. Квазиодномерные магнитные солитоны. Екатеринбург: УрО РАН, 2009. 511 с.
39. *Matveev V.B.* Abelian functions and solitons. Preprint No. 3. University of Wroclaw. Poland, 1976. 98 p.
40. *Итс А.Р.* Обращение гиперэллиптических интегралов и интегрирование нелинейных дифференциальных уравнений // Вест. ЛГУ, 1976. № 7, вып. 2. С. 39–46.
41. *Кричевер И.М.* Интегрирование нелинейных уравнений методами алгебраической геометрии // Функцион. анализ и его прил., 1977. Т. 11, № 1. С. 15–31.
42. *Кричевер И.М.* Методы алгебраической геометрии в теории нелинейных уравнений // УМН, 1977. Т. 32, № 6. С. 183–208.
43. *Дубровин Б.А.* Тэта-функции и нелинейные уравнения // УМН, 1981. Т. 36, вып. 2. С. 11–18.
44. *Дубровин Б.А., Натанзон С.М.* Вещественные решения уравнения sine-Gordon // Функцион. анализ и его прил., 1982. Т. 16, вып. 1. С. 27–43.
45. *Дубровин Б.А.* Римановы поверхности и нелинейные уравнения. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. 152 с.
46. *Борисов А.Б., Киселев В.В.* Обратная задача рассеяния для эллиптического sine-Gordon уравнения с асимптотикой типа кноидальной волны. М., 1988. 53 с. Деп. в ВИНИТИ, № 5330 В88.

47. *Борисов А.Б., Киселев В.В., Ионов С.Н.* Обратная задача рассеяния для интегрирования уравнения эллиптический sine-Gordon на нетривиальном фоне. М., 1989. 51 с. Деп. в ВИНТИ, № 2015 В88.
48. *Borisov A.B., Kiseliev V.V.* Inverse problem for an elliptic sine-Gordon equation with asymptotic behavior of the cnoidal-wave type // *Inverse Problems*, 1989. V. 5. P. 952–982.
49. *Borisov A.B., Kiseliev V.V.* Inverse spectral solution of elliptic sine-Gordon equation with nontrivial asymptotic behavior // *Nonlinear World: IV Int. Workshop on Nonlinear and Turbulent Processes in Physics* / Ed. by V.G. Bar'yakhtar et al. Singapore: World Scientific, 1989. V. 1. P. 73–83.
50. *Киселев В.В.* Топологические дефекты и солитоны в несоизмеримых магнитных и кристаллических структурах: Дис. ... докт. физ. мат. наук. ИФМ УРО РАН. Екатеринбург, 1998. 329 с.
51. *Покровский И.Г.* Лекции об уравнениях с частными производными. М.: ГИТТЛ, 1950. 303 с.
52. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964. 830 с.
53. *Byrd P.F., Friedman M.D.* Handbook of elliptic integrals for engineers and scientists. Springer Verlag, 1971. 360 p.
54. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Эллиптические и автоморфные функции, функции Ламе и Матье. М.: Наука, 1967. 229 с.
55. *Ахиезер А.И.* Элементы теории эллиптических функций. М.: Наука, 1970. 304 с.

К главе 4

1. *Pokrovsky V.L., Talapov A.L.* Theory of incommensurate crystals. Hardwood etc.: Acad. Publ., 1984. 161 p.
2. *Люксютов И.Ф.* Мультикритическая точка двумерного несоизмеримого кристалла // *Письма в ЖЭТФ*, 1980. Т. 32, № 10. С. 593–595.
3. *Люксютов И.Ф., Наумовец А.Г., Покровский В.Л.* Двумерные кристаллы. Киев: Наук. думка, 1988. 220 с.
4. *Широбоков М.* К теории механизма намагничивания ферромагнетиков // *ЖЭТФ*, 1945. Т. 15, № 1–2. С. 57–76.
5. *Ходенков Г.Е.* Некоторые точные многомерные решения уравнения Ландау – Лифшица в одноосном ферромагнетике // *ФММ*, 1982. Т. 54, вып. 4. С. 644–649.
6. *Туров Е.А.* Физические свойства магнитоупорядоченных кристаллов. М.: Изд-во АН СССР, 1963. 224 с.
7. *Ахиезер А.И., Барьяхтар В.Г., Пелетминский С.В.* Спиновые волны. М.: Наука, 1973. 591 с.
8. *Косевич А.М., Иванов Б.А., Ковалев А.С.* Нелинейные волны намагниченности. Динамические и топологические солитоны. Киев: Наук. думка, 1983. 190 с.
9. *McMillan W.L.* Theory of discommensuration and the discommensurate-incommensurate charge-density-wave phase transition // *Phys. Rev. B*, 1976. V. 14, No. 4. P. 1496–1502.
10. *Борисов А.Б., Киселев В.В.* Обратная задача рассеяния для эллиптического sine-Gordon уравнения с асимптотикой типа кноидальной волны. М., 1988. 53 с. Деп. в ВИНТИ, № 5330 В88.

11. *Борисов А.Б., Киселев В.В., Ионов С.Н.* Обратная задача рассеяния для интегрирования уравнения эллиптический sine-Gordon на нетривиальном фоне. М., 1989. 51 с. Деп. в ВИНТИ, № 2015 В88.
12. *BorISOV A.B., KISELIEV V.V.* Inverse problem for an elliptic sine-Gordon equation with asymptotic behaviour of the cnoidal-wave tupe // *Inverse Problem*, 1989. V. 5. P. 952–982.
13. *BorISOV A.B., KISELIEV V.V.* Inverse spectral solution of elliptic sine-Gordon equation with nontrivial asymptotic behaviour // *Nonlinear World: IV Int. Workshop on Nonlinear and Turbulent Processes in Physics* / Ed. by V.G. Bar'yakhtar et al. Singapore: World Scientific, 1989. V. 1. P. 73–83.
14. *Гутишабаи Е.Ш., Липовский В.Д.* Граничная задача для двумерного эллиптического уравнения синус-Гордон и ее приложение к теории стационарного эффекта Джозефсона // *Зап. науч. сем. ЛОМИ*, 1990. Т. 180. С. 53–62.
15. *Гутишабаи Е.Ш., Липовский В.Д., Никуличев С.С.* Нелинейная сигма модель в искривленном пространстве, калибровочная эквивалентность и точные решения (2+0) мерных интегрируемых уравнений // *ТМФ*, 1998. Т. 115, № 3. С. 323–348.
16. *Бобенко А.И.* Собственные функции краевых задач Дирихле и Неймана на прямоугольнике для эллиптического уравнения синус-Гордон // *Зап. науч. сем. ЛОМИ*, 1989. Т. 179. С. 32–36.
17. *BorISOV A.B., Ionov S.N., Shagalov A.G.* New types of vortices and the solution by the inverse boundary value problem for sine-Gordon equation by the inverse scattering transform // *Nonlinear World: IV Int. Workshop on Nonlinear and Turbulent Processes in Physics* / Ed. by V.G. Bar'yakhtar et al. Singapore: World Scientific, 1989. V. 1. P. 65–72.
18. *BorISOV A.B.* Vortices in the sine-Gordon system and solution of the boundary value problem by inverse scattering transform // *Phys. Lett. A*, 1990. V. 143, No. 1–2. P. 52–56.
19. *Борисов А.Б., Талуц Г.Г.* Теоретическое описание вихрей в квазидвумерных магнетиках // *ФММ*, 1991. № 1. С. 34–43.
20. *BorISOV A.B., Ionov S.N.* Vortices and vortex dipoles in 2D sine-Gordon model // *Physica D*, 1996. V. 99. P. 18–34.
21. *Kaup D.J.* Two new aspects of the inverse scattering transform: 1) The elliptic sine-Gordon equation, and 2) Growing solutions // *Nonlinear World: IV Int. Workshop on Nonlinear and Turbulent Processes in Physics* / Ed. by V.G. Bar'yakhtar et al. Singapore: World Scientific, 1989. V. 1. P. 139–150.
22. *Люксютов И.Ф.* Двумерные анизотропные кристаллы // *ЖЭТФ*, 1982. Т. 82, № 4. С. 1267–1276.
23. *BorISOV A.B., KISELIEV V.V.* Magnetic dipole in tunnel junction and solution of the boundary value problem by inverse scattering transform // *Physica D*, 1995. V. 87. P. 64–69.
24. *Борисов А.Б., Киселев В.В.* Двумерные топологические дефекты в протяженных джозефсоновских контактах // *ФТТ*, 1996. Т. 37, № 7. С. 1928–1938.
25. *BorISOV A.B., KISELIEV V.V.* Vortex dipoles on a solution lattice background: Solution of the boundary value problem by inverse spectral transform // *Physica D*, 1998. V. 111. P. 96–128.
26. *Тайманов И.А.* Многочленные конечнозонные решения уравнения $\Delta u = \sin u$ // *Мат. заметки*, 1990. Т. 47, вып. 3. С. 100–105.
27. *Бабич М.В., Бордаг Л.А.* Качественное исследование трехфазных солитонов уравнения sine-Laplace // *Зап. науч. сем. ПОМИ*, 1996. Т. 235. С. 199–217.

28. Хирт Дж., Лоте И. Теория дислокаций. М.: Атомиздат, 1972. 599 с.
29. Косевич А.М. Физическая механика реальных кристаллов. Киев: Наук. думка, 1981. 327 с.
30. Косевич А.М. Дислокации в теории упругости. Киев: Наук. думка, 1978. 219 с.
31. Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Потаевский Л.П. Теория солитонов: Метод обратной задачи. М.: Наука, 1980. 320 с.
32. Byrd P.F., Friedman M.D. Handbook of elliptic integrals for engineers and scientists. Springer Verlag, 1971. 360 p.
33. Бейтмен Г., Эрдейи А. Эллиптические и автоморфные функции, функции Ламе и Матье. М.: Наука, 1967. 229 с.
34. Дикштейн И.Е., Лисовский Ф.В., Мансветова Е.Г., Тарасенко В.В. Магнитные дислокации в полосовой доменной структуре // ЖЭТФ, 1990. Т. 98, № 6(12). С. 2158–2175.
35. Найданов С.А., Шагалов А.Г. Влияние внешних полей на вихревые конфигурации в магнетиках. Препринт УрО АН СССР. Свердловск, 1990. 17 с.
36. Ахизер А.И. Элементы теории эллиптических функций. М.: Наука, 1970. 304 с.
37. Федорюк М.В. Метод перевала. М.: Наука, 1977. 368 с.
38. Борисов А.Б., Киселев В.В. Нелинейные волны, солитоны и локализованные структуры в магнетиках. Т. 1. Квазиодномерные магнитные солитоны. Екатеринбург: УрО РАН, 2009. 511 с.
39. Борисов А.Б., Танкеев А.П., Шагалов А.Г. Новые типы двумерных вихреподобных состояний в магнетиках // ФТТ, 1989. Т. 31, № 5. С. 140–147.
40. Песенсон М.З. Неодномерные уединенные волны в конденсированных средах // ФТТ, 1990. Т. 32, № 5. С. 1467–1474.
41. Найфе А.Х. Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 455 с. (Neyfeh A.H. Perturbation methods. New York; London; Sydney; Toronto: John Wiley & Sons).
42. Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х. Солитоны и нелинейные волновые уравнения. М.: Мир, 1988. 694 с. (Dodd R.K., Eilbeck J.C., Gibbon J.D., Morris H.C. Solitons and nonlinear wave equation. London; Orlando; San Diego; New York; Toronto; Montreal; Sydney; Tokyo: Acad. Press).
43. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1972. 496 с.
44. Иванов Б.А. Мезоскопические антиферромагнетики: статика, динамика, квантовое туннелирование (обзор) // ФНТ, 2005. Т. 31, № 8/9. С. 841–884.
45. Иванов Б.А., Колежук А.К. Квантовое туннелирование и квантовая когерентность в топологическом солитоне квазиодномерного антиферромагнетика // ФНТ, 1995. Т. 21, № 9. С. 986–988.
46. Вайнштейн А.И., Захаров В.И., Новиков В.А., Шифман М.А. Инстантонная азбука // УФН, 1982. Т. 136, вып. 4. С. 553–592.
47. Гирвин С.М. Квантовый эффект Холла: необычные возбуждения и нарушенные симметрии. Москва; Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2003. 156 с.
48. Izumov Yu.A., Laptev V.M. Vortex structure in superconductors with a many-component order parameter // Phase Trans., 1990. V. 20. P. 95–112.
49. Абрикосов А.А. Основы теории металлов. М.: Наука, 1987. 520 с.
50. Gaever M.D. Magnetic coupling between two adjacent type – II superconductors // Phys. Rev. Lett., 1965. V. 15, No. 21. P. 225–227.
51. Gaever M.D. Flux pinning and flux-flow resistivity in magnetically coupled superconducting films // Phys. Rev. Lett., 1966. V. 16, No. 11. P. 460–462.

52. *Sherrill M.D.* Fluxon coupling in dual thin films // *Phys. Rev. B*, 1973. V. 7, No. 5. P. 1908–1919.
53. *Ekin J.W., Clem J.R.* Magnetic coupling force of the superconducting dc transformer // *Phys. Rev. B*, 1975. V. 12, No. 5. P. 1753–1771.
54. *Ekin J.W., Serin B.* Magnetic coupling in superposed type – II superconducting films // *Phys. Rev. B*, 1974. V. 9, No. 3. P. 912–917.
55. *Голубов А.А., Куприянов М.Ю.* Влияние одиночных абрикосовских вихрей на свойства туннельных джозефсоновских переходов // *ЖЭТФ*, 1987. Т. 92, № 4. С. 1512–1523.
56. *Голубов А.А., Куприянов М.Ю.* Влияние абрикосовских вихрей на свойства туннельных переходов сверхпроводников // *ФНТ*, 1986. Т. 12, № 4. С. 373–382.
57. *Miller S.L., Biagi K.R., Clemm J.R., Finnemore D.K.* Critical currents of cross type superconducting – normal – superconducting junctions in perpendicular magnetic field // *Phys. Rev. B*, 1985. V. 31, No. 5. P. 2684–2693.
58. *Manhart J., Bosch J., Gross R., Huebener R.P.* Two dimensional imaging of trapped magnetic flux quanta in Josephson tunnel junction // *Phys. Rev. B*, 1987. V. 35, No. 10. P. 5267–5269.
59. *Manhart J., Bosch J., Gross R., Huebener R.P.* Spatial distribution of the maximum Josephson current in superconducting tunnel junction // *J. Low. Temp. Phys.*, 1988. V. 70, No. 5/6. P. 459–484.
60. *Barone A., Esposito E., Likharev K.K. et al.* Effect of boundary conditions upon the phase distribution in two-dimensional Josephson junction // *J. Appl. Phys.*, 1982. V. 53, No. 8. P. 5802–5814.
61. *Бароне А., Патерно Дж.* Эффект Джозефсона. Физика и применения. М.: Мир, 1984. 640 с.
62. *Кулик И.О., Янсон И.К.* Эффект Джозефсона в сверхпроводящих туннельных структурах. М.: Наука, 1970. 272 с.
63. *Новокушенов В.Ю.* Об асимптотике общего вещественного решения уравнения Пенлеве третьего типа // *ДАН СССР*, 1985. Т. 283, № 5. С. 1161–1164.
64. *Its A.R., Novokshenov V.Yu.* The isomonodromy deformation method in theory of Painleve equations // *Lect. Notes in Math.* V. 1191. Berlin; Heidelberg; New York: Springer Verlag, 1986. 313 p.
65. *Итс А.Р., Капаев А.А., Новокушенов В.Ю., Фокас А.С.* Трансценденты Пенлеве. Метод задачи Римана. Москва; Ижевск: Ин-т компьютерных исследований; НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2005. 728 с.
66. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. М.: Наука, 1974. 296 с. (*Bateman H., Erdelyi A.* Higher transcendental function. V. 2. New York; Toronto; London: McGraw; Hill book company, inc., 1953).

К главе 5

1. *Хирт Дж., Лоте И.* Теория дислокаций. М.: Атомиздат, 1972. 599 с.
2. *Косевич А.М.* Физическая механика реальных кристаллов. Киев: Наук. думка, 1981. 327 с.
3. *Косевич А.М.* Дислокации в теории упругости. Киев: Наук. думка, 1978. 219 с.
4. *Serrin J.* Local behaviour of solutions of quasi-linear equations // *Acta Math.*, 1964. V. 111, No. 3–4. P. 247–302.

5. *Serrin J.* Isolated singularities of solutions of quasi-linear equations // *Acta Math.*, 1965. V. 113, No. 3–4. P. 219–240.
6. *Veron L.* Weak and strong singularities of nonlinear elliptic equations. Nonlinear functional analysis and its applications // *Proc. Symp. Pure Math. Amer. Math. Soc.*, Providence, R.I., 1986. pt 2, V. 45. P. 477–495.
7. *Shagalov A.G.* Singular solutions of the elliptic sine-Gordon equation: Models of defects // *Phys. Lett. A*, 1992. V. 165. P. 412–416.
8. *Mura T.* Semi microscopic plastic distortion and disclinations // *Archives of Mechanics*, 1972. V. 24, No. 3. P. 449–456.
9. *Де Вумп Р.* Континуальная теория дисклинаций. М.: Мир, 1977. 208 с.
10. *Borisov A.B., Ionov S.N., Shagalov A.G.* New types of vortices and the solution by the inverse boundary value problem for sine-Gordon equation by the inverse scattering transform // *Nonlinear World: IV Int. Workshop on Nonlinear and Turbulent Processes in Physics* / Ed. by V.G. Bar'yakhtar et al. Singapore: World Scientific, 1989. V. 1. P. 65–72.
11. *Borisov A.B.* Vortices in the sine-Gordon system and solution of the boundary value problem by inverse scattering transform // *Phys. Lett. A*, 1990. V. 143, No. 1–2. P. 52–56.
12. *Борисов А.Б., Талуц Г.Г.* Теоретическое описание вихрей в квазидвумерных магнетиках // *ФММ*, 1991. № 1. С. 34–43.
13. *Borisov A.B., Ionov S.N.* Vortices and vortex dipoles in 2D sine-Gordon model // *Physica D*, 1996. V. 99. P. 18–34.
14. *Novokshenov V.Yu., Shagalov A.G.* Bound states of the elliptic sine-Gordon equation // *Physica D*, 1997. V. 106. P. 81–94.
15. *Новокушенов В.Ю., Шагалов А.Г.* Решения типа связанных состояний для эллиптического уравнения синус-Гордон // *ТМФ*, 1997. Т. 111, № 1. С. 15–31.
16. *Борисов А.Б.* Асимптотическое поведение солитонов и метод обратной задачи рассеяния для решения краевых задач // *ТМФ*, 2000, Т. 124, № 3. V. 279–291.
17. *Kaup D.J.* Two new aspects of the inverse scattering transform: 1) The elliptic sine-Gordon equation, and 2) Growing solutions // *Nonlinear World: IV Int. Workshop on Nonlinear and Turbulent Processes in Physics* / Ed. by V.G. Bar'yakhtar et al. Singapore: World Scientific, 1989. V. 1. P. 139–150.
18. *Kiseliev V.V.* New nonlinear defects in 2D crystals: Description by the inverse spectral transform // *Phys. Lett. A*, 1998. V. 244. P. 103–110.
19. *Киселев В.В.* Топологические дефекты и солитоны в несоизмеримых магнитных и кристаллических структурах. Дис. ... докт. физ. мат. наук. ИФМ УрО РАН. Екатеринбург, 1998. 329 с.
20. *Borisov A.B., Kiseliev V.V.* 2D topological defects and solution of nonlinear boundary value problems by inverse scattering transform method // *Proc. Int. Conf. on Nonlinearity, Bifurcation and Chaos: the Doors to the Future. Lodz-Dobieszko'w (Poland)*, 1996. P. 91–93.
21. *Borisov A.B., Kiseliev V.V.* Topological defects in a large Josephson junction: Analytical description // *Studies in applied electromagnetics and mechanics*. V. 13. Nonlinear electromagnetic systems. Advanced techniques and mathematical methods / Ed. by V. Kose, I. Sievert. Amsterdam: IOS Press, 1998. P. 67–70.
22. *Kiselev V.V.* 2D vortices in incommensurate (stripe-domain) magnetic structures // *Phys. Met. Metallogr.*, 2003. V. 95, suppl. 1. P. S28–S34.
23. *Борисов А.Б., Киселев В.В., Ионов С.Н.* Обратная задача рассеяния для интегрирования уравнения эллиптический sine-Gordon на нетривиальном фоне. М., 1989. 51 с. Деп. в ВИНТИ, № 2015 В88.

24. Морс Ф.М., Фейсбах Г. Методы теоретической физики. М.: ИЛ, 1958. Т. 1. С. 746–749.
25. Мак-Лафлин Д., Скотт Э. Многосолитонная теория возмущений // Солитоны в действии / Под ред. К. Лонгрена, Э. Скотта. М.: Мир, 1981. С. 210–268.
26. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. М.: Наука, 1974. 296 с. (*Bateman H., Erdèyi A. Higher transcendental function. V. 2. New York; Toronto; London: McGraw; Hill book company, inc., 1953*).
27. Лисовский Ф.В., Мансветова Е.Г., Николаев А.В., Николаева Е.П. Новые типы динамической самоорганизации магнитного момента в тонких пленках при ударном возбуждении. Препринт № 1 (569) ИРЭ РАН. М., 1992. 24 с.
28. Итс А.Р. «Изомонодромные» решения уравнений нулевой кривизны // Изв. АН СССР, 1985. Т. 48, № 9. С. 530–565.
29. Новокушенов В.Ю. Об асимптотике общего вещественного решения уравнения Пенлеве третьего типа // ДАН СССР, 1985. Т. 283, № 5. С. 1161–1164.
30. Its A.R., Novokshenov V.Yu. The isomonodromy deformation method in theory of Painleve equations // Lect. Notes in Math. V. 1191. Springer Verlag, 1986. 313 p.
31. Итс А.Р., Канаев А.А., Новокушенов В.Ю., Фокас А.С. Трансценденты Пенлеве. Метод задачи Римана. Москва; Ижевск: Ин-т компьютерных исследований; НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2005. 728 с.
32. Press W.H., Teukolsky S.A., Vetterling W.T., Flannerty B.P. Numerical recipes in FORTRAN. Cambridge: Cambridge University Press, 1997. 1486 p.
33. Deift P., Zhou X. A steepest descent method for oscillatory Riemann – Hilbert problems. Asymptotic for the MKdV equation // Ann. Math., 1993. V. 137. P. 295–368.
34. Пеллони Б. Спектральный анализ эллиптического уравнения синус-Гордон в квадранте // ТМФ, 2009. Т. 160, № 2. С. 189–201.

К главе 6

1. Борисов А.Б. Спиральные вихри в ферромагнетике // Докл. РАН, 2001. Т. 379, № 3. С. 319–321.
2. Борисов А.Б. Спиральные трехмерные структуры в ферромагнетике // Письма в ЖЭТФ, 2002. Т. 76, № 2. С. 95–98.
3. Курик М.В., Лаврентович О.Д. Дефекты в жидких кристаллах: гомотопическая теория и экспериментальные исследования // УФН, 1988. Т. 154, вып. 3. С. 381–431.
4. Volovik G.E. The universe in a helium droplet. Oxford: Clarendon Press, 2003. 510 p.
5. Малоземов А., Слонзуски Дж. Доменные стенки в материалах с цилиндрическими магнитными доменами. М.: Мир, 1982. 382 с.
6. Воловик Г.Е., Минеев В.П. Исследование особенностей в сверхтекучем ^3He и жидких кристаллах методами гомотопической топологии // ЖЭТФ, 1977. Т. 72, № 6. С. 2256–2244.
7. Лаврентьев М.А., Шабат Б.А. Проблемы гидродинамики и их математические модели. М.: Наука, 1973. 210 с.
8. Тужилин А.А., Фоменко А.Т. Элементы геометрии и топологии минимальных поверхностей. М.: Наука, 1991. 174 с.

9. *Pismen L.M.* Vortices in nonlinear fields. From liquid crystals to superfluids, from non-equilibrium patterns to cosmic strings. Oxford: Clarendon Press, 1999. 312 p.
10. *Барьяхтар И.В., Иванов Б.А.* Нелинейные волны намагниченности антиферромагнетиков // ФНТ, 1979. Т. 5, № 7. С. 759–770.
11. *Борисов А.Б., Киселев В.В.* Нелинейные волны, солитоны и локализованные структуры в магнетиках. Т. 1. Квазиодномерные магнитные солитоны. Екатеринбург: УрО РАН, 2009. 511 с.
12. *Де Жен П.* Физика жидких кристаллов. М: Мир. 1977. 400 с. ((*De Gennes P.G.* The physics of liquid crystals. Oxford: Clarendon Press, 1974).
13. *Сонин С.А.* Введение в физику жидких кристаллов. М.: Наука, 1983. 320 с.
14. *Волков Д.В., Желтухин А.А., Блиох Ю.П.* Феноменологический лагранжиан спиновых волн // ФТТ, 1971. Т. 13, № 6. С. 1668–1678.
15. *Волков Д.В., Желтухин А.А.* Феноменологический лагранжиан спиновых волн в пространственно неупорядоченных средах // ФНТ, 1979. Т. 5, № 11. С. 1359–1363.
16. *Волков Д.В., Желтухин А.А.* О распространении спиновых волн в пространственно неупорядоченных средах // ЖЭТФ, 1980. Т. 78, № 5. С. 1867–1878.
17. *Андреев А.Ф., Марченко В.И.* Макроскопическая теория спиновых волн // ЖЭТФ, 1976. Т. 70, № 4. С. 1522–1532.
18. *Андреев А.Ф.* Магнитные свойства неупорядоченных сред. // ЖЭТФ. – 1978. Т. 74, № 2. С. 786–797.
19. *Андреев А.Ф., Марченко В.И.* Симметрия и макроскопическая динамика магнетиков // УФН, 1980. Т. 130, № 1. С. 37–63.
20. *Борисов А.Б.* Новые типы пространственных структур в многоподрешеточных антиферромагнетиках // ЖЭТФ. 2005. Т. 128, № 3. С. 508–524.
21. *Борисов А.Б.* Нелинейные возбуждения и двумерные топологические солитоны в магнетиках: Дис. ... докт. физ.- мат. наук. ИФМ УНЦ АН СССР. Свердловск, 1986. 303 с.
22. *Pohlmeyer K.* Integrable Hamiltonian systems and interaction through quadratic constraints // Com. Math. Phys., 1976. V. 46. P. 207–221.
23. *Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П.* Теория солитонов: Метод обратной задачи. М.: Наука, 1980. 319 с.
24. *Darboux G.* Leçons sur le systèmes orthogonaux et les coordonnées curvilignes. Paris: Gauthier-Villars, 1910.
25. *Zakharov V.E.* Description of the n -orthogonal curvilinear coordinate systems and Hamiltonian integrable systems of hydrodynamic type. I. Integration of the Lamé equations // Duke Math. J., 1998. V. 94, No. 1. P. 103–139.
26. *Борисов А.Б.* Новый класс точных решений уравнения n -поля и их геометрическая интерпретация // Докл. РАН, 2003. Т. 389, № 5. С. 603–604.
27. *Борисов А.Б.* Дифференциально-геометрический метод и новый класс точных решений уравнений n -поля // Математическая физика, анализ, геометрия, 2004. Т. 10. С. 326–331.
28. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике (для научных работников и инженеров). М.: Наука, 1978. 831 с.
29. *Морс Ф.М., Фешбах Г.* Методы теоретической физики. Т. 1. М.: ИЛ, 1958. С. 484.
30. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Эллиптические и автоморфные функции, функции Ламе и Матге. М.: Наука, 1973. С. 103.
31. *Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т.* Современная геометрия. М: Наука, 1979. 760 с.

32. *Иванов Б.А., Колежук А.К.* Солитоны в низкоразмерных антиферромагнетиках (обзор) // ФНТ, 1995. Т. 21, № 4. С. 355–389.
33. *Аминов Ю.А.* Дифференциальная геометрия и топология кривых. М.: Наука, 1987. 160 с.
34. *Whitehead J.H.C.* An expression of Hopfs invariant as an integral // Proc. Nat. Acad. Sci., 1947. V. 33. P. 117–123.
35. *Bott R., Tu L.W.* Differential forms in algebraic topology. N.Y.: Springer, 1982. 338 p.
36. *Kundu A., Rybakov Y.P.* Closed vortex type solitons with Hopf index // J. Phys. A., 1982. V. 15. P. 269–275.
37. *Gladikowski J., Hellmund M.* Static solitons with non-zero Hopf number // Phys. Rev. D, 1997. V. 56, No. 8. P. 5194–5199.
38. *Faddeev L.D.* Some comments on the many-dimensional solitons // Lett. Math. Phys., 1976. V. 1, No. 4. P. 289–293.
39. *Faddeev L.D., Niemi A.J.* Stable knot-like structures in classical field theory // Nature, 1997. V. 387, No. 6628. P. 58–61.
40. *Маханьков В.Г., Рыбаков Ю.П., Санюк В.И.* Модель Скирма и сильные взаимодействия // УФН, 1992. Т. 162, № 2. С. 1–61.
41. *Протогенов А.П.* Анионная сверхпроводимость в сильно коррелированных спиновых системах // УФН, 1992. Т. 162, № 7. С. 1–79.
42. *Протогенов А.П.* Узлы и зацепления распределений параметров порядка в сильно коррелированных системах // УФН, 2006. Т. 176, № 7. С. 689–715.
43. *Radu E., Volkov M.S.* Stationary ring solitons in field theory. Knots and vortons // Phys. Rep., 2008. V. 468. P. 101–151.
44. *Jäykkä Juha.* On topological solutions in the Faddeev – Skyrme model and its extensions. Turku: Turin Yliopisto, 2009. 96 p.
45. *Вакуленко А.Ф., Капитанский Л.В.* Устойчивость солитонов в S^2 -нелинейной σ -модели // ДАН СССР, 1979. Т. 246. С. 840–842.
46. *Faddeev L.D., Niemi A.J.* Toroidal configurations as stable solitons. Preprint No. hep-th/9705176. Cornell Univ. Ithaca, 1997. V. 1. 20 p.
47. *Battye R.A., Sutcliffe P.M.* To be knot to be? // DAMTP Report No. 109, 1998. 8 p.
48. *Battye R.A., Sutcliffe P.M.* To be knot to be? // Phys. Rev. Lett., 1998. V. 81, No. 22. P. 4798–4801.
49. *Battye R.A., Sutcliffe P.M.* Solitons, links and knots // DAMTP Report No. 110, 1998. 22 p.
50. *Battye R.A., Sutcliffe P.* Solitons, links and knots // Proc. Roy. Soc. London A, 1999. V. 455. P. 4305–4331.
51. *Коснёвски Ч.* Начальный курс алгебраической топологии. М.: Мир, 1983. 301 с.
52. *Sutcliffe P.* Knots in the Skyrme – Faddeev model // Proc. Roy. Soc. London A., 2007. V. 463. P. 3001–3020.
53. *Hietarinta J., Salo P.* Faddeev – Hopf knots: Dynamics of linked un knots // Phys. Lett. B, 1999. V. 451. P. 60–67.
54. *Hietarinta J., Salo P.* Ground state in the Faddeev – Skyrme model // Phys. Rev. D, 2000. V. 62, No. 8. P. 081701(1–4).
55. *Эшенфельдер А.* Физика и техника цилиндрических магнитных доменов. М.: Мир, 1983. 496 с.
56. *Кандаурова Г.С.* Новые явления в низкочастотной динамике коллектива магнитных доменов // УФН, 2002. Т. 172. С. 1165–1187.
57. *Воронов В.П., Иванов Б.А., Косевич А.М.* Двумерные динамические топологические солитоны в магнетиках // ЖЭТФ, 1983. Т. 84, № 6. С. 2235–2241.

58. *Иванов Б.А., Стефанович В.А.* О двумерных топологических солитонах малого радиуса в магнетиках // ЖЭТФ, 1986. Т. 91, № 8. С. 638–648.
59. *Косевич А.М., Иванов Б.А., Ковалев А.С.* Нелинейные волны намагниченности. Динамические и топологические солитоны. Киев: Наук. думка. 1983. 192 с.
60. *Иванов Б.А., Косевич А.М.* Связанные состояния большого числа магнонов в трехмерном ферромагнетике (магнонные капли) // Письма в ЖЭТФ, 1976. Т. 24, № 9. С. 495–499.
61. *Иванов Б.А., Косевич А.М.* Связанные состояния большого числа магнонов в ферромагнетике с одноионной анизотропией // ЖЭТФ, 1977. Т. 72, № 5. С. 2000–2015.
62. *Ioannidou T., Sutcliffe P.M.* Soliton dynamics in 3D ferromagnets // Physica D, 2001. V. 150. P. 118–126.
63. *Дзялошинский И.Е., Иванов Б.А.* Локализованные топологические солитоны в ферромагнетике // Письма в ЖЭТФ, 1979. Т. 29, № 9. С. 592–595.
64. *Bunkov Yu.M., Volovik G.E.* Magnon condensation into a Q ball in $^3\text{He-B}$ // Phys. Rev. Lett., 2007. V. 98, No. 26. P. 265302(1–4).
65. *Bunkov Yu.M., Volovik G.E.* Bose – Einstein condensation of magnons in superfluid ^3He // J. Low Temp. Phys., 2008. V. 150. P. 135–144.
66. *Bunkov Yu.M., Volovik G.E.* Spin vortex in magnon BEC of superfluid $^3\text{He-B}$ // Physica C, 2008. V. 468. P. 609–612.
67. *Cooper N.R.* Propagating magnetic vortex rings in ferromagnets // Phys. Rev. Lett, 1999. V. 82, No. 7. P. 1554–1557.
68. *Sutcliffe P.* Vortex rings in ferromagnets: Numerical simulations of the time-dependent three dimensional Landau – Lifshitz equation // Phys. Rev. B, 2007. V. 76, No. 18. P. 184439(1–6).
69. *Борисов А.Б., Рыбаков Ф.Н.* Стационарные прецессионные топологические солитоны с ненулевым инвариантом Хопфа в одноосном ферромагнетике // Письма в ЖЭТФ, 2008. Т. 88, № 4. С. 303–307.
70. *Борисов А.Б., Рыбаков Ф.Н.* Динамические тороидальные хопфионы в ферромагнетике с анизотропией типа «легкая ось» // Письма в ЖЭТФ, 2009. Т. 90, № 7. С. 593–596.
71. *Papanicolaou N., Tomaras T.N.* Dynamics of magnetic vortices // Nucl. Phys. B, 1991. V. 360. P. 425–462.
72. *Пшеничный Б.Н., Данилин Ю.* Численные методы в экстремальных задачах. М.: Наука, 1975. С. 175.
73. *Борисов А.Б., Рыбаков Ф.Н.* Трехмерные статические солитоны в несоизмеримых магнитных кристаллах // ФНТ, 2010. Т. 36, № 8/9. С. 964–970.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Глава 1. Двумерные магнитные структуры и солитоны в ферро- и антиферромагнетиках в обменном приближении	11
1.1. Применение метода «одевания» к анализу цилиндрически-симметричных солитонов в магнитных средах	16
1.1.1. Основные модели и U - V -пары для них	16
1.1.2. Кольцевые волны намагниченности в неупорядоченных ферромагнетиках и спиновых стеклах	23
1.1.3. Аксиально-симметричные возбуждения и структуры в изотропных ферро- и антиферромагнетиках	31
1.2. Характерные свойства двумерных вихрей в ферромагнетиках	38
1.2.1. Теорема Деррика	38
1.2.2. Скирмионы, или вихри Белавина – Полякова	47
1.2.3. Законы сохранения	53
1.2.4. Движение вихря в поле градиента внешнего магнитного поля	63
1.3. «Квантованные» нелинейные возбуждения дисклинаций в изотропном антиферромагнетике	69
1.4. Спиральные структуры в двумерной модели Гейзенберга	79
1.4.1. Конформная инвариантность модели и построение решений	80
1.4.2. Двумерные магнитные спирали обменного происхождения	85
1.5. Численное моделирование локализованных структур двумерной гейзенберговской решетки	94
1.5.1. Логарифмический источник. XU -модель	97
1.5.2. Спиральный вихрь	102
1.5.3. «Узельные» структуры и пространственный спиральный вихрь в гейзенберговской модели	104
Глава 2. Солитоноподобные вихри и их упорядоченные структуры в моделях магнетиков, редуцируемых к двумерной модели sine-Gordon	108
2.1. Физические приложения двумерной модели sine-Gordon	108
2.2. Солитонные вихри в «легкоплоскостных» магнетиках	122
2.2.1. Метод Хироты. Отдельные вихри и цепочки из чередующихся вихрей и антивихрей	122
2.2.2. Подстановка Лэмба. Прямоугольные решетки из вихрей и антивихрей	132
2.2.3. Применение метода Хироты для построения двумерных динамических решений модели	135
2.3. Солитоноподобные дефекты в несоизмеримых структурах и на фоне волны намагниченности	140
2.3.1. Двумерная решетка вихрей в соизмеримой фазе	146
2.3.2. Дорожка из одинаковых вихрей в несоизмеримой фазе	148
2.3.3. Взаимодействие спиновой волны с решеткой магнитных вихрей	149

2.3.4. Цепочка из чередующихся вихрей в несоизмеримой структуре	153
2.3.5. Цепочка чередующихся вихрей на фоне спиновой волны	161
2.4. Вихри с минимальным топологическим зарядом. Численные расчеты	163

Глава 3. Обратная задача рассеяния для эллиптического уравнения sine-Gordon с асимптотикой типа кноидальной волны

3.1. Прямая задача рассеяния	173
3.1.1. Функции Иоста. Операторы преобразования	173
3.1.2. Матрица перехода и редукции	178
3.1.3. Поведение функций Иоста вблизи особых точек	183
3.1.4. Зависимость матрицы рассеяния от переменной x . Связь функций Иоста с решениями уравнения sine-Gordon	188
3.2. Дискретный спектр. Классификация солитоноподобных дефектов ..	193
3.3. Дисперсионные соотношения	198
3.4. Обратная задача рассеяния	202
3.5. Мультисолитонные решения эллиптического уравнения sine-Gordon с асимптотикой типа кноидальной волны	206

Глава 4. Несолитонные вихревые диполи в несоизмеримых (полосовых доменных) структурах

4.1. Трудности метода ОЗР. Основные расчетные формулы и утверждения	213
4.1.1. Ограничения на матрицу перехода, налагаемые асимптотическим поведением поля $u(x, y)$ при $ x \rightarrow \infty$	216
4.1.2. Связь недиагональных элементов матрицы перехода с решением линеаризованного уравнения sine-Gordon	218
4.2. Решение нелинейной краевой задачи о вихревом диполе с $Q = \pm 1$...	220
4.2.1. Ограничения на функции Иоста и матрицу перехода, обусловленные зеркальной симметрией конфигурации	222
4.2.3. Ограничения на функцию $\Phi(x, y)$, следующие из анализа прямой и обратной задач рассеяния	223
4.2.4. Определение параметра f по асимптотическому поведению поля $u(x, y)$ вблизи центров вихрей	229
4.3. Другие типы вихревых диполей в решетке солитонов	232
4.4. Анализ асимптотического поведения поля диполя при $r \rightarrow \infty$	241
4.5. Линейная ХУ-модель. Физические приложения	247
4.6. Магнитные вихревые диполи в широких джозефсоновских контактах	252
4.7. Построение решений двумерной модели sine-Gordon с асимптотикой типа «доменной стенки» при $ y \rightarrow \infty$	256
4.8. Блоховская линия в доменной стенке	269

Глава 5. Двумерные нелинейные дефекты, аналогичные дефектам линейной теории упругости

5.1. Дефекты и сингулярные источники. Поля дефектов на большом расстоянии от их центров	278
	287

5.2. Нелинейные дефекты на фоне однородного основного состояния. Описание методом ОЗР	293
5.2.1. Системы из дислокационных, дисклинационных диполей, точечных дефектов	298
5.2.2. Дефекты, порожденные локализованными силовыми воздействиями	302
5.2.3. Исследование структур типа «мишеней» и спиральных вихревых диполей	306
5.3. Дефекты плоскопараллельной доменной структуры	319
Глава 6. Трехмерные нелинейные возбуждения и структуры в магнетиках	327
6.1. Трехмерные спиральные структуры в изотропном ферромагнетике ...	327
6.2. Трехмерные антиферромагнитные дефекты и текстуры в модели главного кирального поля на группе $SU(2)$	338
6.2.1. Подстановки, приводящие к упрощению модели	341
6.2.2. Пространственные структуры, связанные с триортогональной системой координат. Дифференциально-геометрический метод интегрирования	343
6.2.3. Пространственные структуры, связанные со второй и третьей подстановками	354
6.3. Трехмерные локализованные топологические структуры с конечной энергией в ферромагнетике	361
6.3.1. Классификация трехмерных топологических солитонов с помощью инварианта Хопфа	361
6.3.2. Модель Фаддеева	371
6.3.3. Стационарные и динамические прецессионные топологические солитоны в одноосном ферромагнетике	375
Список литературы	394

Научное издание

**Александр Борисович Борисов
Владимир Валерьевич Киселев**

**НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ, СОЛИТОНЫ
И ЛОКАЛИЗОВАННЫЕ СТРУКТУРЫ В МАГНЕТИКАХ**

**Т. 2. ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ СОЛИТОНЫ,
ДВУМЕРНЫЕ И ТРЕХМЕРНЫЕ «УЗОРЫ»**

Рекомендовано к изданию
ученым советом Института физики металлов
и НИСО УрО РАН

Редактор **М.О. Тюлюкова**
Технический редактор **Е.М. Бородулина**
Корректор **Г.Н. Старкова**
Компьютерная верстка **Н.С. Глушковой**

ISBN 978-5-7691-2232-3



НИСО УрО РАН № 40(11)–33. Подписано в печать 01.11.11.
Формат 60×84 1/16. Бумага типографская. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 26. Уч.-изд. л. 30. Тираж 150 экз. Заказ № 198.

Оригинал-макет изготовлен в РИО УрО РАН.
620990, Екатеринбург, ул. Первомайская, 91.

Отпечатано в типографии
«Уральский центр академического обслуживания».
620990, Екатеринбург, ул. Первомайская, 91.